آزمائشي ڇاپو

درسي ڪتاب

رياضي

9 درجي لاءِ

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ، ڄامشورو

مفت ورهاست لاءِ

آزمائشي ڇاپو

درسي ڪتاب

رياضي

9 درجي لاءِ

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ، ڄام شورو

ڇپيندڙ: پيرادائز پريس (پرائيويٽ) لميٽڊ ڪراچي

مفت ورهاست لاءِ

ايسوسيئيشن فار اڪيڊمڪ ڪوالٽي (آفاق) پاران سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ ڄامشورو لاءِ تيار ڪيو.

ڊائريڪٽوريٽ آف ڪريڪيولم ۽ ريسرچ سنڌ ڄامشورو جي صوبائي ريويو ڪميٽي پاران نظرثاني ڪيل. بورڊ آف انٽرميڊيئيٽ اينڊ سيڪنڊري ايجوڪيشن، حيدرآباد، ڪراچي، سکر، لاڙڪاڻو، ميرپورخاص ۽ شهيد بينظيرآباد پاران سيڪنڊري ڪلاسن لاءِ درسي ڪتاب طور منظور ٿيل.

اسڪول ايجوڪيشن اينڊ لٽريسي ڊپارٽمينٽ حڪومت سنڌ کان

نوٽيفڪيشن نمبر No.SO(C)SELD/STBB-18/2021 موجب منظور شده.

نگران اعلیٰ

پرويز احمد بلوچ

چيئرمين سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

شاهد وارثي

مئنيجنگ ڊائريڪٽر

ايسوسيئيشن فار اڪيڊمڪ ڪوالٽي (آفاق)

خواجه آصف مشتاق

پروجيڪٽ ڊائريڪٽر

ايسوسيئيشن فار اڪيڊمڪ ڪوالٽي (آفاق)

رفيع مصطفيٰ

پروجيڪٽ مئنيجر

ايسوسيئيشن فار اڪيڊمڪ ڪوالٽي (آفاق)

دارب‌وش ڪاڦي

سپروائيزر

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

يوسف احمد شيخ

چيف سپروائيزر

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

ليکڪ:

- ☆ مسٽر آفتاب علي
- ☆ مسٽر سيد آفاق احمد
- ☆ پروفيسر محمد فاروق خان
- ☆ مسٽر اويس سراج
- ☆ مس اقرا مغل
- ☆ مسٽر عمر خان

نظرثاني:

- ☆ مسٽر عبدل سليم ميمڻ
- ☆ مسٽر محمد صغير شيخ
- ☆ مسٽر محمد وسيم
- ☆ مسٽر افضل احمد
- ☆ پروفيسر محمد فاروق خان
- ☆ مسٽر اعجاز علي سبهپوٽو
- ☆ مسٽر نذير احمد ميمڻ
- ☆ مسٽر محمد ياسر انصاري
- ☆ مسٽر آفتاب علي

سنڌيڪار

- ☆ مسٽر نذير احمد ميمڻ
- ☆ مسز خالدا ميمڻ
- ☆ سيد منيراحمد شاه

ايڊيٽر

- ☆ مسٽر مير سرفراز خليل ساند

تڪنيڪي معاون

- ☆ مسٽرمحمد ارسلان شفاعت گدي

چپيندڙ: چپيندڙ: پيرادائز پريس (پرائيويٽ) لميٽڊ ڪراچي

مفت ورهاست لاءِ

مهاڳ

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ هڪ اهڙو تعليمي ادارو آهي، جنهن جو ڪم درسي ڪتابن جي تياري ۽ اشاعت ڪرڻ آهي. هن جو اهم مقصد اهڙن درسي ڪتابن جي تياري ۽ فراهمي آهي، جيڪي نئين نسل کي ڄاڻ ، هنر سان گڏوگڏ منجهن اهڙي صلاحيت پيدا ڪن، جنهن جي ذريعي اهي آفاقي نظرين، پائيڪاري، بزرگن جي ڪارنامن، پنهنجي ثقافتي ورثي، روايت جي حفاظت ڪندي، نئين دور جي سائنسي، ٽيڪنيڪي ۽ سماجي تقاضائن کي پورو ڪري ڪامياب زندگي گذاري سگهن.

نون ڇاپن ۾ ، تعارفي مضمون معلوماتي باڪس، خلاصا ۽ مختلف وسيع مشقن کي شامل ڪيو ويو آهي. جيڪو آئون سمجهان ٿو ته نه صرف دلچسپي پيدا ڪندا پر تمام گهڻي حد تائين ڪتاب فائديمند ثابت ٿيندو.

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ هن ڪتاب جي اشاعت لاءِ تمام تر تڪليفن محدود وسائل جي باوجود ڪتاب تي خاصو خرچ ڪيو آهي.

ڪوبه ڪتاب يقيناً حرف آخر نه هوندو آهي، ۽ ان ۾ هر وقت بهتري جي گنجائش هوندي آهي، جڏهن ته ليکڪ، پنهجي پوري صلاحيتن کي استعمال ڪندي مڪمل تصورن ۽ وضاحتن کي چٽي نموني پيش ڪيو آهي. هن ۾ اجا به ڪيتريون ئي خاميون ٿي سگهن ٿيون تنهن لاءِ ماهر استادن ۽ شاگردن کي عرض رکجي ٿو ته اڻپوري لکائي، يا اڻپورين شڪلين بابت نشاندهي ڪن ۽ پنهنجيون تجويزون ۽ رايا ڏين ته جيئن ڪتابن کي ايندڙ ڇاپي ۾ سڌاريو وڃي. آخر ۾ آئون ائسوسيئيشن فار اڪيبدمڪ ڪوالٽي (آفاق)، اسان جي ماهر ليکڪن، ايڊيٽرن ۽ بورڊ جي ماهر عملي جو سندن تعليم جي لاءِ اڻ ٿڪ محنت ۽ ڪوشش لاءِ شڪر گذار آهيان.

چيئرمين

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ، ڄامشورو

بِسۡمِ اللّٰہِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِیۡمِ

مفت ورهاست لاءِ

فهرست

مفت ورهاست لاءِ

يونٽ 1

حقيقي ۽ منجهيل عدد

Real and Complex Numbers

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ميلاپ واري سيٽ کي حقيقي عددن جي سيٽ طور ياد ڪندا.
- حقيقي عددن کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪندا.
- ختم ٿيندڙ، نه ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي عددن کي عددي ليڪ تي ڏيکاريندا.
- ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ڏهائي واري سڃاڻپ ۾ فرق ڪندا.
- حقيقي عددن جي خاصيتن جي ڄاڻ حاصل ڪندا.
- مول ۽ مولن جي پايي جي سڃاڻپ ڪري سگهندا.
- مول ۽ سگهه نما، صورت جي اظهار ۾ فرق ڪري سگهندا.
- مولي صورت واري اظهار کي سگهه نما اظهار ۾ بدلائي سگهندا ۽ ان جي برعڪس پڻ.
- بنياد، سگهه ۽ سگهه جي ملهه کي پڻ وري دهرائيندا.
- سگهن جا قاعدا استعمال ڪري حقيقي سگهه نما اظهارن کي سادي صورت ۾ آڻي سگهندا.
- وضاحت سان منجهيل عددن (Complex numbers) z جي اظهار جي صورت ۾ وصف بيان ڪندا جيئن (a, b) يا $z = a + ib$ ، جڏهن ته a حقيقي ۽ b تصوراتي حصو آهي ۽ هتي $i = \sqrt{-1}$ آهي.
- $z = (a, b)$ يا $z = a + ib$ ۾ a کي حقيقي ۽ b کي تصوراتي حصي طور سڃاڻپ ڪندا.
- منجهيل عدد (Complex number) جي گردان (Conjugate) جي تعريف ڪري سگهندا.

$$\bar{z} = \overline{a+ib} = a - ib = (a, -b)$$

- منجهيل عددن (Complex Numbers) جي برابري واري صورت بابت ڄاڻ
- منجهيل عددن (Complex numbers) جي بنيادي نشانيون (جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ) جو استعمال ڪري سگهندا.

تعارف:

گذريل ڪلاسن ۾ اسان عددن جا ڪيترائي قسم سکي آيا آهيون، جهڙوڪ قدرتي عدد(عددن جي گروپ) سڄا عدد، مڪمل يا پورا عدد، ناطق عدد وغيره. هي سيئي عَددَ، حقيقي عددن جي سيٽ ۾ شامل آهن. ان ڪري حقيقي عددن جي درجا بندي هيٺ ڏجي ٿي.

1.1 حقيقي عدد

1.1.1 ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ميلاپ واري سيٽ کي حقيقي عددن جي سيٽ طور ياد ڪندا.

حقيقي عددن جو سيٽ ناطق ۽ غير ناطق عددن جو ميلاپ آهي يعني $\mathbb{R} = Q \cup Q'$

اسان اڳيئي ناطق ۽ غيرناطق عددن بابت سکي چڪا آهيون. حقيقي عددن جون ڪيتريون خاصيتون آهن جيئين توهان ناطق عددن جون خاصيتون سکيون آهن.

1.1.2 حقيقي عددن کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ

گذريل ڪلاسن ۾ اسان پورن عددن، سڄن عددن ۽ انهن کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ جو مطالعو ڪري آيا آهيون.ساڳي طرح اسين حقيقي عددن کي به عددي ليڪ تي ظاهر ڪري سگهون ٿا.

اچو تو هيٺيان مثال ڏسون:

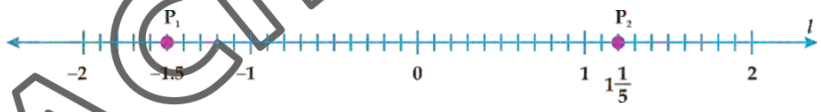
مثال 01 $\frac{1}{2}$ ۽ $-\frac{1}{2}$ کي عددي ليڪ l تي ظاهر ڪريو.

حل:

اهڙي طرح مٿئين شڪل ۾ ٽبڪو P_1 $-\frac{1}{2}$ ۽ P_2 $\frac{1}{2}$ کي ظاهر ڪري ٿو.

مثال 02 -1.5 ۽ $1\frac{1}{5}$ کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

حل:



ساڳي طرح سان مٿئين شڪل ۾ نقطو P_1 ظاهر ڪري ٿو -1.5 کي ۽ P_2 ظاهر ڪري ٿو $1\frac{1}{5}$ کي.

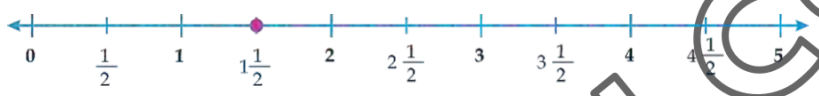
1.1.3 ختم ٿيندڙ ۽ نه ختم ٿيندڙ، ورجندڙ ڏهائي واري عدد کي عددي ليڪ تي ڏيکارڻ.

ڪنهن به ختم ٿيندڙ، نه ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي واري عدد کي، عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ لاءِ، جيئن ته سيئي نقطا ناطق عدد $\frac{a}{b}$ سان لاڳاپيل آهن. جنهن ۾ a, b واڌو سڄا عدد آهن، اسان هر هڪ ايڪي ڊيگهه کي b هڪجيترن حصن ۾ ورهائيندا سين پوءِ a^{th} نقطو ورهاست جو اصل (Origin) جي ساڄي طرف $\frac{a}{b}$ کي ظاهر ڪندو ۽ کاڀي طرف $-\frac{a}{b}$ کي ظاهر ڪندو.

مثال 01 هيٺيان ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

i. $\frac{3}{2}$ ii. $\frac{5}{4}$

i. $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$



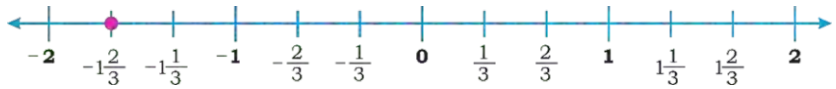
ii. $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

مثال 02 هيٺيان نہ ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽپور عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

i. $\frac{11}{6}$ ii. $-\frac{5}{3}$

i. $\frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$

iii. $-\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$



1.1.4 ناطق ۽ غير ناطق عددن جي ڏهائي واري سڃاڻپ ۾ فرق ڪندا

جڏهن اسين ناطق عدد کي ڏهائي جي صورت ۾ ظاهر ڪندا آهيون ته ٻن قسمن جا ڏهائي اٽپور ممڪن آهن جن ۾ ختم ٿيندڙ ۽ نه ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽپور آهن جڏهن ته غيرناطق عدد نه ختم ٿيندڙ نه ورجندڙ ڏهائي اٽپور جي صورت ۾ ظاهر ڪبا آهن. اسان انهن کي هيٺ جدول ۾ ظاهر ڪريون ٿا.

نمبرشمار	عدد	بيان ڪرڻ
1.	$\frac{1}{2} = 0.5$	ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور
2.	$\frac{1}{4} = 0.25$	ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپور
3.	$\frac{1}{3} = 0.333...$	نه ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽپور
4.	$\frac{9}{11} = 0.818181...$	نه ختم ٿيندڙ ورجندڙ ڏهائي اٽپور
5.	$\sqrt{2} = 1.414213...$	نه ختم ٿيندڙ نه ورجندڙ ڏهائي اٽپور
6.	$\sqrt{3} = 1.73205...$	نه ختم ٿيندڙ نه ورجندڙ ڏهائي اٽپور

مشق 1.1

.1 هيٺين عددن مان ناطق ۽ غيرناطق عددن جي سڃاڻپ ڪريو ۽ هرهڪ کي الڳ ڪالم ۾ لکو.

(i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{6}}$ (iv) $\frac{2}{8}$ (v) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (vi) $\sqrt{8}$

(vii) e (viii) π (ix) $\sqrt{5}$ (x) $\frac{22}{3}$ (xi) $\frac{1}{\pi}$ (xii) $\frac{11}{12}$

.2 هيٺين کي ڏهائي اٽپور ۾ تبديل ڪريو. انهن جي ختم ٿيندڙ ۽ نه ختم ٿيندڙ جي پڻ نشاندهي ڪريو.

(i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{4}{18}$ (iii) $\frac{1}{15}$ (iv) $\frac{49}{8}$ (v) $\frac{207}{15}$ (vi) $\frac{50}{76}$

3. هيٺيان ناطق عدد، عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

(i) $\frac{8}{10}$ (ii) $-\frac{8}{10}$ (iii) $1\frac{1}{4}$ (iv) $-1\frac{1}{4}$ (v) $\frac{2}{3}$ (vi) $-\frac{2}{3}$

4. ڇا توهان 1 ۽ 2 جي وچ ۾ سيني ناطق عددن جي فهرست ناهي سگهوٿا؟

5. سبب ٻڌايو ته ڇو (π) هڪ غيرناطق آهي.

6. صحيح بيان تي (✓) ٽڪ جو نشان لڳايو.

(i) $\frac{5}{7}$ غيرناطق عدد جو مثال آهي.

(ii) π هڪ غيرناطق عدد آهي.

(iii) 0.31591... نه ختم ٿيندڙ ۽ نه ورجندڙ ڏهائي اٽپور آهي.

(iv) $0.12\overline{3}$ هڪ ورجندڙ ڏهائي اٽپور آهي.

(v) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 0 ۽ 1 جي وچ ۾ هوندا آهن.

(vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ناطق عدد جو هڪ مثال آهي.

1.2 حقيقي عددن جون خاصيتون

حقيقي عددن ۾ جوڙ ۽ ضرب جي لحاظ کان خاصيتون موجود آهن. حقيقي عددن لاءِ a,b جي جوڙ اپت $a+b$ ۽ ضرب اپت $a.b$ يا $a \times b$ يا صرف ab آهي.

1.2.1 حقيقي عددن جي خاصيتن جي ڄاڻ رکڻ

(a) جوڙ جي لحاظ کان حقيقي عددن جون خاصيتون

(i) بندش واري خاصيت (Closure property)

بن حقيقي عددن جي جوڙ اپت، وري هڪ حقيقي عدد ٿيندو.

$\forall a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}$ جوڙ جي لحاظ کان بندش جي خاصيت آهي.

مثال:

(i) $5,7 \in \mathbb{R} \Rightarrow 5+7=12 \in \mathbb{R}$

(ii) $\frac{4}{5}, \frac{3}{4} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{16+15}{20}=\frac{31}{4} \in \mathbb{R}$

(ii) متاواري خاصيت (Commutative property)

ڪن به ٻن حقيقي عددن a ۽ b لاءِ

$$a+b=b+a$$

ڪي جوڙ جي لحاظ کان متا واري خاصيت چئبو آهي.

مثال: (i) $3+7=7+3$ (ii) $\sqrt{5}+\sqrt{6}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$

(iii) سنگت واري خاصيت (Associative property)

ڪن به ٽن حقيقي عددن a,b ۽ c لاءِ

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

ڪي جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت چئبو آهي.

مثال: $(4+5)+6=4+(5+6)$

(iv) جوڙ لاءِ ذاتي عنصر (Additive inverse)

هڪ عدد ٻڙي 0 جنهنجو تعلق حقيقي عدد سان آهي $0\in\mathbb{R}$ اهڙي طرح $a+0=a=0+a,\ \forall a\in\mathbb{R}$

"0" ڪي جوڙ لاءِ ذاتي عنصر چئبو آهي.

مثال: $3+0=3=0+3,\ \frac{7}{8}+0=\frac{7}{8}=0+\frac{7}{8},$ وغيره

(v) جمعي ابتڙ (Additive inverse)

هرهڪ حقيقي عدد a لاءِ $-a$ حقيقي عدد موجود آهي اهڙي طرح جو $a+(-a)=0=(-a)+a$

تنهن ڪري $-a$ ۽ a هڪ ٻئي جا جمعي ابتڙ آهن.

مثال: $6+(-6)=0=(-6)+6=0$

هتي 6 ۽ -6 هڪ ٻئي جا جمعي ابتڙ آهن.

(b) ضرب جي لحاظ کان حقيقي عددن جون خاصيتون

(i) بندش واري خاصيت (Closure property)

ڪن به ٻن حقيقي عددن a ۽ b جي ضرب اپت وري به هڪ حقيقي عدد آهي.

$a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow ab\in\mathbb{R}$ ضرب جي لحاظ کان بندش واري خاصيت سڏبو آهي.

مثال: (i) $5,7 \in \mathbb{R} \Rightarrow (5)(7) = 35 \in \mathbb{R}$ (ii) $\frac{3}{5}, \frac{6}{7} \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{18}{35} \in \mathbb{R}$

(ii) متاواري خاصيت (Commutative property)

ڪن بہ ٽن حقيقي عددن a ۽ b لاءِ

$ab = ba$ کي جوڙ جي لحاظ کان متاواري خاصيت چئبو آهي.

مثال: (i) $\sqrt{3}, \sqrt{5} \in \mathbb{R} \Rightarrow (\sqrt{3})(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})(\sqrt{3})$

(ii) $3, 4 \in \mathbb{R} \Rightarrow 3\times4 = 4\times3$ etc.

(iii) سنگت واري خاصيت (Associative property)

ڪن بہ ٽن حقيقي عدد a, b ۽ c لاءِ

$(ab)\,c = a\,(bc)$ کي ضرب جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت چئبو آهي.

مثال: (i) $4,5,6 \in \mathbb{R}$, تہ پوءِ $(4\times5)\times6 = 4\times(5\times6)$,

(ii) $\frac{2}{5}, 4, \sqrt{3} \in \mathbb{R}$, تہ پوءِ $(\frac{2}{5}\times4)\times\sqrt{3} = \frac{2}{5}\times(4\times\sqrt{3})$, وغيره

(iv) ضرب لاءِ ذاتي عنصر (Multiplicative identity)

هر هڪ حقيقي عدد a لاءِ هڪ رڪن 1 موجود آهي جيڪو حقيقي عدد جي سيٽ سان تعلق رکي ٿو $1 \in \mathbb{R}$.

$1, a\times1 = 1\times a = a$ کي ضرب لاءِ ذاتي عنصر چئبو آهي.

مثال: $\frac{3}{5}\times1 = 1\times\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$, $1\times3 = 3\times1 = 3$, وغيره.

(v) ضربي ابتڙ (Multiplicative inverse)

هر هڪ حقيقي عدد a لاءِ (a غير بڙي عدد آهي)، هڪ رڪن $\frac{1}{a}$ يا $a^{-1} \in \mathbb{R}$ موجود آهي جنهن جو تعلق حقيقي عدد سان آهي.

$a\times\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\times a = 1$ تنهنڪري $\frac{1}{a}$ ۽ a هڪبئي جا ضربي ابتڙ آهن.

مثال: $3\times\frac{1}{3} = 1 = \frac{1}{3}\times3$

هتي 3 ۽ $\frac{1}{3}$ هڪبئي جا ضربي ابتڙ آهن.

(c) ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت
(Distributive property of Multiplication over Addition)

(i) $a\,(b+c) = ab + ac$ لاءِ a, b, c ڪل ٽن حقيقي عدد

ان کي ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت چئبو آهي (کاٻي کان ورهاست واري خاصيت)

(ii) $(a+b)\,c = ac + bc$

ان کي ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت چئبو آهي (ساڄي کان ورهاست واري خاصيت)

مثال: $3(5+7) = 3\times5 + 3\times7$ (کاٻي کان ورهاست واري خاصيت)

$(3+7)2 = 3\times2 + 7\times2$ (ساڄي کان ورهاست واري خاصيت)

نوٽ: $a\,(b-c) = ab - ac$ ضرب جي ڪٽ تي ورهائجڻ واري خاصيت آهي.

(d) حقيقي عددن جي برابري واريون خاصيتون

هيٺيون حقيقي عددن تي برابر واريون خاصيتون آهن.

(i) عڪسي خاصيت (Reflective property)

جيڪڏهن $a \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ $a = a$

(ii) هم شڪلي خاصيت (Symmetric property)

جيڪڏهن a,b حقيقي عدد آهن تہ پوءِ $a = b \Leftrightarrow b = a$

(iii) متعدي خاصيت (Transitive property)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن تہ پوءِ $b = c \Leftrightarrow a = c$ ۽ $a = b$

(iv) جوڙ واري خاصيت (Additive property)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن $a = b$ تہ پوءِ $a + c = b + c$

(v) ضربي خاصيت (Multiplicative property)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن اهڙي طرح جيئن $a = b$ تہ پوءِ $ac = bc$

(vi) ڪاٽ واري خاصيت جوڙ جي لاءِ (Cancellation property for Addition)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن ۽ جيڪڏهن $a + c = b + c$ تہ پوءِ $a = b$

(vii) ڪاٽ واري خاصيت ضرب جي لاءِ (Cancellation property for Multiplication)

جيڪڏهن a,b,c حقيقي عدد آهن ۽ $c \neq 0$ جيڪڏهن $ac = bc$ تہ پوءِ $a = b$

(e) حقيقي عددن ۾ اڻ برابري واري تعلق جون خاصيتون
(Properties of Inequalities of Real Numbers)

هيٺيون حقيقي عددن ۾ اڻ برابري واري تعلق جون خاصيتون آهن.

(i) ٽ رخي خاصيت (Trichotomy property)

جيڪڏهن $a,b \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ $a = b$ يا $a < b$ يا $a > b$

(ii) متعدي خاصيت (Transitive property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ

(a) $a < b$ ۽ $b < c \Rightarrow a < c$ (b) $a > b$ ۽ $b > c \Rightarrow a > c$

(iii) جوڙ واري خاصيت (Additive property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ

(a) $a < b \Rightarrow a+c < b+c$ (b) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

(iv) ضربي خاصيت (Multiplicative property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ ۽ $c > 0$ تہ پوءِ

(a) $a > b \Rightarrow ac > bc$ (b) $a < b \Rightarrow ac < bc$

ساڳي طرح جيڪڏهن $c < 0$ تہ پوءِ

(a) $a > b \Rightarrow ac < bc$ (b) $a < b \Rightarrow ac > bc$

(v) ابتڙ خاصيت (Reciprocative property)

جيڪڏهن $a,b \in \mathbb{R}$ ۽ b,a جون ساڳيون نشانيون هجن تو پوءِ

(a) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ۽ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Rightarrow a > b$ (b) $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ۽ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a < b$

(vi) ڪاٽ واري خاصيت (Cancellation property)

جيڪڏهن $a,b,c \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ

(a) $a + c > b + c \Rightarrow a > b$

(b) $a + c < b + c \Rightarrow a < b$

(c) $c > 0$ ۽ $ac > bc \Rightarrow a > b$ ساڳي طرح

(d) $c > 0$ ۽ $ac < bc \Rightarrow a < b$

مشق 1.2

1. هيٺين ۾ حقيقي عددن جي خاصيتن جي سڃاڻپ ڪريو.

(i) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{4}{3}+\left(1\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}+1\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}$

(iii) $9\times\left(\frac{10}{9}+\frac{20}{9}\right)=\left(9\times\frac{10}{9}\right)+\left(9\times\frac{20}{9}\right)$

(iv) $\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{7}\right)\times\frac{7}{8}=\left(\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{5}{7}\times\frac{7}{8}\right)$

(v) $\left(\frac{7}{5}-\frac{3}{5}\right)\times\frac{10}{15}=\left(\frac{7}{5}\times\frac{10}{15}\right)-\left(\frac{3}{5}\times\frac{10}{15}\right)$

(vi) $\frac{d}{c}\times\frac{e}{f}=\frac{e}{f}\times\frac{d}{c}$

(vii) $11\times(15\times21)=(11\times15)\times21$

(viii) $\frac{2}{11}\times\frac{11}{2}=\frac{11}{2}\times\frac{2}{11}=1$

(ix) $\left(\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)=0$

(x) $\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{b}{a}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)=1$

(xi) $\frac{15}{10}\times\left(\frac{8}{5}-\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{15}{10}\times\frac{8}{10}\right)-\left(\frac{15}{10}\times\frac{4}{10}\right)$

(xii) $\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=1$

2. هيٺين حقيقي عددن کي مڪمل درست ڪرڻ لاءِ درست حقيقي عددن سان خال پريو.

(i) $\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\square}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{5}$

(ii) $\frac{7}{10}+\left(\frac{70}{\square}+\frac{16}{33}\right)=\frac{7}{\square}+\left(\frac{\square}{10}+\frac{16}{\square}\right)$

(iii) $\frac{99}{50}\times\frac{50}{99}=\square$

(iv) $\left(\frac{59}{95}\right)\times\left(\frac{95}{59}\right)=\square$

(v) $(-21)+(\square)=0$

(vi) $\frac{5}{8}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{\square}{\square}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{8}\times\frac{\square}{\square}\right)$

3. هيٺين خاصيتن کي درست/صحيح ڪرڻ لاءِ خال پريو.

(i) $5<8$ ۽ $8<10\Rightarrow$ ____ $<$ ____

(ii) $10>8$ ۽ $8>5\Rightarrow$ ____ $<$ ____

(iii) $3<6\Rightarrow 3+9<$ ___

(iv) $4<6\Rightarrow 4+8<$ ___

(v) $8>6\Rightarrow 6+8>$ ___

4. هيٺيان خال پريو جيڪي خاصيتن کي صحيح/درست ڪن.

(i) $5 < 7 \Rightarrow 5 \times 12 <$ ___ × ___

(ii) $7 > 5 \Rightarrow 7 \times 12 >$ ___ × ___

(iii) $6 > 4 \Rightarrow 6 \times (-7)$ ____ $4 \times (-7)$

(iv) $2 < 8 \Rightarrow 2 \times (-4)$ ____ $8 \times (-4)$

5. هيٺين حقيقي عددن جا جمعي ۽ ضربي ابتڙ معلوم ڪريو.

(i) 3 **(ii)** -7 **(iii)** 0.3 **(iv)** $\frac{-\sqrt{5}}{5}$ **(v)** $\frac{9}{\sqrt{12}}$ **(vi)** 0

1.3 مول ۽ مول جو پايو

1.3.1 مول ۽ مول جي پايي جي سڃاڻپ ڪرايو

سمجهو تہ $n \in Z^+$ (واڌو سڄن عددن جو سيٽ) ۽ $n > 1$

۽ فرض ڪريو تہ $a \in \mathbb{R}$، پوءِ ڪنهن بہ واڌو حقيقي عدد x لاءِ

a) جو ٻيو مول) $x^2 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \sqrt{a}$ جيئن

a) جو ٽيون مول) $x^3 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}$ ساڳي طرح

a) جو چوٿون مول) $x^4 = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{a}$

a) جو n وون مول) $x^n = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$ عام طرح

$\sqrt[n]{a}$ ۾ a کي مول جو پايو ۽ $'n'$ کي مول جي ڏسڻي چئبو آهي.

$\sqrt{\ }$ کي مول جي نشاني سڏبو آهي.

1.3.2 مول ۽ سگهہ نما صورت جي اظهار ۾ فرق ڪريو.

جيئن تہ اسان پڙهي آيا آهيون تو $x = \sqrt[n]{a}$ هڪ مول واري صورت آهي.

ساڳي طرح $a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{m}{n}}$ ڪجهہ سگهہ نما صورت جا مثال آهن.

ياد ڪريو تہ

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

هتي $\sqrt[n]{a}$ هڪ مولي صورت آهي $a^{\frac{1}{n}}$ سگهہ واري صورت آهي.

هتي ٻيو مول جون ڪجهہ خاصيتون ڏجن ٿيون.

$\forall a,b \in \mathbb{R}^{+} \wedge m,n \in Z$ تہ پوءِ

(i) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(iii) $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

(iv) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$

(v) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1$

(vi) $m\sqrt{a} \pm n\sqrt{a} = (m \pm n)\sqrt{a}$

(vii) $\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}} = \sqrt{\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}}, a,b \neq 0$

ساڳي طرح

(i) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(ii) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(iii) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

(iv) $\sqrt[mn]{a^n} = a^{\frac{n}{nm}} = a^{\frac{1}{m}}$

(v) $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

(vi) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a} = a^{\frac{1}{n^2}}$

(vii) $\sqrt[n]{a^n} = a$

(viii) $\dfrac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{a^n}} = 1$

1.3.3 مولي صورت ۾ ڏنل اظهار کي سگهہ واري صورت ۾ بدلائڻ ۽ ان جي برعڪس

جڏهن اسان مول ۽ سگهن تي مشتمل اظهارن کي سادي صورت ۾ آڻيندا آهي تہ ان لاءِ مول ۽ سگهہ واريون خاصيتون تمام ڪارگر آهن.

مثال 01 هيٺين مولي اظهارن کي سگهه نما اظهارن ۾ بدلايو.

(i) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (ii) $\sqrt[3]{18}$ (iii) $\sqrt[5]{\frac{5}{7}}$ (iv) $\sqrt[9]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}$ (v) $\sqrt[4]{(ab)^3}$

حل:

(i) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $\sqrt[3]{18} = (18)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\sqrt[5]{\frac{5}{7}} = \left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{5}}$

(iv) $\sqrt[9]{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{9}}$ (v) $\sqrt[4]{(ab)^3} = (ab)^{\frac{3}{4}}$

مثال 02 هيٺين سگهه نما اظهارن کي مولي اظهارن ۾ بدلايو.

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(12)^{\frac{n}{2}}$ (iii) $(-7)^{\frac{3}{4}}$ (iv) $\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{5}}$ (v) $\left(-\frac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}}$

حل:

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ (ii) $(12)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{(12)^n}$ (iii) $(-7)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-7)^3}$

(iv) $\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{y}{x}\right)^{-2}} = \sqrt[5]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}$ (v) $\left(-\frac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(-\frac{x}{y}\right)^m}$

مشق 1.3

1. هيٺين جو بنياد ۽ سگهه نما لکو.

(i) 3^4 (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (iii) $(-30)^{20}$

2. هيٺين ۾ مول جو پايو ۽ مول جي ڏسڻي جي سجاڻپ ڪريو.

(i) $\sqrt[3]{5}$ (ii) $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$ (iii) $\sqrt[5]{x^2yz}$

.3 هيٺين کي سگهه واري نموني ۾ تبديل ڪريو.

(i) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)}$ (ii) $\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^5}$ (iii) $\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)^{-5}}$ (iv) $\sqrt[3]{(yz)^7}$ (v) $\sqrt[9]{27}$

(vi) $\sqrt[3]{(-64)^2}$ (vii) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^m}$ (viii) $\sqrt[5]{(xy)^3}$ (ix) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{4}{3}}}$

.4 هيٺين کي مول واري نموني ۾ تبديل ڪريو.

(i) $\left(5^3\right)^{\frac{1}{7}}$ (ii) $(ab^{-2})^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^3\right]^{\frac{5}{7}}$ (iv) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{m}{2}}$ (v) $\left[\left(\frac{11}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)\right]^{\frac{1}{5}}$

1.4 سگهن جا قاعدا

سگهن يا سگهه نما جا قاعدا رياضي جي ڪيترن ئي حصن ۾ اهم آهن.

1.4.1 بنياد، سگهه ۽ سگهه جي ملهه کي دهرايو.

سمجهو تہ a^n سگهن واري صورت ۾ آهي. جنهن ۾ 'a' بنياد ۽ 'n' سگهه يا سگهه نما آهي جنهن کي a جي n وين سگهه پڙهبو.

a^n جو نتيجو، جڏهن $a \in \mathbb{R}$ آهي تہ ان جو ملهه چئبو آهي.

1.4.2 سگهن جا قاعدا استعمال ڪري حقيقي سگهه نما اظهارن کي سادي صورت ۾ بيان ڪرڻ.

هيٺيان سگهن جا قاعدا اظهارن کي سادي صورت ۾ آڻڻ لاءِ ڪارگر آهن.

(i) سگهن جي ضرب اپت جو قاعدو (Law of Product of Power)

(a) جيڪڏهن $x,y \in Z^+$ ۽ $a,b \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ $a^x \times a^y = a^{x+y}$

هيٺ ڪجهه مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$ (b) $3 \times 3^5 = 3^{1+5} = 3^6 = 729$

(ii) سگهه جي سگهه جو قاعدو (Law of Power of Power)

جيڪڏهن $a \in \mathbb{R}$ ۽ $x, y \in Z^+$ تہ پوءِ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

هيٺ ڪجهه مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $(5^2)^4 = 5^{2\times4} = 5^8$

(b) $\left\{\left(\frac{6}{11}\right)^4\right\}^3 = \left(\frac{6}{11}\right)^{4\times3} = \left(\frac{6}{11}\right)^{12}$ (c) $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^3\right\}^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{3\times3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^9 = -\left(\frac{3}{4}\right)^9$

(iii) ضرب اپت جي سگهه جو قاعدو (Law of Power of a Product)

$\forall a, b, \in \mathbb{R}$ ۽ $n \in Z^+$,

$(a\times b)^n = a^n \times b^n$ تہ پوءِ

هيٺيان مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $(xy)^3 = x^3y^3$ (b) $\left\{\left[\frac{8}{9}\right]\left[\frac{7}{11}\right]\right\}^3 = \left(\frac{8}{9}\right)^3\left(\frac{7}{11}\right)^3$

(iv) اڻپور جي سگهه جو قاعدو (Law of Power of a Quotient)

$\forall a, b, \in \mathbb{R}$ ۽ $n \in Z^+$, تہ پوءِ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ جڏهن $b \neq 0$

مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $\left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{5^3}{8^3}$ (b) $\left(\frac{f}{g}\right)^4 = \frac{f^4}{g^4}, g\neq0$

(v) سگهن جي وندِ اپت جو قاعدو (Law of quotient of Power)

جيڪڏهن $m, n \in Z^+$ ۽ $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ تہ پوءِ

$m > n$ جيڪڏهن $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$n > m$ جيڪڏهن $= \frac{1}{a^{n-m}}$

جيڪڏهن $m = n$ تہ پوءِ

$a^{m-n} = a^{m-m} = a^0 = 1$

ساڳي طرح $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = \frac{a^n}{a^n} = 1$

هيٺيان مثال هن قاعدي مطابق ڏنل آهن.

(a) $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$

(b) $\frac{7^3}{7^5} = \frac{1}{7^{5-3}} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ياد رکو تہ:

$(-a)^n = a^n$ جيڪڏهن n هڪ ٻڌي سگهه آهي.

$(-a)^n = -a^n$ جيڪڏهن n هڪ اڪي سگهه آهي.

ياد رکو تہ:

جيڪڏهن ڪنهن غير ٻڌي عدد جي سگهه ٻڌي آهي تہ ان جو ملهه 1 جي برابر ٿيندو. مثال طور $3^0 = 1$

مشق 1.4

1. سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $\frac{3^5}{3^2}$ (ii) $\frac{2^4 \cdot 5^3}{10^2}$ (iii) $\frac{(a+b)^2 \cdot (c+d)^3}{(a+b) \cdot (c+d)^2}$

2. سگهه جا قاعدا استعمال ڪري سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ (iii) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^5$

(iv) $(-3 \times 5^2)^3$ (v) $[3 \times (-4)^2]^3$ (vi) $\left(-\frac{a}{bc}\right)^5 \times \left(-\frac{a}{bc}\right)^4$

(vii) $\left(-\frac{c}{d}\right)^2 \left(-\frac{c}{d}\right)^3 \left(-\frac{c}{d}\right)^5$ (viii) $mn^2t^4n^3m^5t^7$ (ix) $a^2c^5b^2a^3c^3b^4a^4$

(x) $10x^4y^6x^2z^2y^3$ (xi) $\frac{3}{5}r^3s^2r^7t^2s^2$ (xii) $-\left(-\frac{l}{m}\right)^4 \left(-\frac{l}{m}\right)^5 \left(-\frac{l}{m}\right)^3$

3. سگهه جا قاعدا استعمال ڪري سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $(5^2)^3$ (ii) $\{(xy)^3\}^5$ (iii) $\{(-4)^2\}^5$ (iv) $\{(-3)^3(-4)^2\}^3$ (v) $\left(\frac{b^2}{5}\right)^3$

(vi) $\left\{\left(-\frac{4}{9}\right)^2\right\}^3$ (vii) $\{(z^3)^2\}^4$ (viii) $\{(mm^2m^3m^4)^2\}^5$ (ix) $-[(-0.1)^2 (-0.1)^3 (-0.1)^4]^2$

1.5 منجهيل عدد (Complex numbers)

1.5.1 وضاحت سان منجهيل عددن (Complex numbers) z جي اظهار جي صورت ۾ وصف بيان ڪنداجيئن (a, b) يا $z = a + ib$، جڏهن تہ a حقيقي ۽ b تصوراتي حصو آهي ۽ هتي $i = \sqrt{-1}$ آهي.

اسان کي خبر آهي تہ حقيقي عدد جو چورس غيرڪاٽو آهي. تہ پوءِ $x^2+1=0$ مساوات جو حل $\mathbb{R}$ سان تعلق نٿو رکي. حقيقي عددن جي هن ناڪافي هجڻ کي قابو پائڻ لاءِ، رياضي دانن هڪ نئون عدد تصوراتي ايڪو $\sqrt{-1}$ روشناس ڪرايو، جنهن کي لفظ i (iota) سان ظاهر ڪيو ويو، جنهن کي $i^2 = -1$ جي خاصيت آهي. ظاهر آهي تہ "i" حقيقي عدد نہ آهي. اهو رياضي ۾ هڪ نئون وجود آهي جيڪو اسان کي هر آلجبري مساوات جي نموني $x^2 + a = 0$ جڏهن تہ $a > 0$ جو حل ڪرڻ جي قابل بنائي ٿو. عدد جهڙوڪ $\sqrt{-1} = i, \sqrt{-5} = \sqrt{5}i, \sqrt{-49} = 7i$ خالص تصوراتي عدد آهن.

منجهيل (Complex) عددن جي وصف:

هڪ عدد جيڪو $a+ib$ جي نموني ۾ مليل هجي، جنهن ۾ a,b حقيقي عدد ۽ i هڪ تصوراتي ايڪو هجي ته اهڙي عدد کي منجهيل (Complex) عدد چئبو آهي ۽ ان کي z سان ظاهر ڪبو آهي. مثال طور $z=3+4i$ هڪ منجهيل (Complex) عدد آهي.

منجهيل (Complex) عدد $a+ib$ کي ترتيب ڏنل جوڙي جي صورت (a,b) جهڙي طرح $5+8i=(5,8)$ ۾ لکي سگهجي ٿو.

1.5.2 $z=a+ib$ ۾ a کي حقيقي ۽ b کي تصوراتي حصي طور سڃاڻپ ڪريو.

منجهيل (Complex) عدد $z=a+ib$ ۾ "a" حقيقي حصو آهي. منجهيل عدد جو ۽ "b" تصوراتي حصو آهي. منجهيل عدد جو حقيقي حصي کي $\mathrm{Re}(z)$ سان ظاهر ڪبو آهي ۽ ان جي تصوراتي حصي کي $Im(z)$ سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال 01 مليل منجهيل (Complex) عددن جي حقيقي ۽ تصوراتي حصن جي سڃاڻپ ڪريو.

$z=3-2i$

$Im(z)=b=-2$ ۽ $\mathrm{Re}(z)=a=3$ هتي

1.5.3 منجهيل (Complex) عدد جي گردان (Conjugate) جي تعريف لکو.

z جو گردان (Conjugate) کي $\bar{z}$ سان ظاهر ڪبو آهي.

جيڪڏهن $z=a+ib$ ته پوءِ $\bar{z}=a-ib$ يا $z=(a,b)$ ته پوءِ $\bar{z}=(a,-b)$

۽ جيڪڏهن $z=a-ib$ ته پوءِ $\bar{z}=a+ib$ يا $z=(a,-b)$ ته پوءِ $\bar{z}=(a,b)$

گردان (Conjugate) ۾ اسان صرف تصوراتي حصي جي نشاني تبديل ڪندا آهيون.

نوٽ: جيڪڏهن ڪو منجهيل (Complex) عدد z آهي ته $\overline{(\bar{z})}=z$

مثال هيٺين منجهيل (Complex) عددن جو گردان (Conjugate) معلوم ڪريو.

(i) $3+4i$ (ii) $\left(-\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right)$

حل:

(i) فرض ڪريو ته $z_1=3+4i$

ته پوءِ $\bar{z}_1=\overline{3+4i}$

$\bar{z}_1=3-4i$

(ii) فرض ڪريو ته $z_2=\left(-\frac{4}{5},-\frac{5}{4}\right)$

$\bar{z}_2=\overline{\left(-\frac{4}{5},-\frac{5}{4}\right)}$

$\bar{z}_2=\left(-\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right)$

1.5.4 منجهيل عددن (Complex Numbers) جي برابري واري صورت بابت ڄاڻ

بہ منجهيل عدد (Complex Numbers) کي برابر چئبو جيڪڏهن انهن ۾ هڪ جهڙا حقيقي ۽ تصوراتي حصا هجن جيئن

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad a+ib=c+id, \ iff \ a=c \ \text{ ۽ } \ b=d.$$

مثال 01 جيڪڏهن $x+3yi=16+9i$ تہ x ۽ y معلوم ڪريو.

حل: مليل آهي تہ

$$4x+3yi=16+9i \Rightarrow 4x=16 \text{ ۽ } 3y=9,$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{4}=\frac{16}{4} \text{ ۽ } \frac{3y}{3}=\frac{9}{3}, \Rightarrow x=4 \text{ ۽ } y=3.$$

مثال 02 جيڪڏهن $x^2+iy^2=25+i36$ تہ x ۽ y معلوم ڪريو.

حل: مليل آهي تہ

$$x^2+y^2i=25+36i \Rightarrow x^2=25 \text{ ۽ } y^2=36,$$

$$x=\pm\sqrt{25} \text{ ۽ } y=\pm\sqrt{36} \Rightarrow x=\pm 5 \text{ ۽ } y=\pm 6$$

مشق 1.5

1. هيٺيان منجهيل عدد (Complex Numbers) کي $a+ib$ واري نموني ۾ لکو.

(i) (1,2) (ii) (2,2) (iii) (3,4)
(iv) (−1,1) (v) (−2,2) (vi) (−3,4)

2. هيٺين منجهيل عددن (Complex Numbers) مان حقيقي ۽ تصوراتي حصن جي سڃاڻپ ڪريو.

(i) $1+2i$ (ii) $9i+4$ (iii) $(-5,6)$
(iv) $-1-i$ (v) $\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)i$ (vi) $2i-1$

3. هيٺين منجهيل عدد (Complex Numbers) جو گردان (Conjugate) معلوم ڪريو.

(i) $3+2i$ (ii) $(4,9)$ (iii) $(-1,1)$
(iv) $1-i$ (v) $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)i$ (vi) $3i+1$

.4 هيٺين منجهيل (Complex Numbers) جي چڪاس ڪريو تہ $\overline{(\overline{z})} = z$

(i) $\left(\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{9}{10}\right)i$ (ii) $\left(-\frac{9}{11}\right)+\left(\frac{10}{9}\right)i$ (iii) $\frac{1}{2}-3i$

(iv) $2+3i$ (v) $-2-3\left(-\frac{10}{9}\right)i$ (vi) $4x+3iy$

.5 x ۽ y جا ملهه لهو جڏهن: (i) $x+yi=-5+5i$ (ii) $x^2+iy^2=\frac{16}{9}+\frac{9}{25}i$

(iii) $y^2+\frac{x}{3}i=121-\frac{9}{5}i$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{3}x-\frac{3}{\sqrt{2}}yi=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{9}i$

1.6 منجهيل عددن (Complex Numbers) تي بنيادي نشانيون (Basic Operations)

1.6.1 منجهيل عددن (Complex Numbers) تي بنيادي نشانيون استعمال ڪريو (جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ وڳو)

(i) منجهيل عددن (Complex Numbers) جو جوڙ

فرض ڪريو تہ $z_1= a + ib$ ۽ $z_2= c + id$ کي بہ منجهيل (Complex) عدد آهن.

جيئن $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ انهن جو جوڙ ٿيندو

$$z_1+z_2 = (a + ib) + (c + id)$$
$$= (a+ c) +i (b + d) = (a + c, b + d).$$

ياد رکو تہ:

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

مثال جيڪڏهن $z_1= 6+ 9i$ ۽ $z_2= -1 + 2i$ تہ $z_1+ z_2$ جا ملهه لهو.

حل: مليل آهي تہ $z_2= -1 + 2i = (-1,2)$ ۽ $z_1= 6+ 9i = (6,9)$

اسان کي خبر آهي تہ $\mathbf{z_1 + z_2 = (a + c) +i(b+d) = (a + c, b + d)}$

$\therefore \quad z_1+ z_2 = (6, 9) + (-1, 2) = (6 - 1, 9 +2)$

$\Rightarrow \quad z_1+ z_2= (5, 11)$

(ii) منجهيل عددن (Complex Numbers) جي ڪٽ

فرض ڪريو تہ $z_2= c + id, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ۽ $z_1= a + ib$

تہ پوءِ

$$z_1- z_2 = (a + ib) - (c + id)$$
$$= (a -c) + i.(b-d) = (a -c, b-d)$$

ياد رکو تہ:

$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

مثال جيڪڏهن $z_1= - 7 + 2i$ ۽ $z_2= 4 -9i$ تہ $z_1- z_2$ جا ملهه لهو.

حل: مليل آهي تہ $z_2= 4 -9i = (4,-9)$ ۽ $z_1= - 7 + 2i = (-7,2)$

اسان کي خبر آهي تہ $\mathbf{z_1 - z_2 = (a - c, b - d)}$

$\therefore \quad z_1- z_2 = (- 7 - 4, 2+9)$

$\Rightarrow \quad z_1- z_2= (-11, 11)$

(iii) منجهيل عددن (Complex Numbers) جي ضرب

فرض ڪريو تہ $z_1 = a + ib$ ۽ $z_2 = c + id$ ڪي بہ منجهيل عدد آهن جنهن ۾ $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+ib)$$
$$= c(a+ib) + di(a+ib)$$
$$= ac + bci + adi + bdi^2$$
$$= (ac-bd) + i(ad+bc) = (ac-bd, ad+bc) \quad \therefore i^2 = -1$$

ياد رکو تہ:

$$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

مثال جيڪڏهن $z_1 = 3+4i = (3,4)$ ۽ $z_2 = -3-4i = (-3,-4)$ تہ $z_1 z_2$ جي ضرب معلوم ڪريو.

حل: مليل آهي تہ $z_2 = -3-4i = (-3,-4)$ ۽ $z_1 = 3+4i = (3,4)$

اسان کي خبر آهي تہ $z_1 z_2 = (ac-bd, ad+bd)$

$$\therefore \quad z_1 z_2 = (3,4)\cdot(-3,-4)$$
$$\Rightarrow \quad z_1 z_2 = (-9+16, -12-12) = (7,-24)$$

(iv) منجهيل عددن (Complex Numbers) جي وڊ

فرض ڪريو تہ $z_1 = a+ib = (a,b)$ ۽ $z_2 = c+id = (c,d)$, $z_2 \neq 0$, $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

تہ z_1 ۽ z_2 جي وڊ هن طرح لکبي.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id}$$
$$= \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id}$$
$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$
$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

ياد رکو تہ:

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

مثال 01 سادي صورت ۾ آڻيو. $\frac{2+3i}{4+2i}$

حل:

$$\frac{2+3i}{4+2i}$$

$$= \frac{2+3i}{4+2i} \times \frac{4-2i}{4-2i}$$

$$= \frac{(8+6)+i(12-4)}{(4)^2-(i2)^2}$$

$$= \frac{14+8i}{20}$$

$$= \frac{14}{20}+i\frac{8}{20}$$

$$= \frac{7}{10}+i\frac{4}{10}$$

$$= \left(\frac{7}{10},\frac{4}{10}\right)=\left(\frac{7}{10},\frac{2}{5}\right)$$ تنهنڪري سادي صورت ۾ آهي.

مثال 02 وندِ جو فارمولا استعمال ڪري منجهيل عدد (Complex Number) جي وندِ ڪريو.

$$(-1,3)\div(2,-4)$$

حل: فارمولا

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

$$\frac{(-1,3)}{(2,-4)}=\left(\frac{(-1)(2)+(3)(-4)}{2^2+(-4)^2},\frac{(3)(2)-(-1)(-4)}{2^2+(-4)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{-2-12}{4+16},\frac{6-4}{4+16}\right)$$

$$=\left(\frac{-14}{20},\frac{2}{20}\right)$$

$$=\left(\frac{-7}{10},\frac{1}{10}\right)$$

مشق 1.6

1. هيٺين منجهيل عددن (Complex Numbers) کي ٻڌايل نشانين عمل ذريعي جي حل ڪريو.

(i) $(3,2)+(9,3)$

(ii) $\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$

(iii) $\left(2xy,5y^2\right)-\left(\frac{1}{2}xy,6y^2\right)$

(iv) $(15,12)-(10,-9)$

(v) $\left(\frac{4}{5},\frac{8}{15}\right)-\left(\frac{4}{5},\frac{6}{10}\right)$

(vi) $(1,2)(1,-2)$

(vii) $(4,-5)(5,-4)$

(viii) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{4},\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$

(ix) $(3,-7)\div(3,2)$

(x) $(4,5)\div(2,-3)$

2. سادي صورت ۾ آڻي، پنهنجو جواب $a+ib$ جي صورت ۾ لکو.

(i) $\frac{-1}{1+i}$

(ii) $(1+i)^4$

(iii) $\frac{2-6i}{3-i}-\frac{4+i}{3+i}$

(iv) $\frac{1}{(2+3i)(1+i)}$

3. جيڪڏهن $z_1=-4+6i$ ۽ $z_2=2\frac{1}{2}-2i$، چڪاس ڪريو ته

(i) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

4. جيڪڏهن $z_1=2-5i$ ۽ $z_2=2+3i$، چڪاس ڪريو ته

(i) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

(ii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

مشق ورجايو 1

1. هيٺيان خال ڀريو.

(i) $\sqrt{5}$ جو ضربي ابتڙ آهي _____.

(ii) $Q\cup Q'=$ _____.

(iii) $\mathbb{R}$ ۾ جوڙلا ذاتي عنصر آهي _____.

(iv) 5+(6+7)=(5+6)+ _____.

(v) 3+(−3)= _____.

(vi) π _____ عدد آهي.

(vii) $\frac{22}{7}$ هڪ _____ عدد آهي.

(viii) $-3+5i$ جو گردان (Conjugate) _____ آهي.

(ix) $2i(3-i)$ ۾ حقيقي حصو _____ آهي.

(x) بن منجهيل عددن (Complex Numbers) (c,d) ۽ (a,b) جي ضرب جيڪا $(a,b).(c,d) =$ _____.

2. هيٺين بيانن کي غور سان پڙهو، درست بيانن لاءِ T تي گولو لڳايو. غلط بيانن لاءِ F تي گولو لڳايو.

(i) ضرب جي تحت $\mathbb{R}$ بندش واري حالت ۾ آهي. F / T

(ii) جيڪڏهن $x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$ F / T

(iii) $\forall x,y,z \in \quad ,x(y-z)=xy-xz$ F / T

(iv) هر بن تصوراتي عددن جي ضرب، حقيقي آهي. F / T

(v) بن حقيقي عددن جو جوڙ هڪ حقيقي عدد آهي. F / T

3. درست جواب تي (✓) ٽڪ جو نشان لڳايو.

(i) $\sqrt{5}$ جو جوڙ جو ابتڙ آهي.

(a) $-\sqrt{5}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (c) $\sqrt{-5}$ (d) -5

(ii) $(5i).(-2i) =$ _____.

(a) -10 (b) 10 (c) $-10i$ (d) $10i$

(iii) $3(5+7)=3.5+3.7$ ، خاصيت جو نالو آهي.

(a) متاواري (b) سنگت (c) ورهاست (d) بندش

(iv) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-2} =$ _____.

(a) 2 (b) -2 (c) $2i$ (d) $-2i$

خلاصو

- حقيقي عددن جو سيٽ، ناطق ۽ غيرناطق جي سيٽ جو ميلاپ آهي جيئن $\mathbb{R}=Q\cup Q'$
- نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اٽپورن جا بہ قسم آهن جيڪي نہ ورجندڙ ڏهائي اٽپور ۽ ورجندڙ ڏهائي اٽپور
- حقيقي عددن جون "+" ۽ "×" جي لحاظ سان خاصيتون

(i) بندش واري خاصيت

$a+b\in\mathbb{R}$ ۽ $ab\in\mathbb{R}\ ,\forall a,b\in\mathbb{R}$

(ii) سنگت واري خاصيت

$a+(b+c)=(a+b)+c$ ۽ $a(bc)=(ab)c,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$

(iii) متاواري خاصيت

$a+b=b+a$ ۽ $ab=ba,\forall a,b\in\mathbb{R}$

(iv) ذاتي عنصرن واري خاصيت (Identities Property)

$a+0=a=0+a$ ۽ $a\cdot 1=a=1\cdot a\ \ \forall a\in\mathbb{R}$

(v) ورهائجن واري خاصيت

$a(b+c)=ab+ac$ يا $(b+c)a=ba+ca,\forall a,b,c\in\mathbb{R}$

(vi) ابتڙن واري خاصيت (Inverses Property)

$a+(-a)=0=-a+a$ ۽ $a\times\frac{1}{a}=1=\frac{1}{a}\times 1,\forall a,\in\mathbb{R}\ \wedge a\neq 0$

- عددي ليڪ: اهڙي ليڪ جيڪا حقيقي عددن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ استعمال ٿئي ان کي عددي ليڪ چئبو آهي.

- مول ۽ مول جو پايو: $\sqrt[n]{a}$ ۾ $\sqrt{\ }$ کي مول جي نشاني ۽ a کي مول جو پايو چئبو آهي.

- سگهن جا قاعدا:

(i) جيڪڏهن $a^x \times a^y = a^{x+y}$ تہ $x, y \in Z^+$ ۽ $a, b \in \mathbb{R}$

(ii) جيڪڏهن $y \in Z^+$ x ۽ $a \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

(iii) $n \in Z^+$ ۽ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

(iv) $n \in Z^+$ ۽ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ جڏهن تہ $b \neq 0$

- منجهيل عدد (Complex Numbers): $z = a + ib = (a, b)$ کي منجهيل عدد چئبو آهي.
جڏهن تہ $'a'$ حقيقي حصو ۽ $'b'$ تصوراتي حصو آهي z جو ۽ $i = \sqrt{-1}$

- بن منجهيل عددن (Complex Numbers) تي عمل (نشانيون) جڏهن $z_2 = c + id$ ۽ $z_1 = a + ib$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + i\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

يونٽ 2

لاگرٿم

LOGARITHMS

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- عدد کي سائنسي لکڻي جي معياري صورت ۾ ظاهر ڪن ۽ برڪس.
- حقيقي عدد جو لا گرٿم جنهن جو بنياد a (Base) ۽جنهن تي ڪجهہ سگهہ (Exponent) ڏيڻ سان ڪو عدد ملي ان جي وصف بيان ڪرڻ (i.e., $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x,\ a > 0,\ y > 0$ and $a \neq 1$)
- عام لاگرٿم جي وصف بيان ڪري عدد جي لاگرٿم جوگڻ ۽ مئنٽيسا بيان ڪري سگهن.
- عددن جو لاگرٿم معلوم ڪرڻ لاءِ جدول استعمال ڪري سگهن.
- ضد لاگرٿم جو تصور ڏين ۽ جدول (Table) کي استعمال ڪندي ڪنهن عدد جو ضد لاگرٿم معلوم ڪن.
- ڪئلڪيوليٽر جي استعمال سان لاگرٿم ۽ ضد لاگرٿم معلوم ڪن.
- عام لاگرٿم ۽ قدرتي لاگرٿم ۾ فرق بيان ڪري سگهن
- $\log_{10} y = \log y$ يا صرف $\log y$ ۽ $\log_e(y)$ کي لکن

  (i) $\log_{10} y = x \Leftrightarrow y = 10^x$

  (ii) $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$.
- لاگرٿم جا هيٺيان قاعدا ثابت ڪريو.

  (i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

  (ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$,

  (iii) $\log_a m^n = n\log_a m$,

  (iv) $\log_a m . \log_m n = \log_a n$.
- لاگرٿم جا هي قاعدا استعمال ڪري، ضرب، وند ۽ سگهن جي ڊگهن طريقن کي جوڙ ۽ ڪٽ وغيره جي آسان طريقن ۾ تبديل ڪن

تعارف:

مسلمان رياضي دان ابو محمد موسيٰ الخوارزمي لاگرٿم روشناس ڪرايو. ان کان پوءِ سترهين صدي عيسويءَ ۾ جان نيپيئر انهيءَ ۾ وڌيڪ سڌارو آندو ۽ سندس جدولون تيار ڪيون. انهن جدولن ۾ عدد e کي بنياد بنايو ويو. e هڪ غيرناطق عدد آهي جنهن جو ملهه قريبا ..... 2.71828 آهي. 1631ع ۾ پروفيسر هينري ڊرگس 10 کي بنياد بڻائي لاگرٿم جون جدولون تيار ڪيون.

لاگرٿم جي استعمال سان حساب ڪتاب آسان ٿي پيو ۽ ان جو استعمال وڌيڪ ڪارآمد ٿي ويو.

٢/١ سائنسي لکڻي (Scientific Notation)

سائنسي لکڻي، تمام وڏن ۽ تمام ننڍن عددن کي آسانيءَ سان لکڻ جو هڪ خاص نمونو آهي.

2.1.1 عدد کي سائنسي لکڻي جي معياري صورت ۾ ظاهر ڪرڻ ۽ برڪس.

سائنس ۽ ٽيڪنالاجي جي دنيا ۾ اسان جو واسطو تمام وڏن ۽ ننڍن عددن، مقدارن، سان پوندو آهي. ڌرتي کان سج جو مفاصلو تقريبا 150,000,000 ڪلومينٽر آهي ۽ هئڊروجن ائٽم جو وزن (0.000,000,000,000,000,000,000,000,001,7) گرام آهي اهڙي قسم جي عددن کي عام لکڻي (معياري لکڻي) ۾ هرهڪ لاءِ لکڻ تمام ڏکيو آهي ۽ وقت به گهڻو گهربل آهي. سائنسدانن تمام ننڍن عددن ۽ تمام وڏن عددن کي لکڻ لاءِ مناسب ۽ آسان طريقو روشناس ڪرايو آهي جنهن کي سائنسي لکڻي چئبو آهي.

مٿي ڏنل حصي 2.1.1 ۾ ڏيکاريل عددن کي آساني سان سائنسي لکڻي ۾ ترتيبوار 1.5×10^{8} km ۽ 1.7×10^{-27}g لکبو.

هيٺيان مثال سائنسي لکڻي کي سمجهڻ لاءِ مَدَد فراهم ڪندا.

مثال 01

هيٺين عددن کي سائنسي لکڻي ۾ لکو.

(i) 400900 (ii) 0.0000075

حل: **(i) 400900**

ڏنل عدد ۾، ڏهائي ايڪي واري عَدَد کان پوءِ آهي، تنهنڪري ڏهائي جي نشاني کي ساڄي کان کاٻي طرف پنجن عددن تائين ٽپايو ۽ $400900 = 4.009 \times 10^5$ لکو جيڪو گهربل سائنسي لکڻي ۾ آهي.

(ii) 0.0000075

ڏنل ڏهائي عدد ۾ ڏهائي جو نشان کان پوءِ 7 انگ آهن جنهن ۾ 7 پهريون غير ٻڙي عدد آهي. تنهنڪري ڏهائي نشان کي 6 عددن تائين کاٻي کان ساڄي طرف ٽپايو ۽ لکو $0.0000075 = 7.5 \times 10^{-6}$، جيڪو ڏنل عدد جي گهربل سائنسي لکڻي ۾ آهي.

مثال 02

هيٺين کي عام لکڻي ۾ لکو

(i) 2.76×10^6 (ii) 5.24×10^{-4}

حل: (i) 2.76×10^6

10 جي سگهه 6 آهي تنهنڪري اسان ڏهائي نشان کي 6 درجن تائين کاٻي کان ساڄي طرف ٽپائيندا سين، پر مليل انگ ۾ آهن ان ڪري اسان چار ٻڙيون ساڄي طرف لکي پوءِ ڏهائي ڏيندا سين يعني $2.76 \times 10^6 = 2760000$، جيڪو گهربل عام لکڻي وارو عدد آهي.

حل: (ii) 5.24×10^{-4}

10 جي سگهه ڪاٽو 4 آهي تنهنڪري اسان ڏهائي نشان کي 4 درجن تائين ساڄي کان کاٻي طرف ٽپائيندا سين ، پر مليل انگ هڪ آهي. ان ڪري اسان ٽي ٻڙيون کاٻي طرف وڌائي پوءِ ڏهائي ڏيندا سين ، يعني جيڪو گهربل عام لکڻي وارو عدد آهي. $5.24 \times 10^{-4} = 0.000524$

مشق 2.1

1. هيٺين عددن مان هر هڪ کي سائنسي لکڻي ۾ ظاهر ڪريو.

(i)	9700	(ii)	4,980,000	(iii)	96,000,000
(iv)	4169	(v)	84,000	(vi)	0.00643
(vii)	0.00643	(viii)	0.0074	(ix)	0.0074
(x)	275,000				

2. هيٺين عددن کي عام لکڻي (معياري نشاني) ۾ ظاهر ڪريو.

(i)	7×10^4	(ii)	8.072×10^{-10}	(iii)	6.018×10^6
(iv)	7.865×10^8	(v)	2.05×10^{-4}	(vi)	7.25×10^{10}
(vii)	4.502×10^6	(viii)	2.865×10^{-8}	(ix)	3.056×10^6

2.2 لاگرٿم

لاگرٿم ضرب / وند تي مشتمل منجهيل حسابن کي سادي صورت ۾ لکڻ جو طريقو آهي.

2.2.1 حقيقي عدد جو لاگرٿم جنهن جو بنياد a (Base) ۽جنهن تي ڪجهه سگهه (Exponent) ڏيڻ سان ڪو عدد ملي ان جي وصف بيان ڪرڻ (i.e., $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x,\ a > 0,\ y > 0$ and $a \neq 1$)

جيڪڏهن $a^x = y$ تہ y جو لاگرٿم a بنياد تي x کي چئبو هي ۽ علامتن ۾ لکنداسين $\log_a y = x$جڏهن تہ $a \neq 1$ ۽ $a > 0,\ y > 0$

تنهنڪري $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x$

اهو ظاهر ٿئي ٿو تہ $a^x = y$ سگهہ واري صورت ۽ $\log_a y = x$ لاگرٿمي صورت ۾ آهن.

هيٺيان مثال سگهہ ۽ لاگرٿمي صورت جي تصور کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 $2^{-4} = \frac{1}{16}$ کي لاگرٿمي صورت ۾ لکو.

حل: $2^{-4} = \frac{1}{16} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{16} = -4$

مثال 02 $\log_3 81 = 4$ کي سگهہ واري صورت ۾ لکو.

حل: $\log_3 81 = 4 \Rightarrow 3^4 = 81$

مثال 03 $\log_4 2$جو ملهہ لهو.

حل: فرض ڪريو تہ $x = \log_4 2$

سگهہ واري صورت آهي

$\therefore \quad 4^x = 2$

$\Rightarrow \quad (2)^{2x} = 2^1$

بنهي طرف سگهن کي هڪبئي جي برابر ڪرڻ سان.

$$2x = 1$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

مثال 04 x جو ملهه لهو جيڪڏهن $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

حل: $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

سگهه واري صورت آهي.

$$\Rightarrow \quad = (x)^{\frac{3}{2}} \quad 8$$
$$\Rightarrow \quad = (x)^{\frac{3}{2}} \quad 2^3$$

بنهي طرف $\frac{2}{3}$ سگهه ڏيڻ سان

$$\Rightarrow \quad = (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} \quad (2^3)^{\frac{2}{3}}$$
$$\Rightarrow \quad = \quad x \quad 2^2$$
$$\Rightarrow \quad = \quad x \quad 4$$

مثال 05 x جو ملهه لهو جيڪڏهن $\log_{64} x = \frac{-2}{3}$

حل:

سگهه واري صورت آهي.

$$(64)^{\frac{-2}{3}} = x \quad \Rightarrow (4^3x)^{\frac{-2}{3}} = x$$
$$4^{-2} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4^2} = x$$
$$\frac{1}{16} = x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{16}$$

مشق 2.2

.1 هيٺين کي لاگرٿمي صورت ۾ لکو.

(i) $7^3 = 343$ (ii) $3^{-4} = \frac{1}{81}$

(iii) $10^{-3} = 0.001$ (iv) $\sqrt[3]{m}^{\,2} = 1$

.2 هيٺين کي سگهه واري صورت ۾ لکو.

(i) $\log_{27} 81 = \frac{4}{3}$ (ii) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

(iii) $\log_{10} 1 = 0$ (iv) $\log_{10}(0.01) = -2$

.3 هيٺين مان نامعلوم لهو.

(i) $\log_{32} x = \frac{1}{2}$ (ii) $\log_a 3 = \frac{1}{2}$ (iii) $\log_{\sqrt{5}} 25 = y$

(iv) $\log_4 x = \frac{3}{2}$ (v) $\log_{10} 100 = y$ (vi) $\log_a 64 = 3$

(vii) $\log_a 1 = 0$ (viii) $\log_{55} 55 = y$ (xi) $\log_{64} 8 = \frac{x}{2}$

2.2.2 عام لاگرٿم جي وصف لکو، عدد جي لاگرٿم جوگڻ ۽ مئنٽيسا جي وصف لکو.

عام لاگرٿم

عام لاگرٿم جو بنياد 10 هوندو آهي. ان کي مصنوعي لاگرٿم يا برگز (Briggs Logarithms) پڻ سڏبو آهي.

عام لاگرٿم کي $\log_{10} y$ يا صرف $\log y$ سان لکبو آهي.

$$\log y = x \Leftrightarrow y = 10^x$$

عدد جي لاگرٿم جا گڻ (Characteristics) ۽ مئنٽيسا (Mantissa)

ڪنهن عدد جو لاگرٿم ٻن حصن تي مشتمل هوندو آهي. هڪڙو سڄو عددي حصو ۽ ٻيو ڏهائي يا اڻپور حصو. سڄي عددي حصي کي گڻ (Characteristics) ۽ ڏهائي حصي کي مئنٽيسا (Mantissa) چئبو آهي.

لاگرٿم جوگڻ واڌو (Positive) يا ڪاٽو (Negative) ٿي سگهي ٿو، پر مئنٽيسا هميشه واڌو ٿيندو آهي سائنسي لکڻي ۾ 10 جي سگهه کي گڻ ۽ مئنٽيسا معلوم ڪرڻ لاءِ لاگرٿم جدول استعمال ڪبي جيڪا اسان اڳيان بحث ڪنداسين.

مثال 01 هيٺين عددن جا گڻ معلوم ڪريو.

0.765, 0.04, 0.004567, 2.134, 23.56 and 3456.

نمبر شمار	عدد	سائنسي لکڻي	گڻ
1	0.765	7.65×10^{-1}	$\bar{1}$ يا -1
2	0.04	4.0×10^{-2}	$\bar{2}$ يا -2
3	0.0045467	4.5467×10^{-3}	$\bar{3}$ يا -3
4	2.134	2.134×10^{0}	0
5	23.56	2.356×10^{1}	1
6	3456	3.456×10^{3}	3

اسان مشاهدو ڪيو ٿا:

- 1 کان وڏي عدد جي لاگرٿم جو گڻ هميشه غير ڪاٽو ٿيندو آهي.
- 1 کان ننڍي عدد جي لاگرٿم جو گڻ هميشه ڪاٽو ٿيندو آهي.

مئنٽيسا:

مئنٽيسا معلوم ڪرڻ لاءِ لاگرٿم جدول استعمال ڪبي آهي هي جدول ڏهائي جي 7 انگن تائين لاگرٿم معلوم ڪرڻ لاءِ ناهي ويئي آهي. پَر عملي طرح هن سطح تي عددن جو درست لاگرٿم معلوم ڪرڻ لاءِ چئن انگن واري لاگرٿم جدول ڪارگر آهي.

> **چا توهان سمجهيو؟**
>
> لاگرٿم جي ڪاٽو گڻ کي -3، -2، -1 جي بدران ترتيبوار لکبو آهي. $\bar{1}$، $\bar{2}$، $\bar{3}$ جڏهن مئنٽيسا ڪاٽو هجي تہ ان کي واڌو ۾ تبديل ڪبو چاڪاڻ تہ مئنٽيسا هميشہ واڌو هوندو آهي.

2.2.3 عددن جو لاگرٿم معلوم ڪرڻ لاءِ جدول جو استعمال ڪرڻ

هيٺيان مثال جدول جي استعمال سان لاگرٿم معلوم ڪرڻ لاءِ مددگار ٿيندا.

مثال 01 هيٺ ڏنل لاگرٿم عددن جو مئنٽيسا معلوم ڪريو.

(i) log (43.254) (ii) log (0.002347).

حل: (i) log (43.254)

قدم 1: ڏهائي کي غور ۾ آڻڻ بنا، 4 انگن تي مشتمل عدد ڪٽو جيڪو 4325 آهي.

قدم 2: لاگرٿم جدول ۾ ڪابي پاسي ڪان پهرئين ڪالم ۾ عدد 43 تلاش ڪريو.

قدم 3: ساڳي طرح ٽيون انگ "2" ڪٽي پهرئين ڪالم جي عدد 48 جي افقي ليڪ سان "2" واري ڪالم مان عدد 6355 لکو.

قدم 4: وري ساڳي طرح سان چوٿون انگ "5" کي فرق واري ڪالم (mean Difference)۾ پهرئين ڪالم جي 43 واري افقي ليڪ سان تلاش ڪريو جيڪو عدد آهي "5".

قدم 5: عدد "5" کي 6355 ۾ جوڙ ڪريو، جيڪو 0.6360 ٿيندو اهو عدد (43.25) جو مئنٽيسا آهي.

Logarithm Table

											Mean Differences								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0017	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	2560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	6	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7

Logarithm Table

											Mean Differences								
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	3	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	3	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	882	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

(ii) log (0.002347)

حل: log (0.002347) ۾ ڏهائي ۽ ٻڙين کي غور ۾ آڻڻ بنا چئن انگن تي مشتمل عدد 2347 کڻو. پهرئين ڪالم جي 23 قطار تي نشان ڏيو، عدد 4 کي چوٿين ڪالم ۽ 23 قطار جي ڪاٽ واري رقم 3692 کڻو. آخري عدد 7 کي فرق واري ڪالم (Mean Difference) ۾ تلاش ڪريو جيڪو 13 آهي. هن عدد کي 3692 ۾ جوڙ ڪريو جنهن جو حاصل 3705 ٿيندو. تنهنڪري گهربل مئنٽيسا ٿيندو.

مثال 02

هيٺين عددن جو لاگرٿم معلوم ڪريو.

(i) 278.27 (ii) 0.07058

حل: (i) فرض ڪريو تہ $x = 278.27$

ٻنهي پاسي لاگرٿم ڏيڻ سان

$\therefore$ $\text{Log}\,x = \log(278.27)$

قدم 1: عدد کي 4 انگن تائين کڻو جيڪو ٿيندو 278.3

قدم 2: $278.3 = 2.783 \times 10^2$ تنهنڪري گڻ آهي 2

قدم 3: مئنٽيسا معلوم ڪرڻ لاءِ ڏهائي تي غور ڪرڻ بنا عدد ٿيندو 2783 لاگرٿم جي جدول استعمال ڪري مئنٽيسا حاصل ڪريو، جيڪو 0.4445 ٿيندو.

قدم 4: گڻ ۽ مئنٽيسا کي جوڙ ڪريو جيڪو ٿيندو

$\log x = 2.4445$

حل: (ii) فرض ڪريو تہ $x = 0.07058$

قدم 1: ڏهائي ۽ ٻڙي تي غور ڪرڻ بنا چئن انگن وارو عدد ٿيندو 7058

قدم 2: مليل عدد کي سائنسي لکڻي ۾ تبديل ڪريو تہ گڻ ٿيندو. 7058×10^{-2} -2 يا $\bar{2}$

قدم 3: ڏهائي کي غور ۾ آڻڻ بنا 7058 جو مئنٽيسا معلوم ڪريو. لاگرٿم جدول استعمال ڪريو تہ مئنٽيسا ٿيندو 0.8487

قدم 4: گڻ ۽ مئنٽيسا کي جوڙ ڪريو تہ حاصل ٿيندو

$\text{Log}\,x = \log(0.07058) = \bar{2}.8487$

ياد رکو تہ

ساڳي ترتيب واري اهم (Significant) عددن جي لاگرٿم جو مئنٽيسا بہ ساڳيو ٿيندو.

مثال طور: 0.004576, 0.4576, 0.04576, 45.76 وغيره جو مئنٽيسا بہ ساڳيو آهي.

مشق 2.3

1. هيٺين لاگرٿم جو گڻ ۽ مئنٽيسا معلوم ڪريو.

(i)	8	(ii)	5054	(iii)	9.992
(vi)	765.3	(v)	0.00329	(vi)	0.0000300

2. هيٺين عددن جو لاگرٿم معلوم ڪريو.

(i)	9	(ii)	55.56	(iii)	29.592
(vi)	405.3	(v)	0.00469	(vi)	0.000076

3. جيڪڏهن **log 31.09=1.4926**، تہ لاگرٿم جدول استعمال ڪرڻ کان بغير هنن جو ملهہ معلوم ڪريو.

(i)	log 3.109	(ii)	log 310.9	(iii)	log 0.003109
(iv)	log 3109.0	(v)	log 310.942	(vi)	log 310926

2.2.4 ضد لاگرٿم جو تصور ڏيو ۽ جدول استعمال ڪري عددن جو ضد لاگرٿم معلوم ڪريو.

جيڪڏهن $\log x = y$، تہ x کي y جو ضد لاگرٿم چئبو آهي ۽ ان کي لکبو $x = \text{antilog } y$ ، جيڪڏهن x جو عام لاگرٿم y آهي جيئن جيڪڏهن $\log x = y$ تہ x معلوم ڪرڻ لاءِ ضد لاگرٿم جون جدولون هيٺ ڏنل قاعدن مطابق استعمال ڪندا سين.

قاعدو1: جيڪڏهن گڻ واڌو n آهي تہ پوءِ ضد لاگرٿم ۾ n+1 انگ سجهي حصي ۾ هوندو.

قاعدو2: جيڪڏهن گڻ ڪاٽو n آهي تہ پوءِ ضد لاگرٿم ۾ n-1 ، ٻڙيون ڏهائي جي نشاني ڪان پوءِ هونديون.

ضد لاگرٿم جو طريقو هيٺين مثالن سان واضح ڪيل آهي.

Antilogarithm Table

											Mean Differences								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0000	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	1	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2

Antilogarithm Table

											Mean Differences								
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1821	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6

Antilogarithm Table

											Mean Differences								
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2970	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	2	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4374	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	4070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6415	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14

Antilogarithm Table

											Mean Differences								
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7196	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8275	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	####	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

مثال 01 عدد معلوم ڪريو جنهن جو لاگرٿم آهي.

(i) 1.3247 (ii) $\bar{2}.1324$

حل(i) : فرض ڪريو تہ x = anti log (1.3247) هتي Log x = 1.3247

قدم1: هاڻ گڻ = 1 ۽ مئنٽيسا = 0.3247

قدم2: ضد لاگرٿم جدول ۾ 32. واري قطار کي ظاهر ڪريو.

قدم3: ٽيئن انگ کي جيڪو "4" آهي 32 واري قطار ۾ چوٿين ڪالم جي ڪاٽ سان معلوم ڪريو جيڪو.2109 آهي.

قدم4: وري فرق واري ستين ڪالم ۾ انگ تلاش ڪريو جيڪو 3 آهي

قدم5: 3 کي 2109 ۾ جوڙ ڪريو جيڪو ٿيندو 2112 .

قدم6: جيئن تہ گڻ 1 آهي تنهنڪري ڏهائي ٻن درجن کان پوءِ کاٻي کان ساڄي طرف ڏيو تہ گهربل ضد لاگرٿم ٿيندو 21.12 .

حل(ii): فرض ڪريو تہ $x = \text{antilog}(\bar{2}.1324)$، هتي $\text{Log}\ \bar{x} = \bar{2}.1324$

هتي گڻ $\bar{2}$ ۽ مئنٽيسا = 0.1324

هاڻ ضد لاگرٿم جدول ۾ 13. واري قطار کي ظاهر ڪريو ۽ ڪالم 2 جي ڪاٽ سان ملندو 1355 ۽ چوٿين ڪالم جو فرق آهي 1 تنهنڪري اهو ٿيندو 1356 = 1 + 1355 جيئن تہ گڻ آهي 2- تنهنڪري گهربل عدد آهي 0.01356

2.2.5 ڪئلڪيوليٽر جي استعمال سان لاگرٿم ۽ ضد لاگرٿم معلوم ڪرڻ.

مثال1: ڪئلڪيوليٽر جو استعمال ڪري log (41230) جي قيمت معلوم ڪريو.

حل: فرض ڪريو تہ x = log 41230

اسان جو پهريو قدم آهي log بٽڻ کي دٻايو هاڻ (41230) رقم لکو.

ڏنگين بند ڪري "=" واري بٽڻ کي دٻايو

اسان ڏسنداسين تہ $\log(41230) = 4.615213335$

تنهنڪري $\log(41230) = 4.615213335$

مثال 02 ڪئلڪيوليٽر استعمال ڪري $\text{antilog}(4.615213335)$ جو ملهہ لهو.

حل: اسان ضد لاگرٿم بٽڻ استعمال ڪنداسين.

(i) shift key يا 2nd function بٽڻ کي دٻايو.

(ii) log بٽڻ کي دٻايو.

(iii) 4.615213335 ڏنگين کي گڏ ڪري لکو.

(iv) Enter بٽڻ کي دٻايو

ضد لاگرٿم جو جواب $\text{antilog}(4.615213335) = 41230.00002$

2.3 عام لاگرٿم ۽ قدرتي لاگرٿم ۾ فرق معلوم ڪرڻ.

عام لاگرٿم جو بنياد "10" هوندو آهي، ۽ ان کي $\log_{10}(x)$ جي بدران $\log(x)$ سان ظاهر ڪيو ويندو آهي. جڏهن تہ قدرتي لاگرٿم جو بنياد "e" هوندو آهي(e هڪ غيرناطق عدد آهي جنهن جي قيمت 2.718281... آهي) ۽ ان کي $\log_e(x)$ جي بدران $\ln x$ سان ظاهر ڪيو ويندو آهي.

مشق 2.4

1. جدول استعمال ڪري عدد معلوم ڪريو جن جا عام لاگرٿم هيٺ ڏجن ٿا.

(i) 0.35749 (ii) 3.56721 (iii) $\bar{1}.7427$

2. ڪئلڪيوليٽر استعمال ڪري هيٺين عددن جا لاگرٿم معلوم ڪريو.

(i) 900 (ii) 45.54 (iii) 36582

(vi) 826.3 (v) 0.00851 (vi) 0.000097

3. ڪئلڪيوليٽر استعمال ڪري هيٺين مان x جو ملهہ معلوم ڪريو.

(i) $\log x = 1.7505$ (ii) $\log x = 0.6609$ (iii) $\log x = 2.2132$

(iv) $\log x = 1.9009$ (v) $\log x = 0.0009$ (vi) $\log x = 3.8505$

(vii) $\log x = \bar{1}.6132$ (viii) $\log x = \bar{2}.7777$ (ix) $\log x = \bar{3}.3465$

(x) $\log x = \bar{4}.8455$ (xi) $\log x = \bar{6}.7835$ (xii) $\log x = \bar{9}.6875$

(xiii) $\log x = 3.4800$ (xiv) $\log x = \bar{7}.0038$ (xv) $\log x = \bar{9}.687$

2.4 لاگرٿم جا قاعدا (Laws of Logarithms)

2.4.1 هيٺيان لاگرٿم جا قاعدا ثابت ڪريو.

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a m^n = n \log_a m$

(iv) $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$ ۽ $m, n, a, a > 0,\ a \neq 1,$

ثابتي: فرض ڪريو تہ $\log_a m = x$ ۽ $\log_a n = y$ تہ پوءِ

$m = a^x$ ۽ $n = a^y$

هاڻ $mn = a^x \cdot a^y$

(سگهن جو قاعدو) $mn = a^{x+y}$

سگهه واري صورت کي لاگرٿم واري صورت ۾ تبديل ڪرڻ سان

$\log_a (mn) = x+y$

تنهنڪري $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

بن عددن جي ضرب اپت جو لاگرٿم انهن جي الڳ الڳ لاگرٿم جي جوڙ برابر آهي.

(ii) حقيقي عددن m, n, a ۽ $a > 0, a \neq 1$ لاءِ

$\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

ثابتي: فرض ڪريو تہ $\log_a n = y$ ۽ $\log_a m = x$

تہ پوءِ $m = a^x$ ۽ $n = a^y$

هاڻ $\dfrac{m}{n} = \dfrac{a^x}{a^y}$

$\dfrac{m}{n} = a^{x-y}$

سگهه واري صورت کي لاگرٿم واري صورت ۾ تبديل ڪرڻ سان

$\Rightarrow \quad \log_a \dfrac{m}{n} = x-y$

تنهنڪري $\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

بن عددن جي وندِ اپت جو لاگرٿم،انهن جي الڳ الڳ لاگرٿم جي تفاوت برابر آهي.

(iii) حقيقي عددن m, n, a ۽ $a > 0, a \neq 1$ لاءِ

$\log_a m^n = n \log_a m$

ثابتي: فرض ڪريو تہ $\log_a m = x$

تہ پوءِ $m = a^x$

هاڻ $m^n = (a^x)^m$

$m^n = a^{nx}$

سگهه واري صورت کي لاگرٿم واري صورت ۾ تبديل ڪرڻ سان

$\Rightarrow \quad \log_a m^n = nx$

تنهنڪري $\log_a m^n = n\log_a m$

عددن جي n سگهه جو لاگرٿم،انهيءَ عدد جي لاگرٿم کي n سان ضرب جي برابر آهي.

(iv) بنيادن جي بدلائڻ واري خاصيت

حقيقي عددن m, n, a ۽ $a > 0, a \neq 1$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

ثابتي: فرض ڪريو تہ $\log_a n = x$

تہ پوءِ $n = a^x$

بنياد b تي ٻنهي طرف لاگرٿم وٺڻ سان

$\log_b n = \log_b a^x$

$\log_b n = x\log_b a \quad \therefore \quad \log_b m^n = n\log_b m$

$$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

تنهنڪري $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$

مثال 01 $\log_a(2bc)$ کي لاگرٿم جي جوڙ ۾ ظاهر ڪريو.

لاگرٿم جو قاعدو استعمال ڪرڻ سان

$\log_a(2bc) = \log_a 2 + \log_a b + \log_a c,$

لاگرٿم جي جوڙ ۾ ظاهر ڪيو ويو.

مثال 02 $\log(52.5 \times 63 \times 4.567)$ کي لاگرٿم جي جوڙ ۾ ظاهر ڪريو.

حل: لاگرٿم جو قاعدو استعمال ڪرڻ سان

$\log(52.5\times63\times4.567) = \log 52.5 + \log 63 + \log 4.567$

لاگرٿم جي جوڙ ۾ ظاهر ڪيو ويو.

نوٽ ڪريو ته

(i) $\log_a(mn) \neq \log_a m \times \log_a n$

(ii) $\log_a m + \log_a n \neq \log_a (m+n)$

مثال 03 $\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$ کي لاگرٿم تفاوت ۾ ظاهر ڪريو.

حل: لاگرٿم جي تفاوت جو قاعدو استعمال ڪريو ته $\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$ ٿيندو

$$\log\left(\frac{213.1}{34.22}\right) = \log 213.1 - \log 34.22.$$

لاگرٿم جي تفاوت ۾ ظاهر ڪيوويو.

مثال 04 $\log_a 2^x$ کي ضرب واري صورت ۾ ظاهر ڪريو.

حل: اسان کي خبر آهي ته $\log_a m^n = n\log_a m$

$$\therefore \log_a 2^x = x\log_a 2$$

مشق 2.5

1. هيٺين لاگرٿم کي $\log_a x, \log_a y$ ۽ $\log_a z$ جي رقمن جي صورت ۾ لکو.

(i) $\log_a \frac{x^3 y}{z^2}$ (ii) $\log_a \sqrt{xy^2 z}$ (iii) $\log_a\left(\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}} \div \sqrt{y^3\sqrt{x}}\right)$

(iv) $\log_a\left\{\left(\frac{yz^{-2}}{y^{-4}z^3}\right)^{-3} \div \left(\frac{y^{-1}z}{y^2z^{-3}}\right)^5\right\}$ (v) $\log_a \frac{\sqrt[6]{xy^{-1}z^{-2}}}{(x^{-1}y^{-2}z^{-3})^{\frac{1}{6}}}$ (vi) $\log_a \frac{x\sqrt{y^3}}{\sqrt[3]{z^2x^5}}$

2. هيٺين کي هڪ لاگرٿم جي صورت ۾ گهٽايو.

(i) $\log_a 20 - \log_a 15 + \frac{1}{2}\log_a \frac{9}{2}$

(ii) $\frac{1}{3}\log_a(x-1)^3 + \frac{10}{9}\log_a(x+1) - \frac{1}{9}\log_a(x+1)$

(iii) $\log x - 2\log x + 3\log(x+1) - \log(x^2-1)$.

3. جيڪڏهن $\log 3 = 0.4771$, $\log 2 = 0.3010$ ۽ $\log 5 = 0.6990$ تہ جدول استعمال ڪرڻ کان بغير هيٺين جون قيمتون معلوم ڪريو.

(i) $\log 15$ (ii) $\log 64$ (iii) $\log \sqrt{5\times 2}$ (iv) $\log 48$

(v) $\log \sqrt{18}$ (vi) $\log 30$ (vii) $\log \frac{8}{3}$ (viii) $\log \frac{5}{\sqrt{3}}$

4. هيٺيان ثابت ڪريو.

(i) $\log_b m\times \log_m a = \log_b a$ (ii) $\log_a b\times \log_c a = \log_c b$

(iii) $\log_b a.\log_c b\frac{1}{\log_c a} = 1$ (iv) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

5. هيٺين جي چڪاس ڪريو.

(i) $\log_5 7\times \log_7 25 = 2$ (ii) $\log_3 2\times \log_2 81 = 4$

(iii) $\log_5 343\times \log_7 25 = 6$ (iv) $\log_6 16\times \log_2 216 = 12$

2.5 لاگرٿم جي قاعدن جا استعمال

2.5.1 لاگرٿم جي قاعدن کي استعمال ڪري، ضرب وندڙ ۽ سگهن جي ڊگهن طريقن کي جوڙ ، ڪٽ وغيره جي آسان طريقن ۾ تبديل ڪريو.

هيٺيان مثال لاگرٿم جي قاعدن جي استعمال کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 لاگرٿم استعمال ڪري $(8.573)(28.74)$ جي قيمت معلوم ڪريو.

حل: فرض ڪريو تہ $x = (8.573)(28.74)$

ٻنهي طرف لاگرٿم وٺڻ سان اسان کي ملندو

$$\therefore \quad \log x = \log(8.573)(28.74)$$

$$\Rightarrow \quad \log x = \log(8.573) + \log(28.74)$$

$$\Rightarrow \quad \log x = 0.9332 + 1.4585$$

$$\Rightarrow \quad \log x = 2.3917$$

$$\therefore \quad x = \text{antilog}(2.3917)$$

تنهنڪري $x = 246.4$

مثال 02: لاگرٿم جي مدد سان $\frac{213.1}{34.22}$ جو ملهه معلوم ڪريو.

حل: فرض ڪريو تو $x = \frac{213.1}{34.22}$

ٻنهي طرف لاگرٿم وٺڻ سان اسان کي ملندو

$$\log x = \log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \log x = \log\left(\frac{213.1}{34.22}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \log x = \log 213.1 - \log 34.22, \quad \left(\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b\right)$$

لاگرٿم جدول کي استعمال ڪرڻ سان

$$\log x = 2.3286 - 1.5343 = 0.7943$$

$$\Rightarrow \quad \log x = 0.7943,$$

ضد لاگرٿم ڪرڻ سان اسان کي ملندو

$$x = \text{antilog}\ (0.7943)$$

ضد لاگرٿم جي جدول استعمال ڪرڻ سان اسان کي ملندو $x = 6.227$ (ڳڻ=0 ۽ 0.7943= مئنٽيسا

تہ $\frac{213.1}{34.22}$ جو گهربل ملهه مليو 6.227

مثال 03 لاگرٿم جا قاعدا استعمال ڪري $\sqrt{\frac{3.41 \times 37.92}{2.34}}$ جو ملهه لهو.

حل: فرض ڪريو تہ $x = \sqrt{\frac{3.41 \times 37.92}{2.34}}$

ٻنهي طرف لاگرٿم وٺڻ سان اسان کي ملندو

$$\log x = \log\left(\frac{3.41\times 37.92}{2.34}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{3.41\times 37.92}{2.34}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\log 3.41 + \log 37.92 - \log 2.34)$$
$$= \frac{1}{2}(0.5325 + 1.5788 - 0.3692)$$
$$= \frac{1}{2}(1.7424)$$
$$= 0.8712$$
$$x = \text{antilog } (0.8712)$$
$$= 7433$$
$$= 7.433$$

مثال 04 4^5 ۾ انگن جو تعداد معلوم ڪريو.

حل: فرض ڪريو تہ $n=4^5$

ٻنهي طرف لاگرٿم وٺڻ سان اسان کي ملندو

$\therefore \quad \log n = \log 4^5, \qquad (\because \log a^n = n\log a)$

$\Rightarrow \quad \log n = 5 \log 4,$

$\Rightarrow \quad \log n = 5\times 0.6021, \qquad$ (جيئن تہ $\log 4 = 0.6021$)

$\Rightarrow \quad \log n = 3.0105,$

جيئن تہ انگن جو تعداد = گڻ + 1

تنهنڪري انگن جو تعداد ٿيندو $4^5 = 3+1=4$

مشق 2.6

.1 لاگرٿم جي استعمال سان هيٺين جا ملهه لهو.

(i) 57.86×4.385 (ii) $25.753\times 0.5341\times 490.8$ (iii) $\dfrac{25.753}{0.5341}$

(iv) $\dfrac{(790.6\times 30.32)}{25.753}$ (v) $\dfrac{(2391\times 30.72)}{23.34}$ (vi) $\dfrac{99.87}{(8.369)\times(0.785)}$

(vii) $\sqrt[5]{2.709}\times\sqrt[7]{1.239}$ (viii) $\dfrac{(26.62)^{\frac{1}{2}}\times(87.19)^3}{\sqrt{69.53}}$ (ix) $\dfrac{(4308)^3\times\sqrt{80.06}}{(0.3387)^3}$

(x) $\dfrac{(43.68)^5\times\sqrt{(0.057)^3}}{(3.048)^4}$

.2 هيٺين ۾ الگن جو تعداد معلوم ڪريو.

(i) 4^{12} **(ii)** 7^{25} **(iii)** 3^{30} **(iv)** 3^5 **(v)** 9^4

مشق ورجايو 2

.1 هيٺين بيانن کي ڌيان سان پڙهو ۽ درست بيانن لاءِ T تي گولو پايو ۽ غلط بيانن لاءِ F تي گولو پايو.

(i) 0.025 کي سائنسي لکڻي ۾ 2.5×10^3 لکي سگهجي ٿو. T/F

(ii) لاگرٿم البيروني روشناس ڪرايو. T/F

(iii) ڪنهن عدد جي لاگرٿم ۾ سڄي حصي کي ان جو گڻ چئبو آهي. T/F

(iv) لاگرٿم عدد جو مئنٽيسا هميشه غير ڪاٽو هوندو آهي. T/F

(v) $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$ T/F

.2 هيٺيان خال پريو.

(i) جنهن لاگرٿم جو بنياد 10 هجي ان کي چئبو _____.

(ii) $\log 1 =$ _____ .

(iii) لاگرٿم جي اٽپوري حصي کي سڏبو _____.

(iv) $\log 512 =$ _____ .

(v) $\log_a m \times \log_m n =$ _____ .

(vi) $x = \log_a y$ جي سگهه واري صورت آهي _____.

(vii) $a^{10} = y$ جي لاگرٿم صورت آهي _____.

(viii) $\log_b a \times \log_a b =$ _____ .

(ix) $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) =$ _____

(x) $\log(10 \times 10) =$ _____ .

.3 درست جواب تي (✓) جو نشان لڳايو.

(i) جيڪڏهن $\log_{10} x = 4$ تہ $x =$ _____

(a) 500 (b) 100 (c) 1000 (d) 10000

(ii) $\log 54.58$ جوگڻ آهي _____

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

(iii) عام لاگرٿم جو بنياد آهي _____.

(a) 5 (b) 10 (c) e (d) 100

(iv) $\log xyz =$ _____ .

(a) $\log x \log y \log z$ (b) $\log x + \log y + \log z$

(c) $\log(xy)^z$ (d) $\log x - \log y - \log z$

(v) 0.00789 جي سائنسي لکڻي آهي:

(a) 7.89×10^{-3} (b) 7.89×10^{3}

(c) 0.789×10^{-2} (d) 78.9×10^{-4}

(vi) جيڪڏهن $\log x = 2$ تہ $x =$ _____

(a) 200 (b) 1000 (c) 100

(d) 2/10

(vii) جيڪڏهن $\log_2 8 = x$ تہ $x =$ _____

(a) 64 (b) 3 (c) 3

(d) 2

(viii) قدرتي لاگرٿم جو بنياد آهي _____.

(a) 10 (b) e (c) π

(d) 5

(ix) $3^5 = 243$ کي لاگرٿم صورت ۾ لکبو _____.

(a) $\log_3 5 = 243$ (b) $\log_3 243 = 5$

(c) $\log_5 243 = 12$ (d) $\log_5 3 = 243$

خلاصو

- جيڪڏهن $a^x = y$ تہ y جو لاگرٿم a بنياد تي x کي چئبو ۽ ان کي هن ريت لکبو

$\log_a y = x,\ a > 0, y > 0$ ۽ $a \neq 1$

- عام لاگرٿم جو بنياد 10 آهي، ان کي برگز لاگرٿم چئبو آهي. گهٽو ڪري $\log_{10} x$ جي بدران $\log x$ لکيو ويندو آهي. قدرتي لاگرٿم جو بنياد e آهي (هڪ غيرناطق عدد جنهن جي قيمت 2.7182818... آهي ان کي $\log_e x$ جي بدران $\ln x$ لکبو آهي.
- $\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$

- $lnx = y \Leftrightarrow e^y = x$
- لاگرٿم ۾ سڄي عددي حصي کي گڻ چئبو آهي ۽ اڻپوري حصي کي مئنٽيسا چئبو آهي.
- لاگرٿم عدد جوگڻ 1 کان وڌيڪ هميشہ غير ڪاٽو هوندو آهي.
- لاگرٿم عدد جوگڻ 1 کان گهٽ هميشہ ڪاٽو هوندو آهي.
- لاگرٿم جو ڪاٽو گڻ کي 1- 2- ,3- جي بدران $\bar{3}, \bar{2}\ \bar{1}$ لکبو آهي.
- لاگرٿم عدد جن کي انگن جي هڪ جهڙي ترتيب هجي تن جو مئنٽيسا پڻ ساڳيو ٿيندو آهي.
- عدد جيڪو مليل لاگرٿم سان مشابهت رکي ان کي ضد لاگرٿم چئبو آهي.
- لاگرٿم جا قاعدا:

(i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a m^n = n\log_a m$

(iv) $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

هي قاعدا هن ريت بہ لکي سگهجن ٿا: $\log_b a.\log_a n = \log_b n$

يونٽ 3

آلجبري اظهار ۽ فارمولا

Algebraic Expression and Formulas

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- ناطق اظهار، ناطق عددن وانگر هوندا آهن جي ڄاڻ حاصل ڪندا.
- ناطق اظهار جي تعريف ٻن گهڻ رقمين $p(x)$ ۽ $q(x)$ جي وندِ اپت (Quotient) $\frac{p(x)}{q(x)}$ (جنهن ۾ $q(x)$ گهڻي رقمي ٻڙي نہ آهي) بيان ڪندا.
- ڏنل آلجبري اظهارن جي چڪاس ڪري سگهندا تہ
  - گهڻ رقمي آهي يا نہ
  - ناطق اظهار آهي يا نہ
- ناطق اظهارڪي $\frac{p(x)}{q(x)}$ جي طور وضاحت ڪندا، جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ مڪمل عددي سِرَن سان گهڻ رقميون آهي جن ۾ ڪو بہ مشترڪ جزو نہ هجي.
- چڪاس ڪندا تہ ناطق آلجبري اظهار سادي صورت ۾ آهي يا نہ.
- ناطق اظهار کي سادي صورت ۾ گهٽائي سگهندا.
- ناطق اظهار جو جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب اپت معلوم ڪري سگهندا.
- هڪ ناطق اظهار کي، ٻي ناطق اظهار سان وندِ ڪري سادي صورت ۾ آڻي سگهندا.
- خاص حقيقي عددن سان، آلجبري اظهارن جي قيمت معلوم ڪري سگهندا.
- فارمولا بابت ڄاڻ حاصل ڪري سگهن.
  - $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$. ۽ $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
  - $a^2 + b^2$، ۽ ab، جو ملهہ معلوم ڪن، جڏهن $(a+b)$ ۽ $(a-b)$ جا ملهہ معلوم هجن.

- فارمولا بابت ڄاڻ حاصل ڪري سگهن

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$

- $a^2 + b^2 + c^2$ جو ملهه معلوم ڪريو جڏهن $a+b+c$ ۽ $ab + bc + ca$ جو ملهه مليل هجي.
- $a+b+c$ جو ملهه معلوم ڪريو، جڏهن $a^2 + b^2 + c^2$ ۽ $ab + bc + ca$ جو ملهه مليل هجي.
- $ab + bc + ca$ جو ملهه معلوم ڪريو، جڏهن $a^2 + b^2 + c^2$ ۽ $a+b+c$ جو ملهه مليل هجي.
- فارمولا بابت ڄاڻ حاصل ڪري سگهن

$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$

- $a^3 \pm b^3$ جو ملهه معلوم ڪريو، جڏهن $'a \pm b'$ ۽ $'ab'$ جو ملهه مليل هجي.
- $x^3 \pm \frac{1}{x^3}$ جو ملهه معلوم ڪريو، جڏهن $x \pm \frac{1}{x}$ جو ملهه مليل هجي.

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$

- $x + \frac{1}{x}$ ۽ $x^2 + \frac{1}{x^2} - 1$ جي ضرب معلوم ڪن.
- $x - \frac{1}{x}$ ۽ $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ جي ضرب معلوم ڪن
- لاگيتي ضرب معلوم ڪري سگهندا.

$(x+y)(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$

- غير ناطق عدد ۽ انهن جا استعمال جي سڃاڻپ ڪري سگهن.
- ٻي درجي جي غير ناطق عدد جي وضاحت ڪن.
- بنيادي عملن کي ٻي درجي جي غير ناطق عددي اظهارن جي ڇيدن کي ناطق ڪن ۽ ان جو جائزو وٺي سگهن.
- ڇيد کي ناطق ڪرڻ جي عمل جي وضاحت ڪن، ۽ $\frac{1}{a + b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ نموني جي اظهار جي ڇيد کي ناطق ڪن ۽ جڏهن تہ x ۽ y قدرتي عدد a ۽ b سڄا عدد آهن.

3.1 آلجبري اظهار

اسان اڳيئي گذريل ڪلاسن ۾ آلجبري اظهارن بابت پڙهيو آهي
اچو ته ان جي قسمن تي بحث ڪريون
آلجبري اظهار هيٺين ٽن قسمن جا ٿيندا آهن.

(a) گهڻ رقمي اظهار يا گهڻ رقمي. (Polynomial Expression or Polynomial)
(b) ناطق اظهار (Rational Expression)
(c) غير ناطق اظهار (Irrational Expression)

(a) گهڻ رقمي اظهار يا گهن رقمي. (Polynomial Expression or Polynomial)

هڪ گهڻ رقمي ڪنهن بدلجندڙ x ۾ هيٺئين نموني لکي سگهجي ٿي

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

جتي 'n' هڪ غير منفي (يعني واڌو) سڄو عدد آهي ۽ عددي سرا (منڊي) $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ حقيقي عدد آهن.

اڪثر ڪري هڪ گهڻ رقميءَ کي $p(x)$ لکبو آهي، تنهن ڪري مٿي ڏيڪاريل الجبري اظهار کي $P(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$ ظاهر ڪبو.

جيڪڏهن $a_0 \neq 0$ ، ته ان گهڻ رقمي کي n درجي جي گهڻ رقمي ۽ a_0 کي گهڻ رقمي جو عددي سرو (منڊي) چئبو آهي.

گهڻ رقمين ۽ انجي درجن جا ڪجهه مثال هيٺ ڏجن ٿا.

(i) $8x-5$ درجو 1 آهي
(ii) $x^4-2x^3+5x^2+1$ درجو 4 آهي.
(iii) $6x^{31}+3$ درجو 31 آهي
(iv) $12x^4-x^3+\frac{2}{3}x^2-3x+1$ درجو 4 آهي.
(v) 4 درجو 0 آهي.
(vi) $\sqrt{10}x^{12}+2x^6-x^5-18x+1$ درجو 12 آهي.

$x^3-x^3y^2+x^2y^2-10$ ۾ متغيرن (بدلجندڙن) Variables x ۽ y سان هڪ آلجبري اظهار جو درجو 5 آهي.

ساڳيءَ طرح $x^3y^5z^2-x^3y^2z^3+x^2yz-34$ ۾ متغيرن بدلجندڙن (Variables) x, y ۽ z سان هڪ آلجبري اظهار جو درجو 10 آهي.

(ڇو جو هن آلجبري اظهار جي سيني رقمن مان سگهن جو وڏي ۾ وڏو جوڙ 10 آهي).

ياد رکو ته:

- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ صرف هڪ رقم موجود هجي ته انکي هڪ رقمي (Monomial) اظهار چئبو آهي، مثال طور: $3x, 7xy, 6xy^2z^5$ وغيره.
- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ صرف ٻه رقم موجود هجن ته انکي ٻه رقمي (Binomial) اظهار چئبو آهي، مثال طور: $x+4, 5x+y, 7x-3$ وغيره.
- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ صرف ٽي رقم موجود هجي ته انکي ٽي رقمي (Trinomial) اظهار چئبو آهي، مثال طور: $\frac{1}{\sqrt{3}}x^2y^2-5xy+3$ x^2-2x+1 وغيره.
- جيڪڏهن گهڻ رقميءَ ۾ چاريا وڌيڪ رقمون موجود هجن ته انکي ڪيترا ئي رقمي (Multinomial) اظهار چئبو آهي.

(b) ناطق اظهار (Rational Expression)

اهڙي آلجبري اظهار جيڪو $\frac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ لکي سگهجي جنهن ۾ $p(x)$ ۽ $q(x)$ گهڻ رقميون هجن ۽ $q(x) \neq 0$ هجي انکي ناطق آلجبري اظهار چئبو آهي.

مثال طور: $\frac{x+1}{x}, \frac{x^2-x+1}{x-5}, \frac{\sqrt{3}x^2-5x+4}{x^3+6x-5}$ وغيره.

نوٽ: هر گهڻ رقمي اظهار ناطق اظهار آهي پر هر ناطق اظهار گهڻ رقمي اظهار نه آهي.

(c) غير ناطق اظهار (Irrational Expression)

اهڙي آلجبري اظهار جيڪو $\frac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ لکي نه سگهجي جنهن ۾ $p(x)$ ۽ $q(x)$ گهڻ رقميون هجن ۽ $q(x) \neq 0$ هجي انکي غير ناطق آلجبري اظهار چئبو آهي.

مثال طور: $\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{\sqrt{x}+1}{x}, \frac{\sqrt{x^3}+2x+3}{\sqrt{x}-9}, \sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}$ وغيره.

3.1.1 اهو معلوم هجي ته ناطق آلجبري اظهار ناطق عددن وانگر عمل ڪندا آهن.

جيئن p ۽ q ٻه ناطق عدد آهن ته پوءِ $\frac{p}{q}$ سڄا عدد ٿي سگهن ٿا يا نه تنهن ڪري عددن جو سرشتو وڌايو آهي ۽ $\frac{p}{q}$ کي ناطق جي صورت ۾ ظاهر ڪيو آهي، جتي $p,q \in Z$ جنهن ۾ $q \neq 0$

ساڳيءَ طرح: جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ به گهڻ رقميون آهن ته لازمي نه آهي ته $\frac{p(x)}{q(x)}$ به گهڻ رقمي هجي

3.1.2 ناطق اظهار جي وضاحت ڪريو جيئين $\frac{p(x)}{q(x)}$ وندِ اپت آهي $p(x)$ ۽ $q(x)$ جي، جتي $q(x) \neq 0$

جيڪڏهن اسين چاڻون ٿا $\frac{p(x)}{q(x)}$ صورت ۾ جتي $p(x)$ ۽ $q(x)$ به گهڻ رقميون آهن، $q(x)$ غير ٻڙي گهڻ رقمي آهي. انکي ناطق اظهار چئبو آهي.

مثال طور: $\frac{x^2-5}{3x^2+4}$ ، $3x^2+4 \neq 0$ ناطق اظهار آهن.

3.1.3: چڪاس ڪريو ته ڏنل آلجبري اظهار

(i) گهڻ رقمي آهي يا نه (ii) ناطق اظهار آهي يا نه

هيٺيان مثال گهڻ رقمي ۽ ناطق اظهارن کي سڃاڻڻ مدد ڪندا.

مثال 01

(i) $2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ (ii) $6x^3 - 4x^2 - 5x$

حل: (i) $2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

اهو گهڻ رقمي اظهار نه آهي ڇاڪاڻ ته ٻي رقم کي سگهه واڌو سڄو عدد نه آهي.

حل: (ii) $6x^3 - 4x^2 - 5x$

اهو گهڻ رقمي اظهار آهي ڇاڪاڻ ته هر رقم کي سگهه واڌو سڄو عدد آهي.

مثال 02 ناطق اظهار آهي يا نه

(i) $\frac{x-2}{3x^2+1}$ (ii) $6x^3 - \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

حل (i) $\frac{x-2}{3x^2+1}$

انس ۽ چيد ٻئي گهڻ رقمي اظهار آهن، تنهنڪري اهو ناطق اظهار آهي.

حل (ii) $6x^3-\frac{1}{\sqrt{x+4}}$

اهو ناطق اظهار نہ آهي ڇاڪاڻ تہ ٻي رقم جو چيد گهڻ رقمي اظهار نہ آهي.

3.1.4 $\frac{p(x)}{q(x)}$ کي انجي سادي صورت ۾ وضاحت ڪريو جڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ گهڻ رقمي اظهار آهن انهن کي عددي سرا(منڊي) (Coefficient) سڄا عدد (Integral) آهن ۽ ڪو عام جزو (Common factor) نہ آهي.

ناطق اظهار کي مختصر حالت ۾ تڏهن چونداسين جڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ وٽ 1 کان علاوه ڪو بہ مشترڪ جزو نہ آهي.

مثال طور: $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ جي ننڍي ۾ ننڍي صورت $\frac{x+1}{x-1}$ آهي.

3.1.5 چڪاس ڪريو تہ ڏنل ناطق آلجبري اظهار سندس ننڍي ۾ ننڍي صورت ۾ آهي. $\frac{p(x)}{q(x)}$ ناطق اظهار جي چڪاس ڪرڻ لاءِ $p(x)$ ۽ $q(x)$ جا عام جزا (Common factors) ڏسو.

جيڪڏهن عام جزو 1 آهي تہ ناطق آلجبري اظهار ننڍي صورت ۾ آهي.

مثال طور: $\frac{x+1}{x-1}$ ننڍي ۾ ننڍي صورت ۾ آهي ڇاڪاڻ تہ $x+1$ ۽ $x-1$ جو عام جزو 1 آهي.

3.1.6 ناطق اظهارن کي سندن سادي صورت ۾ آڻيو:

فرض ڪريو تہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ هڪ ناطق اظهار آهي جنهن ۾ $q(x) \neq 0$

قدم 1: جيڪڏهن ممڪن هجي تہ $p(x)$ ۽ $q(x)$ اظهارن جا جزا لهو.

قدم 2: جيڪڏهن ممڪن هجي تہ $p(x)$ ۽ $q(x)$ جا عام جزا لهو.

قدم 3: $p(x)$ ۽ $q(x)$ جا عام جزا پاڻ ۾ ڪٽيو.

مثال 01 هيٺين ناطق اظهارن کي سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $\frac{(x^2-x)(x^2-5x+6)}{2x(x^2-3x+2)}$ (ii) $\frac{5(x^2-4)}{(3x+6)\ (x-3)}$

حل: (i)

$$\frac{(x^2-x)(x^2-5x+6)}{2x(x^2-3x+2)}$$

$$=\frac{x(x-1)}{2x}\cdot\frac{x^2-3x-2x+6}{x^2-2x-x+2}$$

$$=\left(\frac{x-1}{2}\right)\cdot\frac{\{x(x-3)-2(x-3)\}}{\{x(x-2)-1(x-2)\}}$$

$$=\frac{(x-1)(x-3)(x-2)}{2(x-2)(x-1)}$$

$$=\frac{(x-3)}{2}$$

$=\frac{1}{2}(x-3)$ گهربل سادي صورت آهي.

حل: (ii)

$$\frac{5(x^2-4)}{(3x+6)\ (x-3)}$$

$$=\frac{x^2-4}{x-3}\cdot\frac{5}{3x+6}$$

$$=\frac{x^2-2^2}{x-3}\cdot\frac{5}{3(x+2)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{5}{3(x+2)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{5}{3(x+2)} \qquad x \neq -2$$

$$= \frac{5(x-2)}{3(x-3)}$$ گهربل سادي صورت آهي

3.1.7 ناطق اظهارن جي جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب اپت لهو.

ناطق اظهارن جي جوڙ، ڪٽ ۽ ضرب هيٺين مثالن جي مدد سان ڪبي آهي.

مثال 01 $\frac{3}{x+1} + \frac{4x}{x^2-1}$

حل:

$$\frac{3}{x+1} + \frac{4x}{x^2-1}$$

$$= \frac{3}{x+1} + \frac{4x}{(x-1)(x+1)}$$ جزا

$$= \frac{3(x-1)+4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{3x-3+4x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{7x-3}{(x-1)(x+1)} \qquad x \neq 1, -1.$$

$$= \frac{7x-3}{x^2-1}$$ گهربل سادي صورت آهي

مثال 02 $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$

حل:

$$=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^3-1}$$

$$=\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$ جزا

$$=\frac{(x^2+x+1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2+x+1-x-1}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{x^2}{(x+1)(x^3-1)}$$ گهربل سادي صورت آهي

مثال 03 $\frac{x^2}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^2-9}{2x^2}$

حل:

$$\frac{x^2}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^2-9}{2x^2}, x\neq 0$$

$$=\frac{x^2}{x^2+4x-3x-12}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2x^2}$$

$$=\frac{1}{x(x+4)-3(x-4)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2}$$

$$=\frac{1}{(x+4)(x-3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{2}$$

$$=\frac{(x+3)}{2(x+4)}$$ گهربل سادي صورت آهي

3.1.8 هڪ ناطق اظهار کي ٻئي ناطق اظهار سان وڌڻ ڪري ساديءَ صورت ۾ آڻڻ:

هڪ ناطق اظهار کي ٻئي ناطق اظهار سان وڌڻ ڪرڻ جي ترتيب، پهرين وڌڻ کي ضرب ۾ بدلائي ساديءَ صورت ۾ آڻبو:

مثال 01 $\dfrac{3x-9y}{2x+10y} \div \dfrac{x^2-3xy}{4x+20y}$

حل:

$$\frac{3x-9y}{2x+10y} \div \frac{x^2-3xy}{4x+20y}$$

$$= \frac{3x-9y}{2x+10y} \times \frac{4x+20y}{x^2-3xy}$$ ضرب ۾ بدلائڻ

$$= \frac{3(x-3y)}{2(x+5y)} \times \frac{4(x+5y)}{x(x-3y)} = \frac{6}{x}$$ گهربل سادي صورت آهي

3.1.9 ڪجهه مخصوص حقيقي عددن سان آلجبري اظهارن جو ملهه لهو:

ڪجهه مخصوص حقيقي عددن سان آلجبري اظهارن جو ملهه لهڻ هيٺ ڏنل مثالن ۾ واضح ڪيل آهي.

مثال 01 $\dfrac{x^2+yz}{x^3+y^2-7yz^4}$ جو ملهه لهو جڏهن $x=3$ ، $y=2$ ۽ $z=-1$

مليل $x=3$ ، $y=2$ ۽ $z=-1$

حل

$$= \frac{x^2+yz}{x^3+y^2-7yz^4}$$

$$= \frac{(3)^2+(2)(-1)}{(3)^3+(2)^2-7(2)(-1)^4}$$

$$= \frac{9-2}{27+4-14} = \frac{7}{17}$$

مشق 3.1

1. ٻڌايو ته هيٺ آلجبري اظهار گهڻ رقمي آهن يا نه:

(i) $2xy^2 - 3x^2 + 5y^3 - 6$ (ii) $3xy^{-2}$

(iii) $6x^2 - 10x + x - \sqrt{45}$ (iv) $5\sqrt{x} - x + 5x^2$

(v) $\dfrac{2}{x+2}$ (vi) $\dfrac{2}{x} + x^3 - 2$

.2 ٻڌايو ته هيٺ ڏنل آلجبري اظهار ناطق آهن يا نہ:

(i) $\dfrac{x^2+2x+3}{x-4}$ (ii) $\dfrac{x^2+5\sqrt{x}-2x}{3x^2+5x+4}$ (iii) $\dfrac{13x^2-9x+4}{x^2+5x+\sqrt{7}}$

(iv) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ (v) $\dfrac{7}{x+7}$ (vi) $5\sqrt{x}-x+5x^2$

.3 هيٺيان سادي صورت ۾ آڻيو:

(i) $\dfrac{p^2-100}{p^2+10}$ (ii) $\dfrac{3ab-3a^2}{3a^2+6ab+3ab^2}$ (iii) $\dfrac{(a-b)}{(a+b)}\times\dfrac{(a^2+ab)}{(2a^2-2b^2)}$

(iv) $\dfrac{(x+y)^2-z^2}{x+y+z}$ (v) $\dfrac{(m^2-6m)(3m+15)}{2m-12}$ (vi) $\dfrac{4t^2-36t+80}{(4t-t^2)(5-t)}$

(vii) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$ (viii) $\dfrac{4x^2+24x+36}{3x^2-27}$ (ix) $\dfrac{(y+z)(y^2-2yz+z^2)}{y^2+yz}$

.4 هيٺيان سادي صورت ۾ آڻيو:

(i) $\dfrac{4x-1}{2x-2}+\dfrac{4x+1}{2x+2}$ (ii) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+3}$ (iii) $\dfrac{y^2-25}{y^2-5y}+\dfrac{y}{5y^2-5y}$

(iv) $\dfrac{xy}{xy+1}+\dfrac{xy+1}{xy-1}$ (v) $\dfrac{4}{z^2-4z-5}+\dfrac{2}{4z^2-4}$ (vi) $\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{2a}{a^2-b^2}$

(vii) $\dfrac{4y}{y^2-1}+\dfrac{y+1}{y-1}+\dfrac{y-1}{y+1}$ (viii) $\dfrac{1}{2x+y}+\dfrac{1}{2x-y}+\dfrac{1}{4x^2-y^2}$

(ix) $\dfrac{x-2}{x^2+6x+9}-\dfrac{x-2}{2x^2-18}$ (x) $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{a-3}+\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a+3}$.

.5 سادي صورت ۾ آڻيو:

(i) $\left(\dfrac{x^2}{4y^2-x^2}+1\right)\div\left(1-\dfrac{x}{2y}\right)$ (ii) $\dfrac{x+3}{3y-2x}\cdot\dfrac{4x^2-9y^2}{xy+3y}$

(iii) $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}\times\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ (iv) $\dfrac{8(y+3)}{9}\times\dfrac{12(y+1)}{4(y+3)}\div\dfrac{8(y+1)}{5}$

(v) $\dfrac{q^2-25}{q^2-3q}\div\dfrac{q^2+5q}{q^2-9}$ (vi) $\dfrac{4}{z^2-4z-5}\div\dfrac{2}{4z^2-4}$

.6 $t+\frac{1}{t}$ جو ملهه لهو، جڏهن $t=\frac{x-y}{x+y}$ هجي.

.7 هيٺين جو ملهه لهو:

(i) $\frac{5(x+y)}{3x^2\sqrt{y}+6}$, if $x=-4,\ y=9$

(ii) $\frac{42ab^2c^3}{3a^2b+1}$, if $a=3,\ b=2$ and $c=1$

(iii) $\frac{(x+y)^3-z^2}{x^2y^2+z^2}$, if $x=2,\ y=-4$ and $z=3$,

(iv) $\frac{3x^2y}{z}-\frac{bc}{x+1}$, if $x=2,\ y=-1,\ z=3,\ b=4,\ c=\frac{1}{3}$

(v) $\frac{(ab^2-c)}{(a+cd^2)}\times\frac{(c+d)}{(a^2b-d)}$, if $a=1,\ b=3,\ c=-3$ and $d=2$.

3.2 آلجبري فارمولا

اسان گذريل ڪلاسن ۾ ڪجهه آلجبري فارمولا پڙهيا ۽ استعمال ڪيا آهن، هاڻي ڪجهه نوان فارمولا سکنداسين ۽ لاڳو ڪندا سين:

3.2.1 فارمولاچاڻو:

(i) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

چڪاس

$$\text{L.H.S} = (a+b)^2+(a-b)^2$$
$$= a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2 \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$= 2a^2+2b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$\text{L.H.S} = 2(a^2+b^2) = \text{R.H.S}$$

(ii) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

چڪاس

$$\text{L.H.S} = (a+b)^2-(a-b)^2$$
$$= a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2) \qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$= a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$\text{L.H.S} = 4ab = \text{R.H.S}$$

مثال 01 هيٺين مثالن ۾ طريقو واضح ڪيل آهي

(i) $a^2 + b^2$ (ii) ab جو ملهه لهو، جڏهن $a + b = 6$ ۽ $a - b = 4$

(i) گهربل $a^2 + b^2 = ?$

حل: مليل $a - b = 4$ ، $a + b = 6$

اسان کي معلوم آهي تہ $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

جو ملهه وجهڻ سان $a - b = 4$ ۽ $a+b = 6$

$$(6)^2 + (4)^2 = 2(a^2 + b^2),$$
$$\Rightarrow \quad 36 + 16 = 2(a^2 + b^2)$$
$$\Rightarrow \quad 52 = 2(a^2 + b^2)$$
$$\Rightarrow \quad 26 = a^2 + b^2$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{a^2 + b^2 = 26}$$

(ii) گهربل $ab = ?$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

جو ملهه وجهڻ سان $a - b = 4$ $a + b = 6$

$$\therefore \quad (6)^2 - (4)^2 = 4ab,$$
$$\Rightarrow \quad 36 - 16 = 4ab,$$
$$\Rightarrow \quad 20 = 4ab,$$
$$\Rightarrow \quad 5 = ab,$$
$$\boxed{ab = 5}$$

جيئن تہ $a^2 + b^2 = 26$ ۽ $ab = 5$

3.3.2 فارمولا چاڻو:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$$
$$= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)$$
$$= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

مثال 01 $a^2+b^2+c^2$ جو ملهه لهو، جڏهن $a+b+c=7$ ۽ $ab+bc+ca=15$

حل: گهربل $a^2+b^2+c^2=?$

اسان کي معلوم آهي تہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

هاڻي $a+b+c=7$ ۽ $ab+bc+ca=15$ جو ملهه وجهڻ سان

$$\therefore \quad (7)^2=a^2+b^2+c^2+2(15)$$
$$\Rightarrow \quad 49=a^2+b^2+c^2+30$$
$$\Rightarrow \quad 49-30=a^2+b^2+c^2$$
$$\Rightarrow \quad 19=a^2+b^2+c^2$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{a^2+b^2+c^2=19}$$

جيئن تہ $(a^2+b^2+c^2)$ جو ملهه 19 آهي.

مثال 02 $(a+b+c)$ جو ملهه لهو، جڏهن $a^2+b^2+c^2=38$ ۽ $ab+bc+ac=31$ هجي.

حل: مليل $a^2+b^2+c^2=38$ ۽ $ab+bc+ac=31$

اسان کي معلوم آهي تہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=38$ ۽ $ab+bc+ac=31$ جو ملهه وجهڻ سان

$$(a+b+c)^2=38+2(31)$$
$$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2=38+62$$
$$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2=100$$
$$\Rightarrow \quad (a+b+c)=(\pm\sqrt{100})$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{(a+b+c)=\pm 10}$$

جيئن تہ $(a+b+c)$ جو ملهه ± 10 آهي.

مثال 03 $(ab+bc+ac)$ جو ملهه لهو، جڏهن $a+b+c=8$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$ هجي.

حل: مليل $a+b+c=8$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$

اسان کي معلوم آهي تہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a+b+c=8$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$ جو ملهه وجهڻ سان

$$(8)^2=20+2(ab+bc+ac)$$
$$\Rightarrow \quad 64=20+2(ab+bc+ac)$$
$$\Rightarrow \quad 64-20=2(ab+bc+ac)$$
$$\Rightarrow \quad 44=2(ab+bc+ac)$$
$$\Rightarrow \quad 22=ab+bc+ac$$
$$\Rightarrow \quad ab+bc+ac=22$$

جيئن تہ $(ab+bc+ac)$ جو ملهه 22 آهي.

3.2.3: ڪعب جو فارمولا:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \qquad \text{(i)}$$

چڪاس

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2\\ &= a^3+b^3+3ab(a+b)\end{aligned}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \qquad \text{(ii)}$$

چڪاس

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3-3a^2b+3ab^2\\ &= a^3-b^3-3ab(a-b)\end{aligned}$$

هيٺيان مثال ڪعب جي فارمولا جو استعمال سمجهڻ لاءِ ڪارائتا آهن:

مثال 01 a^3+b^3 جو ملهه لهو، جڏهن $a+b=4$ ۽ $ab=5$ هجي.

حل مليل $a+b=4$ ۽ a^3+b^3

اسان کي معلوم آهي تہ $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

$a+b=4$ ۽ $ab=5$ جو ملهه وجهڻ سان

$$\begin{aligned}&(4)^3 = a^3+b^3+3(5)(4)\\ \Rightarrow\ &64 = a^3+b^3+60\\ \Rightarrow\ &64-60 = a^3+b^3\\ \Rightarrow\ &4 = a^3+b^3\\ \Rightarrow\ &\boxed{a^3+b^3=4}\end{aligned}$$

جيئن تہ (a^3+b^3) جو ملهه 4 آهي.

مثال 02 ab جو ملهه لهو، جڏهن $a^3 - b^3 = 5$ ۽ $a - b = 5$ هجي.

حل: مليل: $a^3 - b^3 = 5$ ۽ $a - b = 5$

اسان کي معلوم آهي تہ $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

$a^3 - b^3 = 5$ ۽ $a - b = 5$ جو ملهه وجهڻ سان

$$(5)^3 = 5 - 3ab(5)$$
$$\Rightarrow \quad 125 = 5 - 15ab$$
$$\Rightarrow \quad 125 - 5 = -15ab$$
$$\Rightarrow \quad 120 = -15ab$$
$$\Rightarrow \quad -8 = ab$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{ab = -8}$$

جيئن تہ ab جو ملهه 8- آهي

مثال 03 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ جو ملهه لهو، جڏهن $x + \frac{1}{x} = 3$ هجي.

حل: مليل $x + \frac{1}{x} = 3$

بنهي پاسن کعب لڳائڻ سان $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3$

$$\Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27 \qquad \left[\ (a+b)^3 = a^3 + b^3 - 3ab(a+b)\ \right]$$
$$\Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(3) = 27$$
$$\Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} + 9 = 27$$
$$\Rightarrow \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} = 18}$$

جيئن تہ $x^3 + \frac{1}{x^3}$ جو ملهه 18 آهي.

مثال 04 $8x^3-\frac{1}{x^3}$ جو ملهه لهو، جڏهن $2x-\frac{1}{x}=4$ هجي.

حل: مليل $2x-\frac{1}{x}=4$

بنهي پاسن کعب لڳائڻ سان $(2x-\frac{1}{x})^3=(4)^3$

$$(2x)^3-(\frac{1}{x})^3-3(2x)(\frac{1}{x})(2x-\frac{1}{x})=64$$

$$8x^3-\frac{1}{x^3}-6(4)=64$$

$$8x^3-\frac{1}{x^3}-24=64 \qquad \Rightarrow 8x^3-\frac{1}{x^3}=88$$

جيئن تہ $8x^3-\frac{1}{x^3}$ جو ملهه 88 آهي.

3.2.4: کعب جو فارمولا:

(i) $a^3 \pm b^3=(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)$

چڪاس

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3$$

(ii) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

چڪاس

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$
$$=a^3-b^3$$

مثال 01 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)$ ۽ $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ جي ضرب اپت لهو.

حل: $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$

$$\therefore\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$$

مثال 02 $\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}$ ۽ $\left(x-\frac{1}{x}\right)$ جي ضرب اپت لهو.

حل:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\therefore \quad (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=x^3-\frac{1}{x^3}$$

مثال 03 $(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$ ۽ $(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$ جي لاڳيتي ضرب اپت لهو.

حل:

$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$$

$$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) \qquad [\because (a \pm b)\,(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3]$$
$$= x^6 - y^6.$$

مشق 3.2

1. $a-b$ جو ملهه لهو، جڏهن $a+b=9$ ۽ $ab=20$ هجي.
2. $a-b$ جو ملهه لهو، جڏهن $a+b=5$ ۽ $ab=-6$ هجي.
3. a^2+b^2 ۽ ab جو ملهه لهو، جڏهن $a+b=8$ ۽ $a-b=6$ هجي.
4. a^2+b^2 ۽ ab جو ملهه لهو، جڏهن $a+b=5$ ۽ $a-b=3$ هجي.
5. $a^2+b^2+c^2$ جو ملهه لهو، جڏهن $a+b+c=9$ ۽ $ab+bc+ac=13$ هجي.
6. $a^2+b^2+c^2$ جو ملهه لهو، جڏهن $a+b+c=\frac{1}{3}$ ۽ $ab+bc+ac=\frac{-2}{9}$ هجي.
7. $a+b+c$ جو ملهه لهو، جڏهن $a^2+b^2+c^2=29$ ۽ $ab+bc+ac=10$ هجي.
8. $a+b+c$ جو ملهه لهو، جڏهن $a^2+b^2+c^2=0.9$ ۽ $ab+bc+ac=0.8$ هجي.
9. $ab+bc+ac$ جو ملهه لهو، جڏهن $a+b+c=10$ ۽ $a^2+b^2+c^2=20$ هجي.
10. a^3+b^3 جو ملهه لهو، جڏهن $a+b=4$ ۽ $ab=3$ هجي.
11. ab جو ملهه لهو، جڏهن $a^3-b^3=16$ ۽ $a-b=4$ هجي.
12. ab جو ملهه لهو، جڏهن $a^3-b^3=5$ ۽ $a-b=5$ هجي.
13. a^3-b^3 جو ملهه لهو، جڏهن $a-b=5$ ۽ $ab=7$ هجي.

14. $125x^3 + y^3$ جو ملهه لهو، جڏهن $5x + y = 13$ ۽ $xy = 10$ هجي.

15. $216a^3 - 343b^3$ جو ملهه لهو، جڏهن $6a - 7b = 11$ ۽ $ab = 8$ هجي.

16. $x^3 + \frac{1}{x^3}$ جو ملهه لهو، جڏهن $x + \frac{1}{x} = 7$ هجي.

17. $x^3 - \frac{1}{x^3}$ جو ملهه لهو، جڏهن $x - \frac{1}{x} = 11$ هجي.

18. مناسب فارمولا جي مدد سان لاڳيتي ضرب اپت لهو.

(i) $(2x^2 + 3y^2)(4x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4)$

(ii) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$

(iii) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

(iv) $(2x + 3y)(2x - 3y)(4x^2 + 9y^2)(16x^4 + 81y^4)$

19. ٻڌايو ته هيٺ ڏنل آلجبري اظهار گهڻ رقمي آهن يا نه:

(i) $\left(\frac{3}{2}b + \frac{2}{3b}\right)\left(\frac{9b^2}{4} + \frac{4}{9b^2} - 1\right)$ (ii) $\left(\frac{7y^2}{9} + \frac{9}{7y^2}\right)\left(\frac{49y^4}{81} + \frac{81}{49y^4} - 1\right)$

(iii) $\left(\frac{x^4}{12} + \frac{12}{x^4}\right)\left(\frac{x^8}{144} + \frac{144}{x^8} + 1\right)$ (iv) $\left(c^2 - \frac{1}{c^2}\right)\left(c^4 + \frac{1}{c^4} + 1\right)$

3.3 غير ناطق عددي اظهار (Surds) ۽ انهن جو استعمال

3.3.1 غير ناطق عددي اظهار (Surds) جي سڃاڻپ ۽ انهن جو استعمال

وصف: اهڙو عددي اظهار جنهن ۾ موجود رقمن ۾ گهٽ ۾ گهٽ هڪ رقم تي ٻئي مول جي نشاني هجي انکي "غير ناطق عددي اظهار" (Surd) چئبو آهي

مثال طور: $\sqrt{2}, \sqrt{a-4}, \sqrt[3]{\frac{5}{10}}, \left(\frac{1}{3} + \sqrt{3}\right), \left(\sqrt[5]{2} - \frac{1}{2}\right)$ غير ناطق عددي اظهار (Surds) آهن

سيئي (سرڊ Surds) غير ناطق عددي اظهار آهن.

جيڪڏهن $\sqrt[n]{a}$ هڪ غير ناطق عدد هجي ۽ 'a' مڪمل n^{th} وين سگهه نه هجي ته انکي n^{th} ترتيب جو غير ناطق عدد چئبو. $\sqrt[n]{a}$ حل هڪ غير ناطق عدد آهي ان کي غير ناطق مول ۽ ناطق مول جو پايو چئبو آهي.

مثال طور: $\sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[7]{10}$ 2nd, 3rd, 4th, 5th ۽ 7th ترتيب جا سرڊ Surds آهن.

پر $\sqrt[3]{27}$ ۽ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ سرڊ (Surds) نہ آهن. ڇاڪاڻ تہ آهي عدد 3 ۽ $\frac{1}{2}$ جي نمائندگي ڪن ٿا جيڪي غير ناطق عدد نہ آهن.

3.3.2 ٻي درجي جو غير ناطق عددن (Surd of the second order) جي وضاحت ڪريو. ٻئي درجي جي غير ناطق عددن کي بنيادي عمل استعمال ڪري، چيڪ کي ناطق ڪري انجو جائزو وٺو.

(a) ٻي ترتيب جو غير ناطق عددي اظهار (Surd of the second order)

(i) هڪ غير ناطق اظهار جيڪو هڪ رقم وارو هجي انکي هڪ رقمي غير ناطق اظهار (Monomial Surd) چئبو آهي.

مثال طور: $\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{a-9}, \sqrt{53}$ وغيره ٻي درجي جا هڪ رقم وارو غير ناطق اظهار آهن.

(ii) هڪ غير ناطق عدد جيڪو ٻن هڪ رقمي غير ناطق اظهارن جو جوڙ يا فرق رکي يا هڪ رقمي غير ناطق اظهار ۽ ناطق اظهار جو جوڙ هجي انکي ٻہ درجي ناطق اظهار (Binomial Surd) چئبو آهي.

مثال طور: $\sqrt{3}-35, \sqrt{2}-13, \sqrt{17}+\sqrt{11}$ وغيره ٻي ترتيب جا ٻہ درجي غير ناطق عدد آهن.

(iii) ٻہ درجي غير ناطق اظهارن جو ميل (Conjugate of Binomial Surds) اظهار جا نمونا.

(a) $\left(\sqrt{a}+c\sqrt{b}\right)$ ۽ $\left(\sqrt{a}-c\sqrt{b}\right)$ هڪٻئي جا غير ناطق ميل (زوج) (Conjugate) آهن.

(b) $a+\sqrt{b}$ ۽ $a-\sqrt{b}$ هڪٻئي جا غير ناطق ميل (زوج) (Conjugate) آهن.

(b) ٻي ترتيب جي غيرناطق اظهارن تي بنيادي عمل، انجي چيدن کي ناطق اظهارن ۾ بدلائڻ ۽ انهن جوملهہ لهڻ.

(i) غير ناطق اظهارن (Surds) جي جوڙ ۽ ڪٽ

غير ناطق اظهارن (Surds) جي جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ لاءِ هيٺيان قائدا استعمال ڪري سگهجن ٿا.

مثال طور: $a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$ ۽ $a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=(a-b)\sqrt{c}$

مثال 01 $\sqrt{343}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$ سادي‌ءَ صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\sqrt{343}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$$
$$=\sqrt{7\times7\times7}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$$
$$=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}-2\sqrt{7}$$
$$=(7-3-2)\sqrt{7}$$
$$=(7-5)\sqrt{7}$$
$$=2\sqrt{7}$$

مثال 02 $\sqrt{32}+5\sqrt{2}+\sqrt{128}+7\sqrt{2}$ سادي‌ءَ صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\sqrt{32}+5\sqrt{2}+\sqrt{128}+7\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{16\times2}+5\sqrt{2}+\sqrt{64\times2}+7\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{(4)^2\times2}+5\sqrt{2}+\sqrt{(8)^2\times2}+7\sqrt{2}$$
$$=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}+8\sqrt{2}+7\sqrt{2}$$
$$=(4+5+8+7)\sqrt{2}$$
$$=24\sqrt{2}$$

(ii) غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب ۽ وڌ

غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب ۽ وڌ ڪرڻ لاءِ هيٺيان قائدا استعمال ڪري سگهجن ٿا.

(a) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}},\ a>0$ ۽ $b>0$

مثال 01 $\sqrt{125}\times\sqrt{48}$ سادي‌ءَ صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\sqrt{125}\times\sqrt{48}$$
$$=\sqrt{(5)^2\times5}\times\sqrt{(4)^2\times3}$$
$$=5\sqrt{5}\times4\times\sqrt{3}$$
$$=(5\times4)\left(\sqrt{5}\times\sqrt{3}\right)$$
$$=20\sqrt{15}$$

مثال 02 $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{144}}$ سادي صورت ۾ آڻيو:

حل:

$$\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{144}}$$

$$=\frac{\sqrt{2\times 81}}{\sqrt{12\times 12}}$$

$$=\frac{\sqrt{2\times (9)^2}}{\sqrt{(12)^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{12}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

مشق 3.3

1. سادي صورت ۾ آڻيو:

(i) $\sqrt[4]{81x^{-8}z^4}$ (ii) $\sqrt[3]{256a^6b^{12}c^9}$ (iii) $\sqrt[7]{128}$ (iv) $\sqrt{7776}$

(v) $\frac{\sqrt[3]{(125)^2\times 8}}{\sqrt{(2\times 32)^2}}$ (vi) $\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{28}}{\sqrt{121}}$ (vii) $\sqrt{\frac{(216)^{\frac{2}{3}}\times(125)^{\frac{1}{2}}}{(0.04)^{\frac{-3}{2}}}}$

(viii) $\frac{\sqrt[6]{4}\times\sqrt[3]{27}\times\sqrt{60}}{\sqrt{180}\times\sqrt[3]{0.25}\times\sqrt[4]{9}}$

2. هيٺين جو ميل (زوج) (Conjugate) لهو.

(i) $\left(8-4\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(6\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right)$ (iii) $\left(8\sqrt{12}+\sqrt{8}\right)$ (iv) $\left(2-\sqrt{3}\right)$

3. سادي صورت ۾ آڻيو:

(i) $\left(6\sqrt{3}+4\sqrt{2}+7\sqrt{128}\right)$ (ii) $\frac{\sqrt{2}}{10}+\sqrt{8}$

(iii) $\left(13+15\sqrt{3}\right)+\left(7-6\sqrt{3}\right)$ (iv) $\sqrt{250}+\sqrt{490}+3\sqrt{10}$

(v) $\sqrt{245}+\sqrt{625}-\sqrt{45}$ (vi) $10\sqrt{11}-\sqrt{396}-3\sqrt{11}$

(vii) $\sqrt{17}\left(10\sqrt{17}-2\sqrt{17}\right)$ (viii) $\frac{3}{2}\left(\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}\right)$

(ix) $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (x) $\left(\sqrt{13}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)$

(xi) $\left(3\sqrt{6}-4\sqrt{5}\right)^2$ (xii) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2$

4. سادي صورت ۾ آڻيو:

(i) $\sqrt{32}-\sqrt{8}$ (ii) $8\sqrt{243}-2\sqrt{27}$ (iii) $\frac{3}{2}\sqrt{18}-\frac{3}{8}\sqrt{32}-\frac{6}{4}\sqrt{50}$

(iv) $10\sqrt{289}$ (v) $3\sqrt{2}+\sqrt{8}$ (vi) $(3\sqrt{27}-5\sqrt{3})+(\sqrt{3}+\sqrt{27})$

3.4 ناطق ڪرڻ (Rationalization)

3.4.1 غير ناطق اظهارن تي حقيقي عددن جي ناطق ڪرڻ جا نمونا $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ۽ انهن جا مجموعا، جتي x,y قدرتي عدد آهن ۽ $(a$ ۽ $b)$ سڄا عدد آهن.

- جيڪڏهن بن غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب اپت هڪ ناطق عدد آهي ته هر غير ناطق اظهار هڪبئي جو ناطق ڪندڙ جزو سڏبو.

مثال طور: $(35-\sqrt{31})$ ۽ $(35+\sqrt{31})$

- ڏنل غير ناطق اظهارن جي پنهنجي ناطق ڪندڙ جزي سان ضرب جو عمل سان ناطق عدد ضرب اپت جي طور تي حاصل ڪرڻ کي ناطق ڪندڙ چئبو آهي.

غير ناطق اظهارن ميل (Conjugate surds) جي ضرب اپت هڪ ناطق عدد آهي.

مثال 01 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ جي ضرب اپت لهو:

حل: $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ ۽ $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$

جيڪو هڪ ناطق عدد آهي $3-2=1$

چيدن جو ناطق ٿيڻ (Rationalization of denominator)

مٿين بحث کي ذهن ۾ رکي، اسان نتيجو ڪڍيو ته $(a+b\sqrt{x})$ يا $(a-b\sqrt{x})$ نموني جي هڪ چيد کي ناطق ڪرڻ لاءِ اسين ٻئي چيد ۽ انس جي ميل جزي $(a+b\sqrt{x})$ (Conjugate factor) يا $(a-b\sqrt{x})$ سان ضرب ڪنداسين.ائين ڪرڻ سان اسان ٻئي مول کي خارج ڪيون ٿا ۽ اهڙيءَ طرح چيد کي ڪنهن به غير ناطق اظهار (Surd) کان آزاد حاصل ڪري سگهون ٿا.

حقيقي عددن جي ناطق ٿيڻ جا نمونا (Rationalization of real numbers of the types)

(i) $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

هيٺيان مثال ناطق ڪرڻ جي تصور (Concept of Rationalization) کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 $\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$ ناطق ڪريو:

چيدڪي $5-2\sqrt{3}$ سان ان جي ميل $5+2\sqrt{3}$ کي ضرب ۽ وڌ ڪريو.

حل:

$$\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1}{5+2\sqrt{3}}\times\frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{(5)^2-(2\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{25-12}$$
$$=\frac{5-2\sqrt{3}}{13}$$
$$=\frac{5}{13}-\frac{2}{13}\sqrt{3}$$

مثال 02 $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ناطق ڪريو:

حل:

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}$$
$$=\frac{5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1}$$
$$=5\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

مشق 3.4

.1 هيٺين جو ميل (Conjugate) لهو.

(i) $\sqrt{6}-2$ (ii) $10+\sqrt{10}$ (iii) $3-2\sqrt{2}$

(iv) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ (v) $5\sqrt{10}+\sqrt{3}$ (vi) $4\sqrt{5}-\sqrt{11}$

(vii) $\sqrt{11}+\sqrt{7}$ (viii) $9-3\sqrt{7}$

.2 هيٺين جي ڇيد کي ناطق ڪريو:

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+10}$ (ii) $\dfrac{1}{3+2\sqrt{5}}$ (iii) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}-3\sqrt{6}}$

(iv) $\dfrac{16}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$ (v) $\dfrac{9-\sqrt{2}}{9+\sqrt{2}}$ (vii) $\dfrac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}-3}$

(viii) $\dfrac{15}{7-2\sqrt{5}}$ (viii) $\dfrac{11-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+11}$ (ix) $\dfrac{1}{\sqrt{17}+4}$ (x) $\dfrac{1}{\sqrt{17}-4}$

.3 (i) جيڪڏهن $x=8-3\sqrt{7}$ ته $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2$ لهو.

(ii) جيڪڏهن $\dfrac{1}{x}=2\sqrt{28}-11$ ته x لهو.

(iii) جيڪڏهن $x=3-2\sqrt{2}$ ته $x-\dfrac{1}{x}, x^2-\dfrac{1}{x^2}, x+\dfrac{1}{x}, x^2+\dfrac{1}{x^2}$ ۽ $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ لهو:

.4 هيٺيان سادي صورت ۾ آڻيو:

(i) $\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{y^2+5}-y}{\sqrt{y^2+5}+y}$ (iii) $\dfrac{10}{6-\sqrt{y^2+36}}$

(iv) $\dfrac{5}{6+\sqrt{y^2+36}}$ (v) $\dfrac{15}{3-2\sqrt{2}}-\dfrac{5}{3+2\sqrt{2}}$

(vi) $\dfrac{6}{12+\sqrt{6}}-\dfrac{3}{12-\sqrt{6}}$

مشق ورجايو 3

.1 درست جوابن تي گول پايو:

(i) هر گهڻ رقمي آهي:

(a) هڪ غير ناطق اظهار (b) هڪ ناطق اظهار

(c) هڪ جملو (d) انهن مان ڪو به نه

(ii) هڪ اهڙو غيرناطق عدد جيڪو بن هڪ رقمي غيرناطق اظهارن جو جوڙ هجي انکي چئبو آهي:

(a) ٽه رقمي غيرناطق اظهار (b) ٻه رقمي غير ناطق اظهار

(c) غيرناطق اظهارن جو ميل (d) هڪ رقمي غير ناطق اظهار

(iii) $3x+2y-3$ آهي هڪ آلجبري:

(a) اظهار (b) مساوات (c) جملو (d) غيرمساوات

(iv) $3x^2y+5y^4-10$ جو درجو آهي:

(a) 4 (b) 5

(c) 3 (d) 10

(v) $\sqrt{7}$ آهي:

(a) هڪ رقمي غير ناطق اظهار (b) ٽه رقمي غير ناطق اظهار جو

(c) ٻه رقمي غير ناطق اظهار جو (d) غير ناطق اظهارن جي ميل جو

(vi) بن گهڻ رقمي اظهارن $p(x)$ ۽ $q(x)$ جي وڌاپت $\frac{p(x)}{q(x)}$ جتي $q(x) \neq 0$ انکي چئبو آهي:

(a) هڪ ناطق اظهار (b) هڪ غير ناطق اظهار

(c) گهڻ رقمي (d) ميل (conjugate)

(vii) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}$ جي برابر آهي:

(a) $\frac{2x}{x^2-y^2}$ (b) $\frac{2y}{x^2-y^2}$ (c) $\frac{-2x}{x^2-y^2}$ (d) $\frac{-2y}{x^2-y^2}$

(viii $2-\sqrt{3}$ جو ميل آهي:

(a) $2+\sqrt{3}$ (b) $-2-\sqrt{3}$ (c) $-2+\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{3}-4$

(ix) $a^3-3ab(a-b)-b^3$ جي برابر آهي:

(a) $(a-b)^3$ (b) $(a+b)^3$ (c) a^3+b^3 (d) a^3-b^3

(x) جيڪڏهن $a+b=5$ ۽ $a-b=3$ ته ab جو ملهه آهي:

(a) 4 (b) 5 (c) 3 (d) 6

(xi) $\left(5+\sqrt{15}\right)\left(5-\sqrt{15}\right)$ جي برابر آهي:

(a) 10 (b) 15 (c) 25 (d) 30

(xii) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ جي برابر آهي:

(a) $(a+b-c)^2$ (b) $(a+b+c)^2$ (c) $(a-b+c)^2$ (d) $(a+b+c)^3$

.1 خال پريو:

(i) ڪنهن به گهڻ رقميءَ جو درجو _____ آهي.

(ii) غير ناطق اظهار $2-\sqrt{3}$ جو ميل (Conjugate) _____ آهي.

(iii) ڪنهن به گهڻ رقمي اظهار $2x^3+x^2-4x^4+7x-9$ جو درجو _____ آهي.

(iv) $\frac{\sqrt{x}}{3x+5}$ هڪ _____ اظهار آهي $x \neq \frac{-5}{3}$

(v) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ _____ جي برابر آهي.

خلاصو

- هڪ گهڻ رقمي اظهار هڪ بدلجندڙ x ۾ لکي سگهجي ٿو.
- جيئن $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x^1+a_n$ هڪ گهڻ رقمي اظهار اڪثر $p(x)$ طور ظاهر ڪبو آهي.
- هڪ آلجبري اظهار جيڪو $\frac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ لکي سگهجي ٿو، جتي $q(x) \neq 0$ ، ۽ $q(x), p(x)$ ٻئي گهڻ رقمي اظهار آهن انکي x ۾ ناطق اظهار چئبو آهي.
- هڪ آلجبري اظهار جيڪو $\frac{p(x)}{q(x)}$ جي صورت ۾ نٿو لکي سگهجي، جتي $q(x) \neq 0$، ۽ $q(x), p(x)$ ٻئي گهڻ رقمي اظهار آهن انکي x ۾ غير ناطق اظهار چئبو آهي.
- هڪ گهڻ رقمي اظهار جيڪو صرف هڪ درجو رکي ٿو انکي هڪ درجي گهڻ رقمي چئبو آهي.
- هڪ گهڻ رقمي اظهار جيڪو به درجا رکي ٿو انکي به درجي گهڻ رقمي چئبو آهي.
- هڪ گهڻ رقمي اظهار جيڪو ٽي درجا رکي ٿو انکي ٽه درجي گهڻ رقمي چئبو آهي.

- هڪ گهڻ رقمي اظهار جيڪو ٽي يا ٽي کان وڌيڪ درجا رکي ٿو انکي وڌيڪ رقمي چئبو آهي.
- الجبري اظهار $\frac{p(x)}{q(x)}$ کي پنهجي سادي صورت ۾ چئجي ٿو، جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ گهڻ رقمي اظهار آهن ٻنهي جا عددي سرا (منڊ) سڄن عددن سان ۽ انهن کي ڪو به عام جزو (Common Factor) نه آهي.
- $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ ۽ $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$
- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$
- $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ ۽ $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- هڪ آلجبري اظهار کي غير ناطق اظهار (Surd) چئبو آهي، جنهن کي گهٽ ۾
- گهٽ هڪ رقم ٻي مول جي نشانيءَ واري هجي. مثال طور: $\sqrt{2},\sqrt{a-4},\sqrt{\frac{3}{10}}$ غير ناطق اظهار (Surd) آهن.
- جيڪڏهن $\sqrt[n]{a}$ هڪ غير ناطق اظهار آهي ۽ 'a' مڪمل (nth) وين سگهه نه آهي ته پوءِ انکي (nth) وين ترتيب جو غير ناطق اظهار (Surd) چئبو آهي.
- هڪ غيرناطق اظهار جنهن کي هڪ رقم هجي انکي هڪ رقمي اظهار(Monomial) چئبو آهي.
- هڪ غير ناطق عدد جيڪو ٻن هڪ رقمي ناطق اظهارن جو جوڙ يا فرق رکي يا هڪ درجي غير ناطق اظهار ۽ ناطق اظهار جو جوڙ هجي انکي ٻه درجي ناطق اظهار چئبو آهي.
- $\left(\sqrt{a}+c\sqrt{b}\right)$ ۽ $\left(\sqrt{a}-c\sqrt{b}\right)$ نموني جا اظهار هڪٻئي جا غير ناطق ميل آهن.
- $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ۽ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ مهيا ڪيل $a>0$ ۽ $b>0$
- جيڪڏهن ٻن غير ناطق اظهارن (Surds) جي ضرب اپت هڪ ناطق عدد آهي ته پوءِ هر هڪ غير ناطق اظهار (Surd) کي هڪٻئي جو ناطق ڪندڙ جزو چئبو آهي.
- ڏنل غيرناطق اظهار (surd) جي ضرب جو عمل انجي ناطق ڪندڙ جزي سان ناطق عدد حاصل ڪرڻ لاءِ ضرب اپت کي غير ناطق اظهار (surd) جو ناطق ٿيڻ چئبو آهي.

يونٽ 4

جزالهڻ
Factorization

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- هيٺين نمونن جي اظهارن جي جزن لهڻ جي عمل کي Recall ڪندا
- $ka + kb + kc$ (سيني رقمن ۾ مشترڪ جزا)
- $ac + ad + bc + bd$ (رقمن جي جوڙي ۾ مشترڪ جزا)
- $a^2 \pm 2ab + b^2$ (مڪمل چورس)
- $a^2 - b^2$ (ٻن چورسن جو فرق)
- $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$
- $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$
- هيٺين نمونن جي اظهارن جا جزا لهڻ.

نمونو I: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ ۽ $a^4 + b^4$

نمونو II: $x^2 + px + q$

نمونو III: $ax^2 + bx + c$

نمونو IV:

$(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$

$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$

نمونو V: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ۽ $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

نمونو VI: $a^3 \pm b^3$

- پاڇي واري سڌيان کي بيان ڪري ثابت ڪرڻ ۽ مثالن سان وضاحت ڪرڻ
- پاڇي لهڻ (وندِ ڪرڻ کان سواءِ) جڏهن مليل گهڻ رقمي، هڪ درجي واري گهڻ رقمي سان وندِ ٿيل هجي.
- گهڻ رقمي جي ٻڙي جي وضاحت ڪرڻ.
- جزن وارو سڌيان بيان ۽ ثابت ڪريو
- مصنوعي ورهاست واري طريقي کي بيان ڪرڻ.
- وندِ اپت ۽ پاڇي معلوم ڪرڻ جڏهن مليل گهڻ رقمي، هڪ درجي واري گهڻ رقمي سان وندِ ٿيل هجي.
- نامعلوم جي قيمت معلوم ڪرڻ، جيڪڏهن گهڻ رقمي جون ٻڙيون مليل هجن.
- نامعلوم جي قيمت معلوم ڪرڻ جيڪڏهن گهڻ رقمي جا جزا مليل هجن.
- جزن وارو سڌيان استعمال ڪري ٽن درجن واري گهڻ رقمي جا جزا لهڻ.

تعارف:

اسان جزا لهڻ بابت مطالعو ڪنداسين، جنهن جو رياضي ۾ اهم ڪردار آهي. اهي منجهيل اظهارن کي (آسان) سادي اظهارن ۾ تبديل ڪرڻ لاءِ مددگارآهن

4.1 جزا لهڻ Factorization

فرض ڪريو تہ $p(x)$,$q(x)$ ۽ $r(x)$ تي گهڻ رقميون آهن، اهڙي طرح جو هتي $p(x)\times q(x)=r(x)$ آهي، گهڻ رقمي $p(x)$, $r(x)$ ۽ $q(x)$ جي ضرب اپت آهي ۽ گهڻ رقمي $p(x)$ ۽ $q(x)$ کي $r(x)$ جا جزا چئبو آهي.

گهڻ رقمين جي جزن جا ڪجهہ مثال هيٺ ڏجن ٿا.

(i) $6x^2y^3=(2\times3)(x\times x)(y\times y\times y)$

(ii) $ax+aby+abcz=a(x+by+bcz)$

(iii) $5x+15xy=5x(1+3y)$

(iv) $x-y=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

4.1.1 هيٺين نمونن جي اظهارن جي جزن لهڻ جي عمل کي ياد ڪرڻ

(i) $ka+kb+kc$ (سڀني رقمن ۾ مشترڪ جزا)

(ii) $ac+ad+bc+bd$ (رقمن جي جوڙي ۾ مشترڪ جزا)

(iii) $a^2\pm2ab+b^2$ (مڪمل چورس)

(iv) a^2-b^2 (بن چورسن جو فرق)

(v) $(a^2\pm2ab+b^2)-c^2$

(vi) $(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2$

(i) $ka+kb+kc$ نموني جا جزا لهڻ

اچو تہ هيٺيان مثال ڏسو.

مثال 01 $10a+15b-20c$ جا جزا لهو.

حل: $10a+15b-20c$

$5(2a+3b-4c)$ (5 عدد اظهار مان common ڪرڻ سان)

مثال 02 $\frac{4}{9}-\frac{8}{12}x-\frac{16}{15}xy$ جا جزا لهو

حل:

$$\frac{4}{9}-\frac{8}{12}x-\frac{16}{15}xy$$

$$=\frac{4}{3\cdot 3}-\frac{4\cdot 2\cdot}{3\cdot 4}x-\frac{4\ 4}{3\cdot 5}xy$$

$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}\right)-x\frac{4}{5}xy$ ($\frac{4}{3}$ کي اظهارن مان common ڪرڻ سان)

(ii) $ac+ad+bc+bd$ نموني جا جزا لهڻ.

هيٺيان مثال ڏسو.

مثال 01 $3a-ac-3c+c^2$ جا جزا لهو.

حل:

$$3a-ac-3c+c^2$$

$$= a(3-c)-c(3-c)$$

$$= (3-c)(a-c)$$

مثال 02 $9y^2z+3xyz-9xy^2-3x^2y$ جا جزا لهو.

حل:

$$9y^2z+3xyz-9xy^2-3x^2y$$

$$= 9y^2z+3xyz-9xy^2-3x^2y$$

$$= 3yz(3y+x)-3xy(3y+x)$$

$$= (3y+x)(3yz-3xy)$$

$$= (3y+x)\times 3y(z-x)$$

$3y(x+3y)(z-x)$ گهربل جزا آهن.

(iii) $a^2\pm 2ab+b^2$ نموني جا جزا لهڻ

اسان کي خبر آهي تہ

$$a^2+2ab+b^2=(a)^2+2(a)(b)+(b)^2=(a+b)^2$$

۽

$$a^2-2ab+b^2=(a)^2-2(a)(b)+(b)^2=(a-b)^2$$

اچو تہ هيٺيان مثال ڏسون.

مثال 01 $16a^2 + 40ab + 25b^2$ جا جزا لهو.

حل: $16a^2 + 40ab + 25b^2$

$$= (4a)^2 + 2(4a)(5b) + (5b)^2$$

$$= (4a + 5b)^2 \qquad [\because a^2+2ab+b^2=(a+b)^2]$$

مثال 02 $4p^2 - 28pq + 49q^2$ جا جزا لهو.

حل: $4p^2 - 28pq + 49q^2$

$$= (2p)^2 - 2(2p)(7q) + (7q)^2$$

$$= (2p - 7q)^2 \qquad [\because a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2]$$

(iv) $a^2 - b^2$ نموني جا جزا لهڻ.

اچو تہ هيٺيان مثال ڏسون.

مثال 01 $4x^2 - 1$ جا جزا لهو.

حل: $4x^2 - 1$

$$= (2x)^2 - (1)^2$$

$$= (2x - 1)(2x + 1) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

مثال 02 $96y^2 - 6z^2$ جا جزا لهو.

حل: $96y^2 - 6z^2$

$$= 6(16y^2 - z^2)$$

$$= 6[(4y)^2 - z^2]$$

$$= 6(4y - z)(4y + z) \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

مثال 03 $9r^4 - (6s - t^2)^2$ جا جزا لهو.

حل: $9r^4 - (6s - t^2)^2$

$$= (3r^2)^2 - (6s - t^2)^2$$

$$= [3r^2 - (6s - t^2)][3r^2 + (6s - t^2)], \qquad [\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$$

$$= (3r^2 - 6s + t^2)(3r^2 + 6s - t^2)$$

(v) $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$ نموني جا جزا لهڻ.

اچو تہ هيٺيان مثال ڏسون.

مثال 01 $x^2 + 4xy^2 + 4y^4 - 4z^2$ جا جزا لهو.

حل: $x^2 + 4xy^2 + 4y^4 - 4z^2$

$= \{(x)^2 + 2(x)(2y^2) + (2y^2)^2\} - (2z)^2$

$= (x + 2y^2)^2 - (2z)^2$

$= \{(x+2y^2) + 2z\}\{(x + 2y^2) - 2z\}$ $[\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$

$= (x + 2y^2 + 2z)(x + 2y^2 - 2z)$

مثال 02 $9p^2 - 6pq + q^2 - 9r^2$ جا جزا لهو.

حل: $9p^2 - 6pq + q^2 - 9r^2$

$= (3p)^2 - 2(3p)(q) + q^2 - (3r)^2$

$= (3p - q)^2 - (3r)^2$

$= (3p - q + 3r)(3p - q - 3r)$ $[\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$

(vi) $(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$ نموني جا جزا لهڻ.

مثال 01 $(\sqrt{xy})^2 - (\sqrt{z})^2$ جا جزا لهو.

حل: $(\sqrt{xy})^2 - (\sqrt{z})^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $= (\sqrt{xy} - \sqrt{z})(\sqrt{xy} + \sqrt{z})$

مشق 4.1

.1 هيٺين جا جزا لهو.

(i) $4x + 16y + 24z$ (ii) $x^2 + 3x^2y + 4x^2y^2z$

(iii) $3pqr + 6pqt + 3pqs$ (iv) $9qr(s^2 + t^2) + 18q^2r^2(s^2 + t^2)$

(v) $\frac{z^2x}{16} - \frac{x^2z^2}{8} + \frac{x^2z^3}{12}$ (vi) $a(x-y) - a^2b(x-y) + a^2b^2(x-y)$

.2 هيٺين جا جزا لهو.

(i) $7x + xz + 7z + z^2$

(ii) $9a^2b + 18ab^2 - 6ac - 12bc$

(iii) $6t - 12p + 4tq - 8pq$

(iv) $r^2 + 9rs - 7rs - 63s^2$

(v) $\frac{y^2}{4} - \frac{4^2 z}{4} - \frac{z^2 t}{9} + \frac{z^2 tz}{9}$

(vi) $\frac{10xy}{11} + \frac{5xz}{11} - \frac{14yz}{11} - \frac{7xy}{11}$

.3 جزا معلوم ڪريو.

(i) $4a^2 + 12ab + 9b^2$

(ii) $36x^4 + 12x^2 + 1$

(iii) $x^2 + 1 + \frac{1}{4x^2}$

(iv) $81y^2 + 144yz + 64z^2$

(v) $625 + 50a^2b + a^4b^2$

(vi) $a^2 + 0.4a + 0.04$

.4 جزا لهو.

(i) $b^4 - 4b^2c^2 + 4c^4$

(ii) $\frac{9}{4}x^4 - 2 + \frac{4}{9x^4}$

(iii) $2a^3b^3 - 16a^2b^4 + 32ab^5$

(iv) $9(p+q)^2 - 6(p+q)r^2 + r^4$

(v) $x^2y^2 - 0.1xy + 0.0025$

(vi) $(a-b)^2 - 18(a-b) + 81$

.5 جزا لهو.

(i) $4a^2 - 9b^2$

(ii) $16x^2 - 25y^2$

(iii) $100x^2z^2 - y^4$

(iv) $\frac{1}{100}x^4 - 100y^4$

(v) $\frac{64}{81}f^2 - \frac{81}{64}g^4$

(vi) $\frac{x^4}{121} - 121y^2$

.6 جزا معلوم ڪريو.

(i) $(2x+z)^2 - (2x-z)^2$

(ii) $(4a-9b)^2 - (2a+5b)^2$

(iii) $169x^4 - (3t+4)^2$

(iv) $(9x^2 - 4y^2)^2 - (4x^2 - y^2)^2$

(v) $\left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(b^2 - 2 + \frac{1}{b^2}\right)$

(vi) $9x^2 + \frac{1}{9x^2} - 4y^2 - \frac{1}{4y^2} + 4$

.7 جزا معلوم ڪريو.

(i) $(x^2 + 2xy + y^2) - 9z^4$

(ii) $(4a^2 + 8ab^2 + 4b^4) - 9c^2$

(iii) $16d^4 - (c^4 - 2c^2d + d^2)$

(iv) $4(x^2 + 2xy^2 + y^4) - 9y^6$

(v) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$

(vi) $4x^2 - y^2 - 2y - 1$

8. جزا لهو.

(i) $(\sqrt{ab})^2 - (\sqrt{c})^2$ (ii) $(\sqrt{4x})^2 - (\sqrt{9y})^2$

(iii) $(\sqrt{yz})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)^2$ (iv) $xzt - \frac{1}{t}$

4.1.2 هيٺين نمونن جي اظهارن جا جزا لهو.

نمونو I: $a^4 + a^2b^2 + b^4$ or $a^4 + 4b^4$

هن نموني ۾ اُهي آلجبري اظهار شامل آهن جيڪي نہ مڪمل چورس ۽ نہ وري بن چورسن جي فرق واري صورت ۾ آهن.

هن نموني جي جزن لهڻ لاءِ هيٺين مثالن ۾ وضاحت ڪيل آهي.

مثال 01 $a^4 + a^2b^2 + b^4$ جا جزا لهو.

حل: $a^4 + a^2b^2 + b^4$

$= (a^4 + b^4) + a^2b^2$ (رقمن کي ترتيب ۾ لکو)

$= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 2a^2b^2 + a^2b^2$ ($2a^2b^2$ کي جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ سان)

$= \{(a^2)^2 + 2(a^2)(b^2) + (b^2)^2\} - a^2b^2$

$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$

$= \{(a^2 + b^2) - ab\}\{(a^2 + b^2) + ab\}$ $[\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$

$= (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$ گهربل جزا آهن.

مثال 02 $a^4 + 4b^4$ جا جزا لهو.

حل: $a^4 + 4b^4$

$= (a^2)^2 + (2b^2)^2$

$= (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) - 2(a^2)(2b^2)$ [$2(a^2)(2b^2)$ جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ سان]

$= \{(a^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) + (2b^2)^2\} - 4a^2b^2$

$= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$

$= \{(a^2 + 2b^2) - 2ab\}\{(a^2 + 2b^2) + 2ab\}$ $[\because a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$

$(a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$ گهربل جزا آهن.

مثال 03 x^8+x^4+1 جا جزا لهو.

حل: x^8+x^4+1

$$
\begin{aligned}
&= (x^8+1)+x^4 \\
&= \{(x^4)^2+(1)^2+2(x^4)(1)\}-2(x^4)(1)+x^4 \\
&= (x^4+1)^2-x^4 \\
&= (x^4+1)^2-(x^2)^2 \\
&= \{(x^4+1)-x^2\}\{(x^4+1)+x^2\} \qquad [\because a^2-b^2=(a-b)(a+b)] \\
&= \{(x^4+x^2+1)\}(x^4-x^2+1) \\
&= \{(x^2+1)^2-2x^2+x^2\}(x^4-x^2+1) \\
&= \{(x^2+1)^2-x^2\}(x^4-x^2+1)
\end{aligned}
$$

[$2(x^4)(1)$ جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ سان]

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$ گهربل جزا آهن.

نمونو II: x^2+px+q

هن نموني جي اظهار جي جزن لهڻ لاءِ وچين رقم کي ٽوڙبو آهي.

مثال 01 $y^2+7y+12$ جا جزا لهو.

حل: $y^2+7y+12$

$$
\begin{aligned}
&= y^2+3y+4y+12 \\
&= y(y+3)+4(y+3) \\
&= (y+3)(y+4)
\end{aligned}
$$

مثال 02 $x^2+13xy-30y^2$ جا جزا لهو.

حل: $x^2+13xy-30y^2$

$$
\begin{aligned}
&= x^2+15xy-2xy-30y^2 \\
&= x(x+15)-2y(x+15) \\
&= (x+15)(x-2y)
\end{aligned}
$$

نمونو III: $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ جڏهن ته

$ax^2+bx+c=0$ جي اظهار جا جزا لهڻ لاءِ هيٺين قدمن جي ضرورت آهي.

(i) ac جي ضرب اپت لهو جڏهن تہ a ، عددي منڊيو آهي x^2 جو ۽ c مستقل آهي.

(ii) بہ عدد x_1 ۽ x_2 لهو، جيئن تہ $x_1+x_2=b$ ۽ $x_1x_2=ac$

هن طريقي جي وضاحت لاءِ هيٺيان مثال مددگار ثابت ٿيندا

مثال 01 $10x^2-19xy+6y^2$ جا جزا لهو.

حل: $10x^2-19xy+6y^2$

$= 10x^2-15xy-4xy+6y^2$

$= 5x(2x-3y)-2y(2x-3y)$

$= (2x-3y)(5x-2y)$

مثال 02 $4x^2+12x+5$ جا جزا لهو.

حل: $4x^2+12x+5$

$= 4x^2+10x+2x+5$

$= 2x(2x+5)+1(2x+5)$

$= (2x+5)(2x+1)$

مشق 4.2

1. هيٺين جا جزا لهو.

(i) $a^4+a^2x^2+x^2$ (ii) b^4+b^2+1

(iii) $a^8+a^4x^4+x^8$ (iv) z^8+z^4+1

2. جزا لهو.

(i) $42x^2-8x-2$ (ii) $21z^2-4z-1$

(iii) $9y^2+21yz^4-8y^2$ (iv) $24a^2-18a+27$

3. جزا لهو.

(i) x^4+4y^2 (ii) $36x^4z^4+9y^4$

(iii) $4t^4+625$ (iv) $4t^4+1$

4. جزا لهو.

(i) $x^2+3x-10$ (ii) $a^2b^2-3ab-10$

(iii) $y^2+7y-98$ (iv) $x^2y^2z^2+2xyz-24$

5. جزا لهو.

(i) $121x^4+11x^2+2$ (ii) $42z^4+50z^2+8$

(iii) $4x^2+12x+5$ (iv) $3x^2-38xy-13y^2$

6. جزا لهو.

(i) $81x^4+36x^2y^2+16y^4$ (ii) x^4+x^2+25

(iii) y^4-7y^2-8 (iv) $16a^2-97a^2b^2+81b^2$

نمونو IV: $(ax^2+bx+c)(ax^2+bx+d)+k$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+kx^2$

اسان هنن نمونن جي اظهارن جي جزن لهڻ جي طريقي کي هيٺين مثالن جي مدد سان واضح ڪنداسين.

مثال 01 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120$ جا جزا لهو

حل: $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-120$

فرض ڪريو تہ $x^2+5x=t$ تہ پوءِ

$$
\begin{aligned}
&(t+4)(t+6)-120\\
&= t^2+10t+24-120\\
&= t^2+10t-96\\
&= t^2-6t+16t-96 \quad \text{(جزن ڪرڻ سان)}\\
&= t(t-6)+16(t-6)\\
&= (t-6)(t+16)\\
&= (x^2+5x-6)(x^2+5x+16) \quad \because t=x^2+5x\\
&= (x^2-x+6x-6)(x^2+5x+16)\\
&= [x(x-1)+6(x-1)](x^2+5x+16)\\
&= (x-1)(x+6)(x^2+5x+16)
\end{aligned}
$$

مثال 02 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$ جا جزا لهو.

حل: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15$

هتي $1+4=2+3=5$

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15$ (جزن کي ترتيب ۾ رکڻ سان)

$= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-15$

$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-15$

$= (t+4)(t+6)-15$ جڏهن ته $t = x^2+5x$

$= t^2+10t+24-15$

$= t^2+10t+9$

$= (t+1)(t+9)$

$= (x^2+5x+1)(x^2+5x+9)$ $\because t = x^2+5x$

مثال 03 $(x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$ جا جزا لهو.

حل: $(x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$

$= (x+2)(x-2)(x-3)(x+3)+(-2x^2)$

$= (x^2-2^2)(x^2-3^2)-2x^2$ $[\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2)]$

$= (x^2-4)(x^2-9)-2x^2$

$= x^4-9x^2-4x^4+36-2x^2$

$= x^4-15x^2+36$

$= x^4-3x^2-12x^2+36$

$= x^2(x^2-3)-12(x^2-3)$

$= (x^2-3)(x^2-12)$

$= [(x)^2-(\sqrt{3})^2][(x)^2-(2\sqrt{3})^2]$

$= (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$

مشق 4.3

1. هيٺين جا جزا لهو.

(i) $(x^2-4x-5)(x^2-4x-12)-144$

(ii) $(x^2+5x+6)(x^2+5x+4)-3$

(iii) $(x^2-2x+3)(x^2-2x+4)-42$

(iv) $(x^2-8x+4)(x^2-8x-4)+15$

(v) $(x^2+9x-1)(x^2+9x+5)-7$

(vi) $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120$

2. جزا لهو.

(i) $(x+1)(x+2)\ (x+3)(x+4)-48$

(ii) $(x+2)(x+3)\ (x+4)(x+5)+24$

(iii) $(x-1)(x-2)\ (x-3)(x-4)-99$

(iv) $(x-3)(x-5)\ (x-7)(x-9)+15$

(v) $(x-1)(x-2)\ (x-3)(x-4)-224$

(vi) $(x-1)(x-3)\ (x-4)(x-5)-255$

3. جزا لهو.

(i) $(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)-2x^2$

(ii) $(x-1)(x+1)(x+3)\ (x-3)-3x^2-23$

(iii) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)+4x^2$

(iv) $(x-2)(x+2)(x-4)\ (x+4)-14x^2$

(v) $(x+5)(x+2)(x-5)(x-2)+4x^2$

(vi) $(x^2-x-12)(x^2-x-12)-x^2$

نمونو V: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ۽ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

اسان کي خبر آهي تہ

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

۽

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

تہ مٿي ڏنل نموني جي جزن کي سمجهڻ لاءِ هيٺيان مثال مددگار ٿيندا.

مثال 01 جزا لهو (i) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ (ii) $64x^3-12x^2+\frac{3x}{4}-\frac{1}{64}$

حل (i): $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

$=(2x)^3+3(2x)^2(y)+3(2x)(y)^2+(y)^3 \qquad [\because (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3]$

$=(2x+y)^3$

حل (ii): $64x^3 - 12x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{64}$

$$=(4x)^3 - 3(4x)^2\left(\frac{1}{4}\right) + 3(4x)\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 \qquad [\because (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3]$$

$$=\left(4x - \frac{1}{4}\right)^3$$

مشق 4.4

1. هيٺين جا جزا لهو.

(i) $b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$ (ii) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

(iii) $64x^3 + 12x^2 + 3x + \frac{1}{64}$ (iv) $8x^3 + 36x + 54x + 27$

(v) $\frac{1}{27} + \frac{1}{3}y^2 + y^4 + y^6$ (vi) $\frac{8}{27}x^3 + 2x^2y + 3xy + \frac{27}{8}y^3$

(vii) $\frac{64}{9} + \frac{16}{3}x^2 + 4x + x^3$ (viii) $\frac{z^3}{8} + \frac{z^2y}{4} + \frac{zy^2}{6} + \frac{y^3}{27}$

2. جزا لهو.

(i) $d^3 - 6d^2c + 12dc^2 - 8c^3$ (ii) $x^6 - \frac{16}{3}x^4 + 4x^2 - \frac{64}{9}$

(iii) $\frac{x^3}{125} - \frac{3}{5}x^2y + \frac{3}{25}xy^2 - y^3$ (iv) $125z^3 - 75z^2y^2 + 15zy^4 - y^6$

(v) $\frac{z^3}{27} - \frac{z^2y}{3} + zy^2 - 216y^3$ (vi) $\frac{b^6}{27} - \frac{b^4c^2}{4} + \frac{b^2c^4}{6} - \frac{c^6}{8}$

(vii) $216 - \frac{9}{2}z^2 + 54z - \frac{z^3}{8}$ (viii) $\frac{8}{27}x^3 - 2x^2y + 3xy - \frac{27}{8}y^3$

نمونو VI: $a^3 \pm b^3$

اسان کي خبر آهي تہ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$,

۽ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

تہ مٿي ڏنل نموني جي جزن کي سمجهڻ لاءِ هيٺيان مثال مددگار ٿيندا.

مثال 01 $8x^3+27$ جا جزا لهو

حل: $8x^3+27$

$$= (2x)^3+(3)^3$$
$$= (2x+3)[(2x)^2-(2x)(3)+(3)^2] \quad [\because a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)]$$
$$= (2x+3)(4x^2-6x+9)$$

تنهنڪري

$$8x^3+27=(2x+3)(4x^2-6x+9)$$

مثال 02 $108x^3-256xz^3$ جا جزا لهو

حل: $108x^4-256xz^3$

$$= 4x(27x^3-64z^3)$$
$$= 4x[(3x)^3-(4z)^3 \quad [\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)]$$
$$= 4x(3x-4z)[(3x)^2+(3x)(4z)+(4z)^2]$$
$$= 4x(3x-4z)(9x^2+12xz+16z^2)$$

تنهنڪزي

$$108x^3-256xz^3=4x(3x-4z)[(9x^2+12xz+16z^2).$$

مشق 4.5

1. هيٺين جا جزا لهو.

(i) x^3+8y^3 (ii) $a^{11}+a^2b^9$ (iii) a^6+1 (iv) a^3b^3+512

(v) $a^3b^3+27b^6$ (vi) $\frac{x^3}{125}+\frac{125}{x^3}$ (vii) $x^9+x^3y^6z^9$ (viii) $\frac{x^6}{27}+\frac{8}{x^3}$

2. جزا لهو.

(i) x^3-8y^3 (ii) x^9-8y^9 (iii) $1000-\frac{x^3y^3}{125}$ (iv) a^6-b^6

(v) $\frac{x^6}{64}-\frac{64}{x^{12}}$ (vi) $x^{12}-y^{12}$ (vii) $\frac{27}{x^3}-8y^6$ (viii) $8x^6-\frac{1}{729}$

4.2 پاڇي ۽ جزن وارو سڌيان

تي يا وڌيڪ درجن وارين گهڻ رقمي اظهارن جي جزن معلوم ڪرڻ لاءِ گهٽو ڪري پاڇي ۽ جزن وارا سڌيان استعمال ٿيندا آهن.

4.2.1: پاڇي واري سڌيان کي بيان ڪري ثابت ڪريو، ۽ مثالن سان وضاحت ڪريو.

بيان:

جيڪڏهن ڪنهن $n \geq 1$ درجي واري گهڻ رقمي $p(x)$ کي $(x-a)$ سان وڌ ڪجي ته پاڇي $R = p(a)$ ملندي.

اسان $p(x)$ کي $p(x)=q(x)(x-a)+R$ لکي سگهون ٿا.(جنهن کي وڌ جو الگورٿم چئبو آهي) جڏهن ته R مستقل (پاڇي) آهي۽ $q(x)$ جون درجو $p(x)$ کان هڪ گهٽ آهي.

ثابتي:

وڌ جي الگورٿم تحت

$$p(x) = q(x)(x-a)+R,$$

فرض ڪريو ته $x=a$ ته پوءِ

$$p(a) = q(a)\times (a-a)+R,$$

$$p(a) = q(a)\times 0+R$$

$$\Rightarrow \quad p(a) = R =$$ پاڇي.

4.2.2: پاڇي معلوم ڪريو (وڌ ڪرڻ کان سواءِ) جڏهن مليل گهڻ رقمي هڪ درجي واري گهڻ رقمي سان وردِ ٿيل هجي.

هيٺيان مثال، پاڇي واري سڌيان استعمال ڪرڻ ۾ اسان لاءِ مددگار ثابت ٿيندا.

مثال 01 پاڇي لهو جڏهن x^2-3x+4 کي $x-2$ سان وڌ ڪجي.

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^2-3x+4$

هتي پاڇي واري سڌيان مطابق $a=2$ آهي.

$$p(2) = (2)^2 - 3(2) + 4$$

$$= 4 - 6 + 4 = 8 - 6 = 2$$

$$p(2) = R = 2$$

تنهنڪري پاڇي آهي 2

مثال 02 k جو ملهه لهو، جيڪڏهن گهڻ رقمي x^3+kx^2+3x-4 کي $x+2$ سان وندڻ ڪجي تہ پاڇي -2 بچي.

حل: هتي $p(x) = x^3+kx^2+3x-4$

$$\therefore \quad p(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 + 3(-2) - 4$$

$$\Rightarrow \quad -2 = 4k - 18$$

پاڇي $= -2$

$$\Rightarrow \quad 4k = -2 + 18$$

$$\Rightarrow \quad 4k = 16$$

$$\Rightarrow \quad k = 4,$$

تنهنڪري k جو ملهه آهي 4

4.2.3: گهڻ رقمي جي ٻڙي

جيڪڏهن $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$ حقيقي منڊي (coefficient) واري گهڻ رقمي هجي ۽ جيڪڏهن گهڻ رقمي $p(x)$ ۾ $x=a$ وجهڻ سان $p(a)=0$ ملي تہ "a" کي $p(x)$ گهڻي رقمي جي ٻڙي چئبو آهي.

مثال $P(x) = x + 7$ تہ پوءِ 7- گهڻ رقمي جي ٻڙي جيئن $P(-7) = -7 + 7 = 0$

4.2.4: جزن وارو سڌيان بيان ڪري ثابت ڪريو

بيان: جيڪڏهن $p(a) = 0$ تہ هڪ درجي گهڻ رقمي $x-a$ $p(x)$ گهڻ رقمي جو جزو آهي.

ثابتي: فرض ڪريو تہ $q(x)$ کي $x - a$ سان وندڻ ڪجي تہ پوءِ

$$p(x)=(x-a)q(x)+R$$

پاڇي واري سڌيان مطابق $R = p(a)$

تنهنڪري $p(x) = q(x)(x-a)+p(a)$

جيڪڏهن $p(a)=0$ هجي تہ پوءِ $p(x)=q(x)(x-a)$ ٿيندو. جڏهن تہ $(x-a)$ گهڻ رقمي $p(x)$ جو هڪ جزو آهي

هيٺيان مثال جزن واري سڌيان کي استعمال ڪرڻ ۾ مددگار ثابت ٿيندا.

مثال 01 معلوم ڪريو ته $x+2$ ، جزو آهي $x^3+\frac{9}{2}x^2+3x-4$ جو يا نه

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^3+\frac{9x^2}{2}+3x-4$

$$\therefore R=p(-2)=(-2)^3+\frac{9}{2}(-2)^2+3(-2)-4$$
$$=-8+18-6-4$$
$$=-18+18=0\Rightarrow R=0,$$

پاچي = 0

x + 2 جزو آهي P(x) جو

مثال 02 معلوم ڪريو ته x + 3 جزو آهي $x^3-x^2-8x+12$ جو.

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^3-x^2-8x+12$

$$R=p(-3)=(-3)^3-(-3)^2-8(-3)+12$$
$$=-27-9+24+12$$
$$R=p(-3)=-36+36=0$$

x+3 جزو آهي $x^3-x^2-8x+12$ جو.

مشق 4.6

.1 پاچي وارو سڌيان استعمال ڪري پاچي لهو جڏهن

(i) $x^3-6x^2+11x-8$ کي $(x-1)$ سان وندڻ ڪجي

(ii) $x^3+6x^2+11x+8$ کي $(x+1)$ سان وندڻ ڪجي

(iii) $x^3-x^2-26+40$ کي $(x-2)$ سان وندڻ ڪجي

(iv) $x^3-3x^2+4x-14$ کي $(x+2)$ سان وندڻ ڪجي

(v) $(2y-1)^3+6(3+4y)-9$ کي $(2y+1)$ سان وندڻ ڪجي

(vi) $4y^3-4y+3$ کي $(2y-1)$ سان وندڻ ڪجي

(vii) $(2y+1)^3-6(3-4y)-10$ کي $(2y-1)$ سان وندڻ ڪجي

(viii) $x^4+x^2y^2+y^4$ کي $(x-y)$ سان وندڻ ڪجي

4. m جو ملهه لهو، جيڪڏهن $p(y) = my^3+4y^2+3y-4$ ۽ $q(y) = y^3-4y+m$ کي $(y-3)$ سان وندِ ڪجي تہ ساڳي پاڇي بچي.

5. جيڪڏهن گهڻ رقمي $4x^3-7x^2+6x-3k$ کي $(x+2)$ سان پورو وندي سگهجي تہ k جو ملهه لهو.

6. جيڪڏهن گهڻ رقمي $3y^2-4ry-4r^2$ جو جزو آهي $(y+2)$ تہ r جو ملهه لهو.

4.3 مصنوعي ورهاست (Synthetic Division)

مصنوعي ورهاست، گهڻ رقمي کي، هڪ درجي گهڻ رقمي سان وندِ ڪرڻ جو طريقو آهي.

4.3.1: مصنوعي (Synthetic) ورهاست وارو طريقو بيان ڪريو.

مصنوعي ورهاست واري طريقي کي هيٺ ڏنل مثالن جي مدد سان بيان ڪيو ويوآهي.

مثال 01 مصنوعي ورهاست کي استعمال ڪري گهڻ رقمي $p(x)=x^3-3x^2+5x+7$ کي $(x-1)$ سان وندِ ڪريو.

حل: هتي ، $(x-1=0 \Rightarrow x=1$ ضرب ڪندڙ آهي)

گهڻ رقمي جا عدد سَرَ (منڊا) لکو

تنهنڪري

1	1	−3	5	7	(قطار 1)
		1	−2	3	(قطار 2)
	1	−2	3	10= R	(قطار 3)

تفصيل

قدم I: گهڻ رقمي P(x) جا عددي سَرَ (منڊا) ۽ منتقل پهرين قطار ۾ وڏنندائي ترتيب ۾ لکو.

قدم II: پهريون عددي سرو (منڊو) 3 قطار ۾ ان جي هيٺيان (1 قطار) ساڳي جاءِ تي لکو.

قدم III: ضرب ڪندڙ 1 ۽ عددي سَري 1 جي ضرب اپت کي ٻئي عددي سري جي هيٺيان قطار 2 ۾ لکو۽ جوڙ ڪري، ان جو جوڙ قطار 3 ۾ لکو ۽ ساڳي عمل کي دهرايو.

تہ پوءِ $q(x)=x^2-2x+3$ ۽ $p(1) = R = 10$

نوٽ: $q(x)$ جو درجو = $p(x)$ جو درجو-1 $3-1=2$
ڪريو تہ ۽ 3 قطار جو آخري رڪن، پاڇي آهي.

4.3.2 مصنوعي ورهاست کي استعمال ڪري

(a) وندِ اپت ۽ پاڇي معلوم ڪريو جڏهن مليل گهڻ رقمي هڪ درجي واري گهڻ رقمي سان وندِ ٿيل آهي.

(b) نامعلومن جي قيمت معلوم ڪريو، جيڪڏهن گهڻ رقمين جون ٻڙيو مليل هجن.

(c) نامعلومن جي قيمت معلوم ڪريو جيڪڏهن گهڻ رقمي جا جزا مليل هجن.

مثال 01 وندِ اپت ۽ پاڇي معلوم ڪريو جڏهن،

$p(x) = x^4-12x+50x^2-84x+49$ کي هڪ درجي گهڻ رقمي $x-5$ سان وندِ ڪجي.

حل: اسان کي مليل آهي تہ $p(x)=x^4-12x^3+50x^2-84x+49$,

۽ هڪ درجي گهڻ رقمي $x-a=x-5,\ a=5$ ضرب ڪندڙ $q(x)=?$ ۽ $p(5)=R=?$ آهي.

وندِ اپت ۽ پاڇي معلوم ڪرڻ لاءِ اسان مصنوعي ورهاست استعمال ڪنداسين.

(قطار 1)	49	−84	50	−12	1	5
(قطار 2)	−45	75	−35	5		
(قطار 3)	4 = R	−9	15	−7	1	

تہ پوءِ $q(x)=x^3-7x^2+15x-9$ ۽ $R=4$ گهربل وندِاپت ۽ پاڇي آهن.

نوٽ: $R\neq 0$ تنهنڪري $(x-5)$ مليل گهڻ رقمي $p(x)$ جو جزو نہ آهي.

مثال 02 m جي ڪهڙي ملهہ لاءِ ، 1 گهڻ رقمي جي ٻڙي آهي.

حل: مليل آهي تہ $p(x)= x^3-mx^2+x-1$

هتي ضرب ڪندڙ $a=1$ آهي

تہ مصنوعي ورهاست واري طريقي مطابق اسان وٽ

1	1	$-m$	1	-1	(قطار 1)
		1	$1-m$	$2-m$	(قطار 2)
	1	$1-m$	$2-m$	$1-m=R,$	(قطار 3)

جيئن تہ 1 گھڻ رقمي جي ٻڙي آهي تنهنڪري x-1 هڪ جزو آهي

هتي R=0

تہ پوءِ $\Rightarrow \quad 1-m=0$

$m=1$

تہ پوءِ گھڻ رقمي جي ٻڙي لاءِ m برابر ٿيندي 1 جي.

مشق 4.7

.1 مصنوعي ورهاست واري طريقي سان هيٺ ڏنل گھڻ رقمين کي وند ڪريو ۽ انهن جي وند اپت ۽ پاڇي پڻ معلوم ڪريو.

(i) $p(x)=x^3-x^2+x-1$ by $x-1$ (ii) $p(x)=x^3-x^2-x-1$ by $x+1$

(iii) $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$ by $x+2$ (iv) $p(x)=x^3+6x^2-11x-6$ by $x-2$

(v) $p(x)=x^4-x^3+x^2-x-1$ by $x+2$ (vi) $p(x)=x^4+x^3-x^2+x-1$ by $x-1$

(vii) $p(x)=x^5+x^3-2x^2-3$ by $x+3$ (viii) $p(x)=x^5-x^4+x^3-3x^2+6x-6$ by $x-3$

(ix) $p(x)=2x^4-2x^3+100x^2-168x+95$ by $x-2$

(x) $p(x)=6x^4-72x^3+300x^2-564x+270$ by $x-5$

.2 K جي ڪهڙي ملهه لاءِ، گھڻ رقمي $p(x)=x^3+x^2-14x-k$ جو جزو 2- ٻڙي آهي.

.3 m جي ڪهڙي ملهه لاءِ $x^3+mx^2-7x-10$ جو جزو x-2 ٿيندو.

.4 m جي ڪهڙي ملهه لاءِ $x^3-7x^2+6x-3m$ جو x+2 جزو آهي.

.5 k جي ڪهڙي ملهه لاءِ $P(x)=2x^3-4mx^2+x-1$ گھڻ رقمي -1 جي ، ٻڙي آهي.

4.4 ٽ درجي گهڻ رقمين جا جزا لهڻ

اسان اڳ ۾ هڪ درجي ۽ ٻه درجي گهڻ رقمين کي حل ڪرڻ جا طريقا پڙهي آيا آهيون. هاڻ اسان جزن واري سڌيان کي استعمال ڪري ٽ درجي گهڻ رقمين جو ملهه لهنداسين.

4.4.1 جزن وارو سڌيان استعمال ڪري ٽ درجن گهڻ رقمين جا جزا لهڻ ٽ درجي گهڻ

رقمين جا جزا، جزن واري سڌيان سان لهڻ جي لاءِ، اهو ضروري آهي ته گهڻ رقمين جو هڪ جزو يا وڌيڪ ٻڙيو معلوم هجن.

اچو ته هيٺيان مثال ڏسون

مثال 01 $x^3-6x^2+11x-6$ جا جزا لهو

حل: فرض ڪريو ته $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$

6 جا جزا آهن $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

$$p(1)=(1)^3-6(1)^2+11(1)-6$$
$$p(1)=1-6+11-6$$
$$p(1)=0$$

تنهنڪري P(x) جو x-1 هڪ جزو آهي

مصنوعي ورهاست ذريعي وندا

1	1	−6	11	−6	(قطار 1)
		1	−5	6	(قطار 2)
	1	−5	6	0	(قطار 3)

$$p(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$$
$$=(x-1)\{x^2-2x-3x+6\}$$
$$=(x-1)\{x(x-2)-3(x-2)\}$$

مثال 02 x^3-4x^2+x+6 جا جزا لهو

حل: جيڪڏهن x-1 جزو آهي P(x) جو تہ پوءِ

$$p(1)=(1)^3-4(1)^2+1+6$$
$$=1-4+1+6$$
$$=4\neq 0$$

تنهنڪري x-1 جزو نہ آهي P(x) جو

جيڏهن x+1 جزو آهي P(x) جو تہ پوءِ

$$p(-1)=(-1)^3-4(-1)^2+1(-1)+6$$
$$=-1-4-1+6$$
$$=0$$

تنهنڪري x+1 جزو آهي P(x) جو

مصنوعي ورهاست جي طريقي سان

−1	1	−4	1	6	(قطار 1)
		−1	5	−6	(قطار 2)
	1	−5	6	0	(قطار 3)

$$p(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$$
$$=(x+1)\{x^2-2x-3x+6\}$$
$$=(x+1)\{x(x-2)-3(x-2)\}$$
$$p(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$$

مشق 4.8

جزن واري طريقي سان جزا معلوم ڪريو.

1. x^3-x^2+x-1
2. x^3-x^2-x-1
3. $x^3-6x^2+11x-6$
4. $x^3+6x^2-11x-6$
5. x^3+x^2-x-1
6. x^3-2x^2+x-1
7. $6x^3+7x^2-x-2$
8. $x^3+8x^2+19x+12$
9. $2x^3+9x^2+10x+3$
10. $x^3+7x^2+14x+8$
11. $x^3+9x^2+26x+24$
12. $x^3+12x^2+44x+48$

ورجايل مشق 4

.1 صحيح ۽ غلط سوال

هيٺيان جملا غور سان پڙهو ۽ صحيح بيان لاءِ T ، غلط بيان لاءِ F تي گول لڳايو.

(i) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ T/F

(ii) $a^3+27=(a+3)(a^2-3a+9)$ T/F

(iii) $b^3-8=(b-2)(b^2+2b+4)$ T/F

(iv) $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a+b)^2$ T/F

(v) $a^6+b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$ T/F

(vi) $a^5+b^5=(a+b)^5$ T/F

.2 هيٺين جملن کي مڪمل ڪريو.

(i) $16x^2-y^4=(4x-y^2)$ _____

(ii) $x^3-64y^3=(x-4y)$ _____

(iii) $x^2+5x+6=(x+2)$ _____

(iv) $x^2+y^2=(x-y)^2$ _____

(v) $a^3+27b^3=(a+3b)$ _____

.3 صحيح جواب تي ($a^2+2ab+b^2-c$) نڪ ڪرو.

(i) $a^2+2a-24$ جا جزا آهن

(a) $a+4,\ a-6$ (b) $a-4,\ a+6$

(c) $a+3,\ a-8$ (d) $a+8,\ a-3$

(ii) $a^2+2ab+b^2-c^2$ جا جزا آهن

(a) $(a-b+c)(x-b-c)$ (b) $(a+b+c)(a-b-c)$

(c) $(a+b+c)(a+b-c)$ (d) $(a+b+c)(a-b-c)$

(v) $\frac{1}{x+y}+\frac{y}{x^2-y^2}=$ جي سادي صورت آهي.

(a) $\frac{y+1}{x^2-y^2}$ (b) $\frac{x}{x^2-y^2}$

(c) $\frac{y}{x^2-y^2}$ (d) $\frac{y-1}{x^2-y^2}$

(vi) m جو ملهه لهو، جڏهن x^2+4x+m مڪمل چورس آهي.

(a) 8 (b) –8

(c) 4 (d) –4

خلاصو

- جزا لهڻ هڪ عمل آهي، جنهن ۾ اسان ڏنل گهڻ رقمي (اظهار) کي ٻه يا ٻن کان وڌيڪ اظهارن جي ضرب اپت ۾ ظاهر ڪندا آهيون.
- فارمولا:

(i) $ka + kb + kc = k(a + b + c)$

(ii) $\underline{ac + ad} + \underline{bc + bd} = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2 = (a + b)^2$

(iv) $a^2 - 2ab + b^2 = (a)^2 - 2(a)(b) + (b)^2 = (a - b)^2$

(v) $a^2 - b^2 = (a-b)(a + b)$

- پاڇي ۽ جزن وارا سڌيان، ٻه اهم سڌيان آهن، هي اهڙي قسم جي گهڻ رقمين کي حل ڪرڻ لاءِ استعمال ٿيندا آهن، جن کي فارمولا جي مدد سان حل ڪري نه سگهبو آهي.

(i) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$

(ii) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$

(iii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(iv) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

- گهڻ رقمين جون پڙيون

جيڪڏهن ڪو مخصوص عدد، گهڻ رقمي P(x) ۾ بدلجندڙ x جو متبادل آهي،جيئن P(a) جي قيمت ٻڙي آهي، تہ پوءِ a کي گهڻ رقمي (Px) جو ٻڙي چئبو آهي.

- جزن وارو سڌيان

جزن واري سڌيان کي هن ريت بيان ڪري سگهبو آهي

جيڪڏهن $p(a)=0$ تہ هڪ درجي گهڻ رقمي $(x-a)$ ، گهڻ رقمي $p(x)$ جو هڪ جزو آهي.

مصنوعي ورهاست واري طريقي جي وضاحت

قدم I: گهڻ رقمي P(x) جا عددي سِرَا (منڊيا) ۽ مستقل (Constant) پهرين قطار ۾ ننڍ وڏائي ترتيب ۾ لکو.

قدم II: پهريون عددي سِرو (منڊيو) ، 3 قطار ۾ ان جي هيٺان 1 قطار جي ساڳي جاءِ تي لکو.

قدم III: عددي سري ۽ ان جي ضربيندڙ 2 جي ضرب اپت کي قطار 2 جي هيٺان لکو ۽ جوڙ ڪري ان جو جوڙ قطار 3 ۾ لکو ۽ ساڳي عمل کي ورجايو.

يونٽ 5

آلجبري هيرا ڦيري

ALGEBRAIC MANIPULATION

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي مطالعي کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- آلجبري اظهارن جو جزن ذريعي وڏو عام پورو ونڊيندڙ (H.C.F) ۽ ننڍي عام ڀڄ اپت معلوم ڪندا.
- ونڊ ذريعي ، وڏو عام پوروندڙ ۽ ننڍي عام ڀڄ اپت ظاهر ڪندا.
- وڏي عام پوري ونڊيندڙ ۽ ننڍي عام ڀڄ اپت جي وچ ۾ تعلق بابت جاڻي سگهندا.
- وڏو عام پورو وندنڊيڙ ۽ ننڍي عام ڀڄ اپت سان تعلق رکندر روزمره زندگي جا حساب حل ڪري سگهندا.
- وڏو عام پورو ونڊيندڙ ۽ ننڍي عام ڀڄ اپت کي استعمال ڪري، جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ تي مشتمل اٽپوري اظهارن کي حل ڪري سگهندا.
- آلجبري اظهارن جو جزن ۽ ونڊ ذريعي ڀيومول معلوم ڪري سگهندا.

تعارف:

آلجبري هيرا ڦيري (manipulation) ، آلجبري اظهارن جي هيراڦيري سان تعلق رکي ٿي جي اظهار اڪثر ڪري سادي صورت ۾ ، يا اهڙي صورت ۾ هوندو جنهن کي آساني سان حل ڪري سگهجي، اها آلجبري اظهارن جي حسابن کي حل ڪرڻ لاءِ اهم ۽ بنيادي مهارت آهي.

هن يونٽ ۾ اسان جزن ۽ وند ذريعي آلجبري اظهارن جي وڏي عام پوري وندبيندڙ ۽ ننڍي عام پنج اپت کي، ۽ ان جي روزمره زندگي ۾ استعمال تي بحث ڪنداسين.

5.1 وڏو عام پورو وندبيندڙ (HCF) / (GCD) ۽ ننڍي عام پنج اپت (LCM)

5.1.1: آلجبري اظهار جي جزن ذريعي وڏو عام پورو وندبيندڙ ۽ ننڍي عام پنج اپت معلوم ڪريو.

(a) جزن ذريعي وڏو عام پورو وندبيندڙ لهڻ

مليل اظهار جو وڏو عام پورو وندبيندڙ معلوم ڪرڻ لاءِ پهريائين اسان هر هڪ گهڻ رقمي جا جزا معلوم ڪنداسين ، ان کانپوءِ اسان مشترڪ جزن جي ضرب ڪنداسين. مشترڪ جزن جي هن ضرب اپت کي، جزن ذريعي وڏو عام پورو وندبيندڙ چئبو آهي.

نوٽ: جيڪڏهن ڪوبه مشترڪ جزو نه هجي ته پوءِ و ع پ و ا ٿيندو آهي.

مثال 01 هيٺين اظهارن جو جزن ذريعي و . ع . پ . و لهو.

(i) $x^2+12x+35$ ۽ x^2+x-20

(ii) x^2+4x+3 ۽ $(x+1)^2, x^2-1$

حل: (i) اسان ڏنل اظهارن $x^2+12x+35$ ۽ x^2+x-20 جا جزا لهنداسين، جيڪي هن ريت آهن.

$$x^2+x-20 = x^2+5x-4x-20$$
$$= x(x+5)-4(x+5)$$
$$=(x+5)(x-4)$$

۽

$$x^2+12x+35 = x^2+7x+5x+35$$
$$= x(x+7)+5(x+7)$$
$$= (x+5)(x+7)$$

بنهي اظهارن ۾ مشترڪ جزو آهي $(x+5)$.

تنهنڪري و ع پ و ٿيندو $(x+5)$

حل: (ii) اسان ڏنل اظهارن $(x+1)^2, x^2-1$ ۽ x^2+4x+3 جا جزا لهنداسين، جيڪي هيٺ ڏجن ٿا.

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$$
$$x^2-1 = (x+1)(x-1)$$
۽
$$x^2+4x+3 = x^2+3x+x+3$$
$$= x(x+3)+1(x+3)$$
$$= (x+3)(x+1)$$

تنهي ڏنل اظهارن ۾ مشترڪ جزو $(x+1)$ آهي.

تنهنڪري و ع پ و ٿيندو $(x+1)$

مثال 02 هيٺين اظهارن جو جزن ذريعي و ع پ و لهو.

حل: a^3-b^3 , a^6-b^6

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^6-b^6 = (a^2)^3-(b^2)^3$$
$$= (a^2-b^2)\{(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)\{(a^2)^2+2a^2b^2+(b^2)^2-a^2b^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\}$$
$$= (a-b)(a+b)(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$$
$$\text{H.C.F} = (a-b)(a^2+b^2+ab) = a^3-a^3-b^3$$

(b) جزن ذريعي ننڍي عام پنج اپت لهڻ

ٻه يا ٻن کان وڌيڪ گهڻ رقمين جي ن ع پ ا، ننڍي درجي وارو اهڙو اظهار آهي جيڪو مليل گهڻ رقمي سان وندڻ جي سگهندو.

جزن ذريعي ن ع پ ا لهڻ لاءِ اسان هيٺين فارمولا استعمال ڪنداسين.

ن ع پ ا = مشترڪ جزن جي ضرب x غير مشترڪ جزن جي ضرب.

مثال 01 x^3-8 ۽ x^2+x-6 جي ن ع پ ا لهو.

حل: اسان هاڻ x^3-8 ۽ x^2+x-6 جا جزا لهنداسين.

$$\therefore x^3-8 = (x)^3-(2)^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$$

۽
$$x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6 = x(x+3)-2(x+3)$$
$$= (x+3)(x-2)$$

مشترڪ جزو آهي $(x-2)$

غير مشترڪ جزا آهن $(x+3)(x^2+2x+4)$

ن ع پ ا = مشترڪ جزا × غير مشترڪ جزا

ن ع پ ا = $(x-2)(x^2+2x+4)(x+3)=(x^3-8)(x+3)$

مثال 2: x^3-1 ۽ x^3-2x^2+x جي ننڍي عام پنج اپت لهو.

اسان ڏنل اظهارن x^3-1 ۽ x^3-2x^2+x جا جزا لهنداسين.

$\therefore \quad x^3-1=(x)^3-(1)^3=(x-1)(x^2+x+1)$

۽ $\quad x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$

ن ع پ ا = مشترڪ جزا × غير مشترڪ جزا

ن ع پ ا = $x(x-1)^2(x^2+x+1)$

5.1.2 وڏو عام پورو وندبيندڙ ۽ ننڍي عام پنج اپت جي وچ ۾ تعلق بابت ڄاڻڻ. بن گهڻ

رقمين P(x) ۽ q(x) جي صورت ۾ و ع پ و ۽ ن ع پ ا ، جو تعلق هيٺين طرح بيان ڪبو آهي.

و ع پ و × ن ع پ ا = $p(x) \times q(x)$

مثال 1: هيٺ ڏنل گهڻ رقمين P(x) ۽ q(x) جي ، ن ع پ ا ۽ و ع پ و لهو ۽ ن ع پ ا ۽ و ع پ و جي پاڻ ۾ تعلق جي چڪاس / تصديق ڪريو.

$p(x) = x^2-5x+6$ ۽ $q(x) = x^2-9$.

حل: سڀ کا پهريائين، ڏنل گهڻ رقمين P(x) ۽ q(x) جا ننڍي ۾ ننڍا جزا لهو

$$p(x) = x^2-5x+6$$
$$= x^2-3x-2x+6$$
$$= x(x-3)-2(x-3)$$
$$= (x-3)(x-2)$$

۽ $\quad q(x) = x^2-9 = (x-3)(x+3)$

و ع پ و = $(x-3)$

۽ ن ع پ ا = $(x-2)(x^2-9) = (x-2)(x-3)(x+3)$

هان P(x) ۽ q(x) جي ضرب اپت لهو

so, $\quad p(x) \times q(x) = (x^2-5x+6) \times (x^2-9) \quad \ldots (i)$

LCM × HCF $= (x-2)(x-3)(x+3) \times (x-3)$

$\Rightarrow \quad = (x^2-5x+6) \times (x^2-9) \quad \ldots (ii)$

(i) ۽ (ii) جي مليل نتيجن مان اسان کي معلوم ٿيو ته

و ع پ و X ن ع پ ا = P(x) X q(x)

تنهنڪري تصديق ٿي وئي.

مثال 2: هيٺين گهڻ رقمين جي فارمولا جي مدد سان ن ع پ ا، لهو

$q(x)= x^2+8x+12$ ۽ $p(x)= x^2+14x+48$

حل: پهريائين اسان P(x) ۽ q(x) جو و ع پ و لهنداسين

$$p(x)= x^2+14x+48$$
$$= x^2+8x+6x+48$$
$$= x(x+8)+6(x+8)$$
$$= (x+6)(x+8)$$

۽

$$q(x) = x^2+8x+12$$
$$= x^2+6x+2x+12$$
$$= x(x+6)+2(x+6)$$
$$= (x+2)(x+6)$$

تنهنڪري P(x) ۽ q(x) جو و ع پ و آهي $x+6$

$$\text{LCM}=\frac{p(x)\times q(x)}{\text{HCF}}$$
$$=\frac{(x^2+14x+48)\times(x^2+8x+12)}{(x+6)}$$
$$=\frac{(x+6)(x+8)(x+2)(x+6)}{(x+6)}$$
$$\text{LCM} = (x+2)(x+6)(x+8).$$

5.1.3: جزن يا وندڀ ذريعي و ع پ و ۽ ن ع پ ا کي ظاهر ڪرڻ.

ٻہ يا ٻن ڪان وڌيڪ آلجبري اظهارن جو وندڀ ذريعي و ع پ و لهڻ جو لاءِ هيٺيان مثال سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 1: هيٺ ڏنل گهڻ رقمين جو وندڀ ذريعي و ع پ و معلوم ڪريو.

$2x^3 + 9x^2 + 11x + 2$ ۽ $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$

حل: اصلوڪي وندڀ جي طريقي سان اسان کي ملندو.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 1 \\
2x^3+7x^2+4x-4 & 2x^3+9x^2+11x+2 \\
 & -2x^3 \pm 7x^2 \pm 4x \mp 4 \\
\hline
 & 2x^2 + 7x + 6
\end{array}
$$

وري

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x \\
2x^2+7x+6 & 2x^3+7x^2+4x-4 \\
 & -2x^3 \pm 7x^2 \pm 6x + 0 \\
\hline
 & -2x - 4
\end{array}
$$

2- کي (common) ڪرڻ سان

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x+3 \\
x+2 & 2x^2+7x+6 \\
 & -2x^2 \pm 4x + 0 \\
\hline
 & 3x + 6 \\
 & -3x \pm 6 \\
\hline
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

گهربل و ع پ و آهي $x + 2$

مثال 2: هيٺ ڏنل گهڻ رقمين جو وندڀ ذريعي و ع پ و معلوم ڪريو.

$x^2 + 2x + 1$, $x^2 + 4x + 3$ ۽

حل: پهريائين اسان ٻن اظهارن جو و ع پ و لهنداسين ۽ پوءِ ان جو ٿي اظهار سان و ع پ و لهنداسين،

هاڻ اصلوڪي وندڀ جي طريقي سان اسان کي ملندو

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 1 \\
x^2+2x+1 & x^2+4x+3 \\
 & x^2 \pm 2x \pm 1 \\
\hline
 & 2x + 2
\end{array}
$$

اسان +2 کي (common) خارج ڪرڻ سان

وري.

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x+1 & x^2+2x+1 \\ & -x^2 \pm x+0 \\ \hline & x+1 \\ & -x \pm 1 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

تہ x^2+2x+1 , $x+1$ ۽ x^2+4x+3 جو و ع پ و آهي x+1

هاڻ اسان $x+1$ ۽ x^2-1 جو و ع پ و لهنداسين

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x+1 & x^2-1 \\ & -x^2 \pm x \\ \hline & -x-1 \\ & mxm1 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

تنهي گهڻ رقمين جو و ع پ و آهي (x+1)

هاڻ اسان وندِ ذريعي ن ع پ ا لهنداسين

ٻہ يا ٻن کان وڌيڪ آلجبري اظهارن (گهڻ رقمين) جي وندِ ذريعي ن ع پ ا معلوم ڪرڻ لاءِ هيٺين فارمولا استعمال ڪنداسين

$$\text{L.C.M} = \frac{\text{ٻن گهڻ رقمين جي ضرب اپت}}{\text{ٻن گهڻ رقمين جو و ع پ و}}$$

مثال 3: $x^3-6x^2+11x-6$ ۽ x^3-4x+3 جي ن ع پ ا لهو

حل: $x^3-6x^2+11x-6$ ۽ x^3-4x+3

پهريائين عام وندِ جي طريقي سان و ع پ و لهو

$$\begin{array}{r|l} & x^3-6x^2+11x-6 \\ \hline x^3-4x+3 & \\ & -x^3 \pm 4x \pm 3 \\ \hline & -6x^2+15x-9 \end{array}$$

$-6x^2+15x-9$ مان -3 کي خارج ڪرڻ سان $2x^2-5x+3$ ملندو

هاڻ x^3-4x+3 by 2 کي 2 سان ضرب ڪرڻ سان

$$\begin{array}{r|l} & x+5 \\ \hline 2x^2-5x+3 & 2x^3-8x+6 \\ & -2x^3 \pm 3x \mp 5x^2 \\ \hline & 5x^2-11x+6 \end{array}$$

2 سان ضرب ڪرڻ سان ملندو, $10x^2-22x+12$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 5 \\
2x^2-5x+3 & 10x^2-22x+12 \\
 & -10x^2 \quad 25x \pm 15 \\
\hline
 & \quad 3x-3
\end{array}
$$

(3x-3) مان 3 خارج ڪرڻ سان ملندو (x-1)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 2x-3 \\
x-1 & 2x^2-5x+3 \\
 & -2x^2 \quad 2x \\
\hline
 & \quad -3x+3 \\
 & \quad 3x \pm 3 \\
\hline
 & \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

HCF = $x-1$

اسان کي خبر آهي تہ $\frac{p(x).q(x)}{\text{HCF}}$

$$\text{L.C.M} = \frac{(x^3-6x^2+11x-6)(x^3-4x+3)}{x-1}$$

هاڻ $x^3-6x^2+11x-6$ کي $x-1$ سان وندڪريو.

$$
\begin{array}{r|l}
x-1 & x^3-6x^2+11x-6 \\
 & -x^3 \quad mx^2 \\
\hline
 & \quad -5x^2+11x \\
 & \quad -5x^2 \quad \pm 5x \\
\hline
 & \qquad 6x-6 \\
 & \qquad -6x \pm 6 \\
\hline
 & \qquad 0 \quad 0
\end{array}
$$

L.C.M = $(x^3-4x+3)(x^2-5x+6)$

5.1.4 و ع پ ع ۽ ن ع پ ا، سام تعلق رکندڙ روزمره زندگي جا حساب حل ڪريو.

مثال 1: ردا وٽ ڪپڙن جا ٻہ ٽڪڙا آهن، هڪ 45 انچ ۽ ٻيو 90 انچ ويڪرو آهي. هوءَ ٻنهي پٽين کي برابر ويڪر ۾ ڪٽڻ چاهي ٿي. تہ ڪيتري ويڪر واريون پٽيون ڪٽي سگهندي.

حل: هي حساب و ع پ و جي ذريعي حل ڪري سگهجي ٿو. ڇاڪاڻ تہ هوءَ ڪپڙي کي ممڪن ويڪرن پٽين ۾ ڪٽڻ يا تقسيم ڪري ٿي

تنهنڪري 45 ۽ 90 جو و ع پ و ٿيندو

$$45 = 3\times3\times5$$
$$90 = 2\times3\times3\times5$$

و ع پ و = مشترڪ جزن جي ضرب اپت

و ع پ و = $3\times3\times5$

و ع پ و = 45

تہ پوءِ ردا هر هڪ ٽڪر 45 انچن جي ويڪر جو ڪٽي.

مثال 2: سرفراز هر 8 ڏينهن کان پوءِ ۽ عمران هر 4 ڏينهن کان پوءِ ورزش ڪن ٿا. سرفراز ۽ عمران ٻنهي اڄ ورزش ڪئي آهي، تہ ڪيترن ڏينهن کان پوءِ هوڳڏجي ورزش ڪندا.

حل: هي حسان ن ع پ ا جي ذريعي حل ڪري سگهجي، ڇاڪاڻ تہ اسان ورزش جو وقت معلوم ڪرڻ جي ڪوشش پيا ڪريون، اهو 8 ۽ 4 جي ن ع پ ا آهي.

$$8 = 2\times2\times2$$
$$4 = 2\times2$$

ن ع پ ا = مشترڪ جزن جي ضرب اپت x غيرمشترڪ جزن جي ضرب اپت

ن ع پ ا = $2\times2\times2$

ن ع پ ا = 8

تنهنڪري اهي وري 8 ڏينهن کان پوءِ گڏجي ورزش ڪندا.

مشق 5.1

.1 هيٺين اظهارن جو جزن ذريعي وڏو عام پورو وندبيندڙ لهو.

(i) $72x^4y^5z^2$ and $120x^3y^6z^8$ (ii) $18r^3s^4t^5$, $120r^4s^3t^8$ and $210r^7s^7t^3$

(iii) $x^2-3x-18$ and x^2+5x+6 (iv) $4x^2-9$ and $2x^2-5x+3$

(v) $(2a^2-8b^2)$, $(4a^2+4ab-24b^2)$ and $(2a^2-12ab+16b^2)$

(vi) x^3+x^2+x+1 and x^3+3x^2+3x+1

.2 هيٺين اظهارن جو وندو وسيلي وڏو عام پورو وندبيندڙ لهو.

(i) x^2+3x+2 and $3x^2-3x-6$

(ii) $2x^3+15x^2+31x+12$ and $3x^3+23x^2+50x+24$

(iii) $4x^3-2x^2-100x-50$ and $x^4+10x^3-16x^2-250x-225$

(iv) $x^2+xy-2y^2$, $x^2+3y+2y^2$ and $x^3+3x^2y+2xy^2+2y^3$

.3 هيٺين اظهارن جي جزن وسيلي ننڍي عام پنج اپت لهو.

(i) $27a^4b^5c^2$ and $81ab^2c^8$ (ii) $24p^2q^3r^4$, $104p^5q^4r^5$ and $300p^3qr^8$

(iii) $21x^2-14x$ and $3x^2-5x+2$ (iv) $x^2+11x+28$ and x^2+x-12

(v) $6x^2+11x+3$, $2x^2-5x-11$ and $3x^2-11x-4$

(vi) x^2-y^2, x^3-y^3 and $x^4+x^2y^2+y^4$

.4 وندو وسيلي ننڍي عام پنج اپت لهو.

(i) $x^2-25x+100$ and x^2-x-20

(ii) $3x^2+14x+8$ and $6x^2+x-2$

(iii) $x^2-y^2-z^2-2yz$ and $y^2-z^2-x^2-2xz$

(iv) $3x^3+9x^2-84x$ and $4x^4-24x^3+32x^2$

.5 جيڪڏهن $x^2-11x+24$ ۽ $x+6$ جو و ع پ و $(x-3)$ آهي تہ ان جي ن ع پ ا لهو.

.6 $x^2+8x+15$ بن اظهارن جو و ع پ و ۽ ن ع پ ا $(x+3)$ ۽ $(x^3+7x^2+7x-15)$ آهي، جيڪڏهن هڪ اظهار آهي تہ ٻيو اظهار لهو.

.7 بن بہ درجي گهٽ رقمين جو و ع پ و ۽ ن ع پ ا، ترتيبوار $3x-2$ ۽ x^3+7x^2-4 آهن تہ ٻنهي اظهارن جي ضرب اپت معلوم ڪريو.

.8 و ع پ و ۽ ن ع پ ا جي وچ ۾ تعلق جي تصديق ڪرو.

(HCF×LCM = $p(x)$ $q(x)$) آهي جڏهن تہ $p(x)=x^2-8x-20$ ۽ $q(x)=x^2-15x+50$ آهي.

9. هڪ وادي ڪاٺ جا ڪجهه تختا ورتا، جن مان ڪجهه 12 س م ۽ ڪجهه 18 س م ڊگهه آهن. هو انهن کي اهڙي طرح ڪٽڻ چاهي ٿو تہ جيئن هن وٽ آساني سان استعمال ڪرڻ جي لاءِ هڪجيتري ماپ وارا تختا هجن. ڪاٺ جو ضايع ڪرڻ کان سواءِ هن کي ڪيتري ماپ جا تختا ڪٽڻ گهرجن

10. ٽرين A ۽ ٽرين B حيدرآباد ۾ صبح جو 10:30 تي بيهن ٿيون. ٽرين A هر 12 منٽن کان پوءِ ۽ ٽرين B هر 14 منٽن کان پوءِ بيهن ٿيون. ٻڌايو تہ اهي ٻئي گڏ ڪڏهن بيهنديون.

5.2 آلجبري اٽپورن تي بنيادي عمل

جيڪڏهن $p(x)$ ۽ $q(x)$ آلجبري اظهار آهن ۽ $q(x) \neq 0$ تہ پوءِ $\frac{p(x)}{q(x)}$ هڪ آلجبري اٽپور سڏبو آهي.

آلجبري اٽپور جي سادي صورت، هڪ اهڙو اٽپور آهي، جنهن جي انس ۽ ڇيد ۾ 1 کانسواءِ ڪوبہ مشترڪ جزو نہ هجي. آلجبري اٽپور ۾ بنيادي عمل $(+,-,\div,\times)$ جو استعمال عام اٽپور وانگرئي ٿيندو آهي.

هيٺين مثالن ۾ اسان و ع پ و ۽ ڏ ع پ ا جي استعمال وسيلي بنيادي عملن وارن اٽپوري اظهارن کي سادي صورت ۾ ڪرڻ بابت وضاحت ڪنداسين.

5.2.1 وڏو عام پورو وندبيندڙ ۽ ننڍي عام پنج اپت جي استعمال وسيلي، جوڙ، ڪٽ، ضرب ۽ وند تي مشتمل اٽپوري اظهارن کي گهٽ ڪرڻ.

مثال 01 سادي صورت ۾ آڻيو. $\frac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3}+\frac{1}{4x^2-1}$

حل:

$$\frac{x^2-x-6}{2x^2-5x-3}+\frac{1}{4x^2-1}$$

$$=\frac{x^2-3x+2x-6}{2x^2-6x+x-3}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{x(x-3)+2(x-3)}{2x(x-3)+1(x-3)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(2x+1)}+\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$ جڏهن $x \neq 3$

$$= \frac{(x+2)}{(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{(x+2)(2x-1)+1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{2x^2-x+4x-2+1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2x^2+3x-1}{4x^2-1}$$

مثال 02 سادي صورت ۾ آڻيو $\frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+x-6}$

حل: $\frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+x-6}$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x^2+4x-3x-6}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{2x(x+2)-3(x+2)}$$

$$= \frac{2}{x+2} - \frac{x-4}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{2(2x-3)-(x-4)}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{4x-6-x+4}{(x+2)(2x-3)}$$

$$= \frac{3x-2}{2x^2+x-6}$$

مثال 03 : سادي صورت ۾ آڻيو $\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$

حل: $\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b}$

$$\frac{ab^2+2a}{ab-6+2b-3a} \times \frac{b^2-6b+9}{b^3+2b} = \frac{a(b^2+2)}{b(a+2)-3(a+2)} \times \frac{b^2-3b-3b+9}{b(b^2+2)}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{b(b-3)-3(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{(b-3)(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a}{(a+2)(b-3)} \times \frac{(b-3)(b-3)}{b}$$

$$= \frac{a(b-3)}{b(a+2)}$$ جڏهن ته $p+q \neq 0$ ۽ $r+s \neq 0$

مثال 4: سادي صورت ۾ آڻيو. $\frac{p^2-q^2}{r^2+2rs+s^2} \div \frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$

حل:

$$\frac{p^2-q^2}{r^2+2rs+s^2} \div \frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$$

$$= \frac{(p+q)(p-q)}{(r+s)^2} \div \frac{2(p+q)}{3(r+s)s}$$

$$= \frac{(p+q)(p-q)}{(r+s)^2} \times \frac{3(r+s)s}{2(p+q)}$$ جڏهن ته $p+q \neq 0$ ۽ $r+s \neq 0$

$$= \frac{3s(p-q)}{2(r+s)},$$

مشق 5.2

1. هيٺين کي سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $\frac{4x}{x^2+2x+1} + \frac{3}{x+1}$

(ii) $\frac{3}{x(2x+1)} + \frac{6x+7}{3x(x+1)}$

(iii) $\frac{3x-1}{x^2+2x+1} - \frac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$

(iv) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}$

(v) $\frac{x^2+4x+3}{5} \times \frac{10}{x+1}$

(vi) $\frac{x^2-4x-21}{x^2-6x-7} \div \frac{x+9}{x+1}$

(vii) $\left[\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right] \div \left[\frac{2}{x+3} - 1\right]$

(viii) $\left(\frac{1}{x^2-9}\right) \div \left(\frac{1}{x+3}\right) - \frac{3}{x-2}$

(ix) $\frac{1}{x^2+8x+15} + \frac{1}{x^2+7x+12} - \frac{1}{x^2+x-12}$

(x) $2\left(\frac{x^2+7x+12}{x^2-16} + \frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}\right) \times \frac{x^2-2x-8}{2x+8x^2+4}$.

5.3 آلجبري اظهار جو ڀيو مول

5.3.1 آلجبري اظهار جو جزن ۽ وندڀ ذريعي ڀيو مول لهو.

آلجبري اظهارن جو ڀيو مول لهڻ لاءِ اسان ٻن طريقن بابت بحث ڪنداسڳن.

(a) جزن ذريعي (b) وندڀ ذريعي

(a) جزن ذريعي ڀيو مول لهڻ جو طريقو

مثال 1: آلجبري اظهار $49x^2+126xy+81y^2$ جو ڀيو مول جزن ذريعي لهو.

حل:

$$49x^2+126xy+81y^2$$
$$= (7x)^2+ 2\,(7x)(9y) + (9y)^2,$$
$$= (7x+ 9y)^2,$$

تنهنڪري

$$\sqrt{49x^2+126xy+81y^2} = \sqrt{(7x+9y)^2} = 7x+9y$$

(b) وندڀ ذريعي ڀيو مول لهڻ جو طريقو

مثال 02 $4x^4 + 12x^3 - 19x^2 - 42x + 49$ اظهار جو وندڀ ذريعي ڀيو مول لهو.

حل: طريقو هيٺ واضح ڪيو ويو آهي.

	$2x^2 + 3x - 7$
$2x^2$	$4x^4 + 12x^3 - 19x^2 - 42x + 49$
$+2x^2$	$\pm 4x^4$
$4x^2 + 3x$	$12x^3 - 19x^2 - 42x + 49$
$+3x$	$\pm 12x^3 \pm 9x^2$
$4x^2+6x-7$	$-28x^2 - 42x + 49$
-7	$28x^2 \quad 42x \quad \pm 49$
$4x^2+6x-14$	$0 \quad 0 \quad 0$

تنهنڪري

$$\sqrt{4x^4+12x^3-19x^2-42x+49} = 2x^2 + 3x-7.$$

مثال 03 a جو اهڙو ملهه لهو جيڪو $36x^4+36x^3+57x^2+24x+a$ کي هڪ مڪمل چورس بڻائي.

حل: وندِ واري طريقي سان اسان کي

$$6x^2+3x+4$$

$6x^2$	$36x^4+36x^3+57x^2+24x+a$
$+6x^2$	$\pm 36x^4$
$12x^2+3x$	$36x^3+57x^2-24x+a$
$+3x$	$\pm 36x^3 \pm 9x^2$
$12x^2+6x+4$	$48x^2+24x+a$
$+4$	$\pm 48x^2 \pm 24x \pm 16$
$12x^2+6x+8$	$a-16$

مليل اظهار مڪمل چورس ٿيندو جيڪڏهن

$$a-16=0 \Rightarrow a=16,$$

تنهنڪري $a=16$ ڏنل اظهار کي مڪمل چورس بڻائيندو.

مثال 04 $x^4+4x^3+10x^2+5$ ۾ ڇا جوڙ ڪجي جو هڪ مڪمل چورس ملي.

حل: وندِ واري طريقي سان اسان کي

$$x^2+2x+3$$

x^2	$x^4+4x^3+10x^2+5$
x^2	$\pm x^4$
$2x^2+3x$	$4x^3+0x^2+0x+5$
$+3x$	$\pm 4x^3 \pm 4x^2$
$2x^2+4x+3$	$6x^2+0x+5$
$+3$	$\pm 6x^2 \pm 0x \pm 9$
$2x^2+4x+6$	$-12x-4$

يا $-(12x+4)$

تنهنڪري $12x+4$ جي جوڙ ڪرڻ سان ڏنل اظهار مڪمل چورس ٿيندو.

مشق 5.3

1. هيٺين آلجبري اظهارن جو پيو مول جزن وسيلي لهو.

(i) $36x^2-60xy+25y^2$

(ii) $9x^2+\frac{1}{x^2}+6$

(iii) $4x^4y^4-\frac{12x^3y^3}{z^2}+\frac{9x^2y^2}{z^4}$

(iv) $36(3-2x)^2-40(3-2x)y+16y^2$

(v) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x-\frac{1}{x}\right)+2$

(vi) $(4x^2-4x+1)(9x^2-54x+81)$

(vii) $(x^2-2x+1)(x^2-6x+9)$

(viii) $(x^2+8x+15)(x^2+7x+10)(x^2+5x+6)$

2. هيٺين آلجبري اظهارن جو پيو مول وندڙ ذريعي لهو.

(i) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

(ii) $25x^4+40x^3+26x^2+8x+1$

(iii) $4x^4+8x^3+20x^2+16x+16$

(iv) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+47-\frac{14y}{x}+\frac{14x}{y}$

(v) $x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$

(vi) $x^2+\frac{y^2}{9}+9z+\frac{2xy}{3}+2yz+6xz$

(vii) $(x^2+\frac{1}{x^2})^2-8(x^2-\frac{1}{x^2})+12$

(viii) $x^6+\frac{1}{x^6}-4\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+6,\ x\neq 0$

3. $4x^4+4x^3+17x^2+8x+9$ ۾ ڇا جوڙ ڪجي، جو هڪ مڪمل چورس بڻائي.

4. $9x^6-12x^5+4x^4-18x^3-12x^2+18$ مان ڇا ڪٽ ڪجي جو هڪ مڪمل چورس بڻائي.

5. جو اهڙو ملهه جيڪو $9x^4+12x^3+34x^2+mx+25$ ۾ m ڪي هڪ مڪمل چورس بڻائي.

6. p ۽ q جي ڪهڙن ملهن لاءِ $x^4+8x^3+30x^2+px+q$ اظهار هڪ مڪمل چورس ٿيندو.

ورجايل مشق 5

.1 غلط ۽ صحيح سوال

هيٺين جملن کي غور سان پڙهو ۽ صحيح بيان لاءِ "T" غلط بيان لاءِ "F" تي گول لڳايو.

(i) $y^2 - 4$ ۽ y-2 جو و ع پ و y-2 آهي. T / F

(ii) $a^2 - 1$ ۽ $a^3 - 1$ جو و ع پ و a+1 آهي. T / F

(iii) $x^3 + 1$. ۽ x+1 جي ن ع پ ا، $x^3 + 1$ آهي. T / F

(iv) $x^2 + y^2$ ۽ $x^2 - y^2$ جي ن ع پ ا، $x^4 - y^4$ آهي. T / F

(v) $a + 3$. ۽ $a^2 + 5a + 6$ جو و ع پ و $a^2 + 4a + 3$ آهي. T / F

.2 خال پريو.

(i) گهڻ رقمين جو و ع پ و معلوم ڪرڻ لاءِ _____ طريقا آهن.

(ii) بن اظهارن جي ن ع پ ا x و ع پ و = _____ آهي.

(iii) $y^2 - 5y$، $y + 6$ ۽ $y - 2$ جو و ع پ و _____ آهي.

(iv) y^2+5y+6 ۽ y^2+3y+2 جي ننڍي عام پنج اپت _____ آهي.

(v) $y^2 - \frac{1}{y^2}$ ۽ $y + \frac{1}{y}$ جو و ع پ و _____ آهي.

.3 صحيح جواب تي (✓) ٽڪ لڳايو

(i) $x^3 - 8y^3$ ۽ $x^2 - 4xy + 4y^2$ جو و ع پ و آهي.

(a) $x - 4y$ (b) $x^2 + 2xy + y^2$

(c) $x + 2y$ (d) $(x - 2y)$

(ii) $(2y+3z)^5$ ۽ $(2y+3z)^3$ جي ن ع پ ا آهي.

(a) $2y+3z$ (b) $(2y+3z)^3$

(c) $(2y+3z)^2$ (d) $(2y+3z)^5$

(iii) $x^3 - y^3$ ۽ $x^2 + xy + y^2$ جو و ع پ و آهي.

(a) $x + y$ (b) $x^2 + xy + y^2$

(c) $x - y$ (d) $(x - y)^2$

(iv) $(x - y)^4$ ۽ $(x - y)^3$ جي ن ع پ ا آهي.

(a) $(x - y)$ (b) $(x - y)^3$

(c) $(x - y)^4$ (d) $(x - y)^7$

(v) $\frac{1}{x+y}+\frac{y}{x^2-y^2}$ جي سادي صورت آهي.

(a) $\frac{y+1}{x^2-y^2}$ (b) $\frac{x}{x^2-y^2}$

(c) $\frac{y}{x^2-y^2}$ (d) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$

(vi) $\frac{y}{25x^2-y^2}-\frac{1}{5x-y}$ جي سادي صورت آهي.

(a) $\frac{5x}{25x^2-y^2}$ (b) $\frac{5x}{5x^2-y}$

(c) $\frac{-5x}{5x+y}$ (d) $\frac{-5x}{25x^2-y^2}$

(vii) $\frac{a^3x^3+a^3y^3}{a^2(x+y)}=$ _____ :

(a) ax^2+ay^2 (b) x^2+y^2

(c) $a(x^2-xy+y^2)$ (d) $a(x^2+xy+y^2)$

(viii) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}=$ _____ :

(a) $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ (b) $\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}$

(c) $\frac{a+b}{a^2-b^2}$ (d) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$

(ix) ن ع پ ا = _____

(a) $\frac{HCF}{P\times Q}$ (b) $\frac{P\times Q}{HCF}$

(c) $\frac{P}{HCF}$ (d) $\frac{Q}{HCF}$

(x) x^2-x+1 ۽ x^3+1 جي ن ع پ ا آهي.

(a) $x+1$ (b) x^2-x+1 (c) x^3+1 (d) x^2+x+1

خلاصو

- الجبري اظهارن جو و ع پ و ۽ ننڍي عام ڀنج اپت معلوم ڪرڻ لاءِ ٻه طريقا آهي.

  (1) جزن ذريعي (2) وندِ ذريعي

- ٻن اظهارن جي ن ع پ ا x و ع پ و = ٻن اظهارن جي ضرب اپت
- ن ع پ ا ۽ و ع پ و جي مدد سان آلجبري اظهارن جي جوڙ، ڪٽ ضرب ۽ وندِ معلوم ڪري سگهجي ٿي.
- آلجبري اظهارن جو ٻيومول معلوم ڪرڻ لاءِ ٻه طريقا آهن.

  (i) جزن واري طريقي سان ٻيومول

  (ii) وندِ واري طريقي سان ٻيومول.

يونٽ 6

هڪ درجي مساواتون ۽ اڻ برابري

Linear Equation and Inequalities

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- هڪ بدلجندڙ (variable) واري هڪ درجي مساوات (equation) دهرائيندا.
- ناطق عددي سرن (منڊي) سان هڪ درجي مساواتون حل ڪندا.
- ٻئي مول جي نشانين واريون هڪ درجي مساواتون سادين ڪندا ۽ انهن جو حل لهندا.
- قطعي ملهه (Absolute Value) بيان ڪري سگهندا.
- هڪ بدلجندڙ ۾ قطعي ملهه واريون مساواتون حل ڪندا.
- اڻ برابري $(<, >)$ ۽ $(\leq, \geq)$ واضح ڪندا.
- اڻ برابري جون خاصيتو سڃاڻي سگهندا، جهڙوڪ: (ٽ رخي، متعدي، جوڙاپت ۽ ضرب اپت)
- ناطق عددي سرن (منڊي) واريو هڪ درجي غير مساواتون حل ڪندا.

6.1 هڪ درجي مساواتون

6.1.1 هڪ متغير (بدلجندڙ) (Variable) واري هڪ درجي مساوات (Equation) ڏهرايو.

جيڪڏهن هڪ ڪليل جملي ۾ "=" شامل هجي ته اهڙي جملي کي مساوات چئبو آهي. هڪ متغير (بدلجندڙ) (Variable) سان هڪ درجي مساوات جيئن: $ax+b=0$ ۽ $a \neq 0$ مساواتون آهن. جتي متغير (بدلجندڙ) (Variable) کي "1" سگهه آهي جيڪا عام طور تي ظاهر نه ڪبي آهي.

6.1.2 ناطق عددن واريون هڪ درجي مساواتون حل ڪريو.

اڻ ڄاتل متغير (بدلجندڙ) (Variable) جيڪو مساوات ۾ ڏنل آهي انجي ملهه لاءِ مساوات درست ٿي وڃي ته انکي حل يا مساوات جو مول چئبو آهي.

مثال 01 حل ڪيو $3x-1=5$

حل

$$3x-1=5$$
$$\Rightarrow \quad 3x=5+1$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{6}{3}$$
$$\Rightarrow \quad x=2$$

جيئن ته $\{2\}$ حل سيٽ آهي.

مثال 02 حل ڪيو $\frac{2}{3}(x+3)=3+\frac{5x}{9}$

حل

$$\frac{2}{3}(x+3)=3+\frac{5x}{9}$$
$$9\times\frac{2}{3}(x+3)=9\times 3+9\times\frac{5x}{9}$$

بنهي پاسن 9 ضرب ڪرڻ سان

$$\Rightarrow \quad 3\times 2(x+3)=27+5x$$
$$\Rightarrow \quad 6(x+3)=27+5x$$
$$\Rightarrow \quad 6x+18=27+5x$$
$$\Rightarrow \quad 6x-5x=27-18$$
$$\Rightarrow \quad x=9$$

جيئن ته $\{9\}$ حل سيٽ آهي.

مثال 03 پيءُ جي عمر پٽ جي عمر کان تيرهوڻي آهي. اها چئن سال کانپوءِ صرف پنجوڻي ٿي وڃي تي ته بنهي جون موجوده عمريون ٻڌايو.

حل

فرض ڪريو ته پٽ جي موجوده عمر x سال آهي

۽ پيءُ جي موجوده عمر $13x$ سال آهي

ڏنل شرط مطابق $\quad \therefore \quad 13x+4=5(x+4)$

$$\Rightarrow \quad 13x + 4 = 5x + 20$$

بنهي پاسن کان $5x$ کٽ ڪرڻ سان

$$\Rightarrow \quad 13x - 5x + 4 = 5x - 5x + 20$$

$$\Rightarrow \quad 8x + 4 = 20$$

بنهي پاسن کان 4 کٽ ڪرڻ سان

$$\Rightarrow \quad 8x + 4 - 4 = 20 - 4$$

$$\Rightarrow \quad 8x = 16$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8x}{8} = \frac{16}{8}$$

$$\Rightarrow \quad x = 2$$

چيئن تہ پٽ جي موجوده عمر 2 سال

۽ پيءُ جي عمر $13 \times 2 = 26$ سال آهي.

مثال 04 جڏهن هڪ عدد جي $\frac{1}{3}$ حصي ۾ 16 جوڙ ڪرڻ سان جواب اصل عدد جو $2\frac{1}{3}$ اچي تہ عدد لهو.

حل: فرض ڪريو تہ عدد x آهي،

ڏنل شرط مطابق $16 + \frac{1}{3}x = 2\frac{1}{3}x$

$$\Rightarrow \quad 16x + \frac{1}{3}x = \frac{7}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \frac{7}{3}x - \frac{1}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\right)x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \left(\frac{7-1}{3}\right)x$$

$$\Rightarrow \quad 16 = \frac{6}{3}x$$

$$\Rightarrow \quad 16 \times 3 = 6x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{48}{6} = x \qquad \Rightarrow x = 8$$

6.1.3 مساوات جنهن ۾ مول شامل آهن، هڪ درجي مساوات جي نموني سادي ڪريو ۽ انهن جو حل لهو.

هڪ بدلجندڙ واري مساوات جنهن ۾ مولي اظهار شامل هجن انکي مولي مساوات (Radical Equation) چئبو آهي.

مثال طور: $\left(3\sqrt{t} - \sqrt{t+1} = 2\right)$ ۽ $\sqrt{x} = 8$ مولي مساواتون آهن.

هيٺين مثال جي مدد سان مساواتون حل ڪري سگهجن ٿيون.

مثال 01 حل ڪيو. $\sqrt{2x+11}=\sqrt{3x+7}$

حل:

$$\sqrt{2x+11}=\sqrt{3x+7}$$

$$\therefore \quad \left(\sqrt{2x+11}\right)^2=\left(\sqrt{3x+7}\right)^2$$ ٻئي پاسا چورس ڪرڻ سان

$$\Rightarrow \quad 2x+11=3x+7$$

$$\Rightarrow \quad 2x-3x=7-11$$

$$\Rightarrow \quad -x=-4$$

$$\Rightarrow \quad x=4$$

جيئن ته 4 حل سيٽ آهي.

چڪاس: مساوات ۾ $x=4$ جو ملهه وجهڻ سان

$$\sqrt{2(4)+11}=\sqrt{3(4)+7}$$

$$\sqrt{8+11}=\sqrt{12+7}$$

$$\sqrt{19}=\sqrt{19}$$

نوٽ: ڪنهن وقت مليل جزمولي مساوات کي مطمئن نه ڪندي آهي ته انکي ٻاهريان جز چئبو آهي.

مشق 6.1

1. هيٺيون مساواتون حل ڪريو:

(i) $\frac{1}{4}x=5$ (ii) $\frac{x}{4}=-3$ (iii) $-5=\frac{-x}{6}$

(iv) $\frac{-x}{8}=-5$ (v) $y-\frac{2}{5}=-\frac{1}{3}$ (vi) $2y-\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$

(vii) $\frac{2x-4}{5}=\frac{5x-12}{4}$ (viii) $\frac{3x}{5}+7=\frac{2x}{3}$ (ix) $\frac{3x}{5}+7=\frac{2x}{3}+\frac{4x}{5}$

(x) $\frac{6}{2x-5}-\frac{4}{x-3}=0$ (xi) $\frac{7x-4}{15}=\frac{7x+4}{10}$

(xii) $\frac{3x-2}{10}=\frac{7x-3}{15}-2$ (xiii) $\frac{12x-3}{12}=\frac{12x+3}{8}$

(xiv) $\frac{1}{4}x+x=-3+\frac{1}{2}x$ (xv) $\frac{1}{3}+2m=m-\frac{3}{2}$

1. جڏهن هڪ عدد ۾ 25 جوڙ ڪري نتيجي کي اڌ ڪجي ٿو تہ جواب اصل عدد جي ٽيڻ ٿئي ٿو، ٻڌايو تہ عدد ڪهڙو آهي؟
2. هڪ عدد ۾ 4 جوڙ ڪرڻ سان نتيجو اصل عدد جي ٽيڻ مان 10 ڪٽ ڪرڻ جي برابر ٿئي ٿو، ٻڌايو تہ عدد ڇا آهي.
3. بلال عليءَ کان 6 سال وڏو آهي، هاڻي کان 5 سال بعد سندن عمرين جو جوڙ 40 ٿيندو تہ ٻنهي جي عمر ڪيتري آهي.
4. هيٺين مساواتن جو حل سيٽ لهو ۽ جوابن جي چڪاس پڻ ڪريو.

(i) $6+\sqrt{x}=7$ (ii) $\sqrt{x-9}=1$ (iii) $\sqrt{\frac{y}{4}}-2=3$

(iv) $\sqrt{4x+5}=\sqrt{3x-7}$ (v) $\frac{\sqrt{3y+12}}{7}=3$ (vi) $\sqrt{x}+9=7$

(vii) $\sqrt{25y-50}=\sqrt{y+3}$ (viii) $\sqrt{x}-8=1$ (ix) $10\sqrt{x+20}=100$

6.2 قطعي ملهہ واريون مساواتون

6.2.1 قطعي ملهہ جي وضاحت:

هڪ حقيقي عدد x جو قطعي ملهہ $|x|$ لکبو آهي. جيڪو ٻڙيءَ کان عدد تائين جو مفاصلو آهي، اهو ٻڙيءَ جي کاٻي پاسي هجي يا ساڄي پاسي هجي، تنهنڪري قطعي ملهہ ڪڏهن بہ ڪاٽو نہ ٿيندو آهي.

جيڪڏهن x کو حقيقي عدد آهي، تہ پوءِ x جو قطعي ملهہ يا مقدار $|x|$ ظاهر ڪبو آهي، انکي هيٺين ريت بيان ڪبو.

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{جڏهن } x>0 \\ 0, & \text{جڏهن } x=0 \\ -x, & \text{جڏهن } x<0 \end{cases}$$

$$|-5|=5, |+7|=7, \left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}, |0|=0$$

نوٽ: – عدد جو قطعي ملهہ هميشہ غيرڪاٽو ٿيندو آهي.

6.2.2 مساواتون حل ڪريو، هڪ بدلجندڙ ۾ قطعي ملهہ شامل آهن.

هيٺيان مثال قطعي ملهہ تي مشتمل مساواتن کي حل ڪرڻ کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 $|5x-3|-2=3$

حل: مليل $|5x-3|-2=3$

$\Rightarrow \quad |5x-3|=5$

قطعي ملهه جي وصف مطابق

$5x-3=5$ يا $5x-3=-5$

$\Rightarrow \quad 5x=5+3$ يا $5x=-5+3$

$\Rightarrow \quad 5x=8$ يا $5x=-2$

$\Rightarrow \quad x=\frac{8}{5}$ يا $x=-\frac{2}{5}$

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\left\{\frac{8}{5}\ ,\ -\frac{2}{5}\right\}$

مثال 02 $|5x-3|+7=3$ جو حل سيٽ لهو:

حل: مليل $|5x-3|+7=3$

$\Rightarrow |5x-3|=-5$

قطعي ملهه جي قائدي مطابق حقيقي عددن جو مقدار ڪڏهن به ڪاٽو نٿو ٿي سگهي.

تنهنڪري حل سيٽ { } خالي سيٽ آهي

مثال 03 حل ڪريو $|5x-3|-2=3$ جڏهن تہ $x \in W$

حل: مليل $|5x-3|-2=3$

$\Rightarrow \quad |5x-3|=5$

مقدار جي قائدي مطابق

$5x-3=\pm 5$

تنهنڪري $5x-3=5$ يا $5x-3=-5$

$\Rightarrow \quad 5x=5+3$ يا $5x=-5+3$

$\Rightarrow \quad 5x=8$ يا $5x=-2$

$\Rightarrow \quad x=\frac{8}{5}$ يا $x=-\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{5}$ ۽ $\frac{8}{5} \notin W$

اهڙيءَ طرح حل سيٽ { } خالي سيٽ آهي.

مثال 04 حل ڪريو $|2y-5|+2=7$

مليل $|2y-5|+2=7$

$\Rightarrow \quad |2y-5|=7-2$

$\Rightarrow \quad |2y-5|=5$

قائدي مطابق

$2y-5=5$ يا $2y-5=-5$ تنهنڪري

$\Rightarrow \quad 2y=5+5$ يا $2y=-5+5$

$\Rightarrow \quad 2y=10$ يا $2y=0$

$\Rightarrow \quad y=\frac{10}{2}$ يا $y=\frac{0}{2}$

$\Rightarrow \quad y=5$ يا $y=0$

تنهنڪري حل سيٽ $\{5, 0\}$ آهي.

مشق 6.2

هيٺين غير مساواتن جو حل سيٽ لهو:

1. $|2x+1|=6$
2. $|5x-12|=7$, where $x \in W$
3. $\left|\frac{2x}{7}\right|=12$
4. $\left|\frac{2x+1}{3}\right|=8$
5. $|5x-3|-8=4$, where $x \in N$
6. $\left|\frac{5x+1}{7}\right|-3=8$
7. $\left|\frac{2x+3}{4}\right|+2=7$
8. $\left|\frac{3x+6}{12}\right|+1=3$, where $x \in Z$
9. $\frac{3}{2}=|7x+8|$
10. $\left|\frac{2x-3}{5}\right|-12=5$

6.3 هڪ درجي مساواتون

هڪ اهڙو الجبري اظهار جنهن ۾ برابر نه هئڻ جي نشاني "$\neq$" هجي انکي غير مساوات چئبو آهي.

6.3.1 غير مساواتن ۾ $(\leq, \geq)$ ۽ $(<, >)$ نشانيون استعمال ڪبيون آهن.

هيٺ اٺ برابري واريون نشانيون ڏجن ٿيون

'<' ننڍو آهي

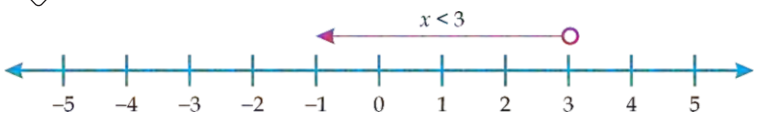
'>' وڏو آهي

'$\leq$' ننڍو آهي يا برابر آهي

'$\geq$' وڏو آهي يا برابر آهي

مثال 01

$x < 3$

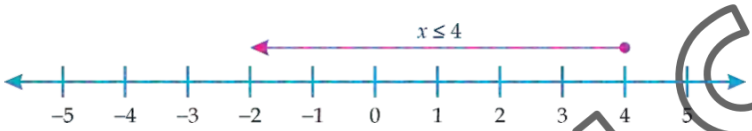


مثال 02

$x > -3$

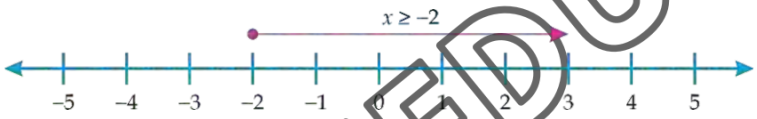
مثال 03

$x \leq 4$



مثال 04

$x \geq -2$



نوٽ: خالي گول "○" ظاهر ڪري ٿو ته عدد شامل نه آهي ۽ رنگيل گول "●" عدد شامل هئڻ کي ظاهر ڪري ٿو.

6.3.2 اڻ برابري جون خاصيتون سڃاڻو، (ته رخي، متعدي، جوڙاپت، ضرب اپت). هيٺ ڪجهه غير مساواتن جا مثال آهن:

(i) (Trichotomy Property) ته رخي خاصيت

بن حقيقي عدد a ۽ b لاءِ هيٺين مان هڪ ۽ صرف هڪ بيان صحيح آهي:

$a<b$، $a=b$ يا $a>b$

(ii) (Transitive Property) متعدي خاصيت

ٽن حقيقي عددن a, b ۽ c لاءِ

جيڪڏهن $a<b$ ۽ $b<c \Rightarrow a<c$

۽ $a>b$ ۽ $b>c \Rightarrow a>c$

(iii) (Additive Property) جوڙ اپت واري خاصيت

ٽن حقيقي عددن لاءِ:

جيڪڏهن $a>b$ تہ پوءِ $\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}$، $a+c>b+c$,

جيڪڏهن $a<b$ تہ پوءِ $\forall\ a,b,c\in$ ، $a+c<b+c$,

(iv) (Multiplicative Property) ضرب اپت واري خاصيت

(a) جيڪڏهن $a>b$ تہ پوءِ $ac>bc$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c>0$

يا جيڪڏهن $a<b$ تہ پوءِ $ac<bc$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c>0$

(b) جيڪڏهن $a>b$ تہ پوءِ $ac<bc$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c<0$

يا جيڪڏهن $a<b$ تہ پوءِ $ac>bc$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ ۽ $c<0$

6.4 هڪ درجي غير مساواتون حل ڪرڻ

6.4.1 حقيقي عددي سرن سان هڪ درجي غير مساواتون حل ڪرڻ.

هيٺيان مثال اسانجي مدد ڪندا حل سمجهڻ ۽ عددي ليڪ تي ظاهر ڪرڻ ۾.

مثال 01 $3x+1<7\ \ \forall x\in W$ کي عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو:

حل: گهربل

$$3x+1<7 \qquad \forall x\in W$$
$$3x-1<7-1$$
$$3x<6$$
$$x<\frac{6}{3}$$
$$x<2$$

جيتوڻيڪ، حل سيٽ $\{x\,|\,x\in W \text{ and } x<2\}=\{0,1\}$ آهي.

حل کي عددي ليڪ تي هيٺين ريت ظاهر ڪبو آهي.

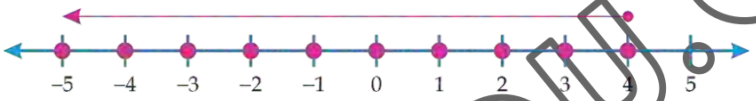
مثال 02 $x-11\le 9-4x \quad \forall x\in Z$ کي عددي ليک تي ظاهر ڪريو:

حل مليل $x-11\le 9-4x \quad \forall x\in Z$

$$x-11\le 9-4x$$
$$x+4x\le 9+11$$
$$5x\le 20$$
$$x\le \frac{20}{5}$$
$$x\le 4$$

تنهنڪري، حل سيٽ $\{x\,|\,x\in Z \text{ and } x\le 4\}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ آهي

حل کي عددي ليک تي هيٺين ريت ظاهر ڪبو آهي.



مثال 03 $2x+5>7 \; x\in Z$ جو حل سيٽ لهو، عددي ليک تي پڻ ظاهر ڪريو:

حل مليل $2x+5>7 \; x\in Z$

هيءَ غير مساوات هيٺين ريت ظاهر ڪبي آهي.

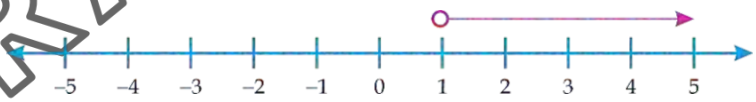
$$2x>7-5$$

يا $2x>2$

يا $x>1$

تنهنڪري حل سيٽ $\{x\,|\,x\in Z \wedge x>1\}$ آهي.

عددي ليک تي هيٺين ريت ظاهر ڪبو آهي.



مثال 04 $-6<2x+1<11, \quad \forall x\in Z$ جو حل سيٽ لهو، عددي ليک تي بڻ ظاهر ڪريو:

حل مليل $-6<2x+1<11, \quad \forall x\in Z$

هيءَ غير مساوات هيٺين ريت ظاهر ڪبي آهي.

$-6<(2x+1)$ ۽ $2x+1<11$

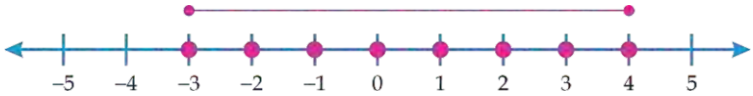
يا $-6-1<2x$ ۽ $2x+1<11-1$

يا $-7<2x$ ۽ $2x<10$

يا $\frac{-7}{2} < x$ ۽ $x < 5$

تنهنڪري حل سيٽ $\{x | x \in Z \wedge -\frac{7}{2} < x < 5\} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ آهي.

عددي ليڪ تي هيٺين ريت ظاهر ڪبو آهي.



مثال 05 عائشہ چئن مان تن ٽيسٽن ۾ 78، 72 ۽ 86 اسڪور ڪيو، چوٿين ٽيسٽ ۾ ڪيترو اسڪور ڪرڻ گهرجي جو سراسري 80 اسڪور ٿئي.

حل: فرض ڪريو تہ چوٿين ٽيسٽ جو اسڪور x آهي.

$$\frac{78+72+86+x}{4} \geq 80$$

$$78+72+86+x \geq 320$$

$$236+x \geq 320$$

$$x \geq 320-236$$

$$x \geq 84$$

عائشہ کي 80 جي سراسري برقرار رکڻ لاءِ چوٿين ٽيسٽ ۾ 84 اسڪور ڪرڻ گهرجي.

مشق 6.3

1. هيٺين غير مساواتن جو حل سيٽ لهو ۽ عددي ليڪ تي ظاهر ڪريو.

(i) $2x-7 > 6+x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

(ii) $7x-6 > 3x+10, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $\frac{y+5}{20} < \frac{25-4y}{10}, \forall y \in \mathbb{N}$

(iv) $|2x+3| < x+2, \forall y \in \mathbb{N}$

(v) $|2y+8| < 11, \forall y \in \mathbb{R}$

(vi) $5(2y-3) > 6(y-8), \forall y \in \mathbb{R}$

2. عليءَ پنهنجي ٻن ٽيسٽن ۾ ترتيبوار 66 ۽ 72 مارڪون اسڪور ڪيون، هن کي ٽئين ٽيسٽ لاءِ ڪيترون مارڪون اسڪور ڪرڻ گهرجن. جيڪڏهن هڪ اضافي انعام جي قابل ٿيڻ لاءِ گهٽ ۾ گهٽ سراسري 75 مارڪون گهربل هجن.

3. 7 نندو آهي هڪ عدد جي تي دفعا جوڙاپت جي ۽ 5 گهٽ ۾ گهٽ آهي 11 کان، ان صورت کي مطمئن ڪندڙ سڀ عدد لهو.

مشق ورجايو 6

.1 صحيح ۽ غلط سوال

هيٺين جملن کي غور سان پڙهو ۽ صحيح بيان جي صورت ۾ "T" تي گول ٻايو ۽ غلط جي صورت ۾ "F" تي.

(i) $ay+b=0$ جتي $a=0$ هڪ درجي مساوات آهي. T/F

(ii) $3y-2<7 \wedge y \in \mathbb{N}$ جو حل سيٽ $\{4, 5, 6, \ldots\}$ آهي. T/F

(iii) $\sqrt{y}+1=3$ جو حل سيٽ $\{4\}$ آهي. T/F

(iv) $|4y|=8$ جو حل سيٽ $\{2, -2\}$ آهي. T/F

(v) $-2 \le x \le 2, x \in \mathbb{R}$ جو حل سيٽ $\{-2,0,2\}$ آهي. T/F

.2 خال پريو:

(i) $2y=-y$ جو حل سيٽ _____ آهي.

(ii) $\sqrt{y+5}=5$ جو حل سيٽ _____ آهي.

(iii) $|x|-4=0$ جو حل سيٽ _____ آهي.

(iv) $\sqrt{x+5}+2=4$ جو حل سيٽ _____ آهي.

(v) $0<y+2<5$ جو حل سيٽ _____ آهي جڏهن $y \in$.

.3 صحيح جوابن تي ٽڪ (✓) جو نشان لڳايو.

(i) هڪ متغير (بدلجندڙ) (Variable) ۾ هڪ درجي مساوات جو حل سيٽ آهي.

(a) هڪ عنصر (b) ٻه عنصر

(c) ٽي عنصر (d) هڪ کان وڌيڪ عنصر

(ii) $|-20|$

(a) $=20$ (b) <20

(c) $=-20$ (d) >20

(iii) $x \le 4$ جو مطلب آهي

(a) $x<4$ (b) $x=4$

(c) $x<4$ or $x=4$ (d) $x>4$ or $x=4$

(iv) $\sqrt{y} = 10$ جو حل سيٽ آهي:

(a) $\{100\}$ (b) $\{10\}$

(c) $\{-10\}$ (d) $\{-10,10\}$

(v) $\sqrt{y+4} + 2 = 8$ آهي هڪ:

(a) هڪ درجي مساوات (b) مولي مساوات

(c) ڪعبي مساوات (d) بہ درجي مساوات

(vi) $5-3y = -7$ جو حل سيٽ آهي.

(a) $\{-4\}$ (b) $\{1, 4\}$

(c) $\{4\}$ (d) $\{12\}$

(vii) $\sqrt{5y+5} + 5 = 10$ جو حل سيٽ آهي:

(a) $\{\pm 4\}$ (b) $\{5\}$

(c) $\{4\}$ (d) $\{-4\}$

(viii) $\left|\frac{5y}{3}\right| = 5$ جو حل سيٽ آهي:

(a) $\{3\}$ (b) $\{-5, 5\}$

(c) $\{3, -3\}$ (d) $\{-3\}$

(ix) $|-y| = 0$ جو حل سيٽ آهي:

(a) $\{1\}$ (b) $\{-1\}$

(c) $\{0\}$ (d) $\{\ \}$

(x) جيڪڏهن $x > 0$، $y > 0$ ۽ $x-y < 0$ تہ پوءِ

(a) $x < y$ (b) $x + y < 0$

(c) $x > y$ (d) $y - x < 0$

خلاصو

- $ax + b = 0,$ جهڙي هڪ مساوات جتي $a,b \in \mathbb{R}$ ۽ $a \neq 0$ هجي انکي هڪ درجي مساوات چئبو آهي.
- هڪ مساوات جنهن ۾ مول جي نشاني هجي انکي مولي مساوات غير ناطق (Irrational equation) چئبو آهي، مولي مساوات جي ٻاهرين بنيادن جي صورت ۾ حل جي چڪاس ضروري آهي.
- جيڪڏهن $x \in \mathbb{R}$ تہ پوءِ $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x & < 0 \end{cases}$
- جيڪڏهن $x,y \in \mathbb{R}$ پوءِ

(i) $|x| \geq 0$ (ii) $|-x| = |x|$ (iii) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(iv) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (v) $|x| = b$ then $x = b$ or $x = -b$

- غير مساوات لاءِ اسين $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ استعمال ڪندا آهيون:
- هڪ درجي آلجبري اظهار جنهن ۾ غير برابريءَ جي نشاني هجي انکي هڪ درجي غير برابري يا غير مساوات چئبو آهي.
- غير مساوات جون خاصيتون:

(i) $a < b$ يا $a = b$ يا $a > b$ ، $\forall a,b \in \mathbb{R}$ تہ رخي مساوات (Trichotomy)

(ii) $a > b$ ۽ $b > c \Rightarrow a > c$ ، $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ معتدي مساوات (Transitive)

(iii) $a > b$ ، $c > 0 \Rightarrow ac > bc$ ۽ $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ، $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ ضرب ۽ ونڊ جي خاصيت.
(Multiplication and Division Properties)

يونٽ 7

سڌي ليڪ ۾ گراف ۽ ان جا استعمال

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ کي مڪمل ڪرڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ،

- حقيقي عددن جي جوڙي کي ترتيبوار جوڙي جي صورت ۾ سجاڻي سگهن.
- مختلف مثالن سان هڪ ترتيبوار (جوڙي جي سجاڻپ ڪري سگهن جهڙي طرح (2, 3) کي امتحاني هال ۾ ظاهر ڪيل جاءِ جي صورت ۽ انهن جي ٻي قطار ۽ ٽي ڪالم جي صورت ۾ ڪاٽ ڪن.
- ڪارتيسي مٿاڇري / عام مٿاڇري تي گوني ڪنڊ ٽڪنڊي تي ڪپيندڙ ٻن ليڪن کي O نقطي وٽ اڏواڏ ڪرڻ کي ڳان ڪري سگهن.
- مستطيلي مٿاڇري تي x— محور ۽ y— محورکي ترتيبوار ٽپڪو "O" کي اصل ٽپڪي طور ۽ محددي محور ڪري سجاڻپ ڪن.
- مستطيلي مٿاڇري تي، ترتيب ڏنل جوڙي کي جاميٽري جي ٽپڪن طور ظاهر ڪري سجاڻپ ڪن تہ
  - a کي x— محددي (يا abscissa) x— محدد
  - b کي y— محددي (يا ordinate) y— محدد
- ٽپڪن جي ڏنل سيٽن کي ملائي مختلف جاميٽري جون شڪلون ٺاهي سگهن (ليڪ ٽڪر، ٽڪنڊو مستطيل وغيره).
- ٻن بدلجندڙن جي هڪ درجي مساوات جي مليل جوڙي ۾ رقمن جي جدول ٺاهي سگهن.
- ڏنل اظهار جو گراف حاصل ڪرڻ لاءِ ٽپڪن جا جوڙا ظاهر ڪري سگهن.
- گراف ٺاهڻ لاءِ مناسب پئمانو چونڊي سگهن.
- گراف ٺاهي سگهن.
  - $y = c$ نموني جي مساوات جو
  - $x = a$ نموني جي مساوات جو
  - $y = mx + c$ نموني جي مساوات جو
  - $y = mx$ نموني جي مساوات جو
- x ۽ y جي رقمن لاءِ مليل جدول مان گراف ٺاهي سگهن.
- روزمره زندگي سان تعلق رکندڙ حساب حل ڪري سگهن.
- سڌي تناسب ۾ مليل ٻن مقدارن جي تبديل ٿيندڙ گراف کي سڌي ليڪ جي گراف ۾ ٻڌائي سگهن.
- هڪ مقدار جي ٻي مقدار سان مشابهت رکندڙ گراف کي پڙهي ۽ سجاڻي سگهن.
- تبديل ڪرڻ جي نمونن جا گراف پڙهي سگهن.
  - ميل ۽ ڪلوميٽر
  - ايڪڙ ۽ هيڪٽر
  - سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ
  - پاڪستاني ۽ ٻين ملڪن جو چالو سڪو وغيره.
- همزاد هڪ درجي مساوات ٻن بدلجندڙ سان، گراف جي طريقي سان حل ڪري سگهن.

7.1 ڪارتيسي مٿاڇرو ۽ سڌي ليڪ جا گراف

7.1.1 حقيقي عدد جي جوڙي جي ترتيب ڏنل جوڙي جي صورت ۾ سڃاڻپ ڪريو.

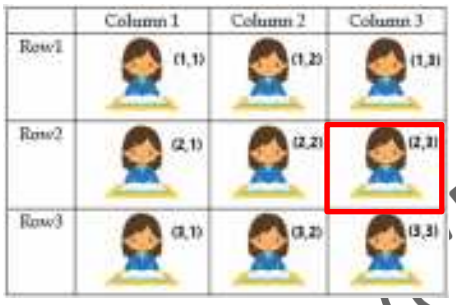
ترتيب ڏنل جوڙو ٻن حقيقي عددن جي جوڙو آهي، جنهن کي خاص ترتيب سان ننڍين ڏنگين ۾ لکيو ويندو آهي. هي ٻه رخي جڳهه ۾ شين جي جڳهه کي ظاهر ڪرڻ ۾ مدد ڪندو آهي.

7.1.2 مختلف مثالن سان ترتيب ڏنل جوڙي جي سڃاڻپ ڪريو، جيئن (2, 3) ترتيب ڏنل جوڙ، امتحان هال ۾ سيٽ کي ڏيکارڻ لاءِ ظاهر ڪري ٿو ته ٻي قطار ۽ ٽيون ڪالم آهي.

اچو ته پنهنجي چوڌاري موجود شين جا مثال ڏسون، هنن مثالن سان اسان، شين کي قطار ۽ ڪالم ۾ موجود جڳهه کي ظاهر ڪريون ٿا جيڪي ترتيب ڏنل جوڙو ٺاهين ٿيون. ترتيب ڏنل جوڙ ڪنهن شيءِ يا جڳهه جي حالت جي نشاندهي ڪري ٿو.

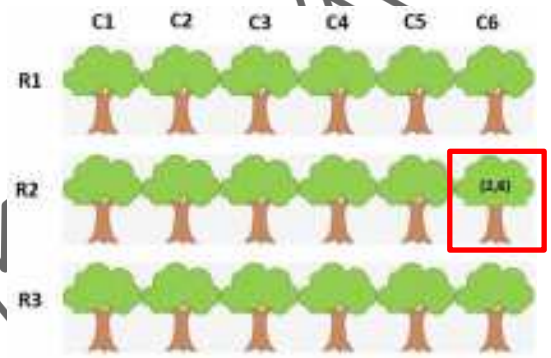
مثال 01

ترتيب ڏنل جوڙو (2, 3) شاگرد جي امتحان هال ۾ موجود جڳهه کي ظاهر ڪري ٿو. جيئن ٻي قطار ۽ ٽيون ڪالم ساڳي طرح هر شاگرد منفرد ترتيب سان ظاهر ٿيل آهي.



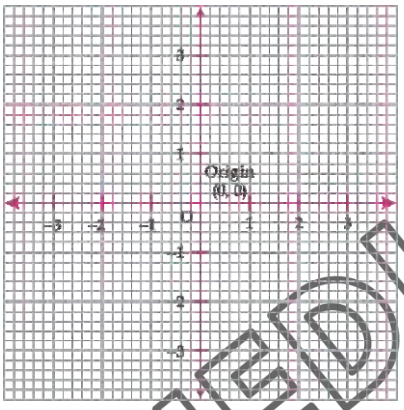
مثال 02

جيڪڏهن هڪ هاري باغ ۾ هڪ جيتري مفاصلي تي وڻ پوکڻ جي منصوبه بندي ڪري ٿو، ته پوءِ (2, 6) ظاهر ڪري ٿو ته ٻي قطار ۽ ڇهون ڪالم جو وڻ باغ ۾.

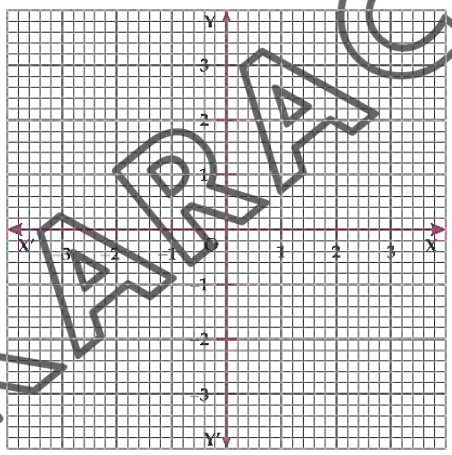


7.1.3 ڪارتيسي/ يام مٿاڇري تي ٻہ عددي ليڪون ڪنهن گوني ڪنڊ ڪي O ٽبڪي تي ڪپين ٿيون بيان ڪريو.

ڪارتيسي محددي نظام مشتمل حصي ٻن حقيقي عددن جي ليڪن تي جيڪي گوني ڪنڊ تي "O" ٽبڪي وٽ پاڻ ڪي ڪپين ٿيون. ان تي مشتمل هوندو آهي هي ٻہ عددي ليڪون هڪ سڌي سطح جي تعريف ڪن ٿيون جن ڪي ڪارتيسي مٿاڇرو چئبو آهي.



7.1.4 مستطيلي مٿاڇري ۽ اصل ٽبڪو "O" ۽ محددي محور (فقي ۽ عمودي محور x– محور ۽ y– محور) جي سڃاڻپ ڪريو.



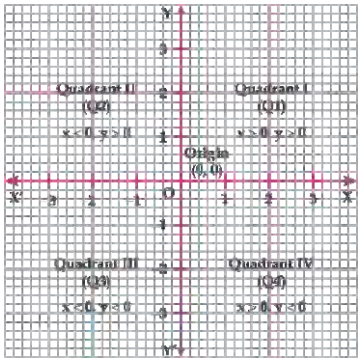
ڪارتيسي محددي نظام ۾، افقي عددي ليڪ کي x–محور ۽ عمودي عددي ليڪ کي y–محور چئبو آهي. اهو نقطو جتي ٻئي ليڪون هڪبئي کي ڪپين تہ ان کي اصل ٽبڪو چئبو آهي، جنهن کي O سان ظاهر ڪيو ويندو آهي.

مليل شڪل ۾ افقي ليڪ XX'، x– محور آهي ۽ عمودي ليڪ YY'، y– محور آهي، نقطو جتي ٻئي ليڪون پاڻ ۾ ملن ٿيون ان کي مٿاڇري جو اصل چئبو آهي جيڪو "O" آهي.

7.1.5 مستطيلي متاڇري تي ترتيب ڏنل جوڙي کي جاميٽري جي ٽٻڪن طور ظاهر ڪري، سڃاڻپ ڪريو.

- a کي x– محددي (يا abscissa) x– محدد
- b کي y– محددي (يا ordinate) y– محدد

عام طور تي ڪوبہ ٽٻڪو ڪارتيسي متاڇري تي ترتيب ڏنل جوڙي (a,b) جي صورت ۾ ظاهر ڪري سگهبو آهي، جنهن ۾ a، x– محددي (abscissa) ۽ b، y– محددي (ordinate) آهي.



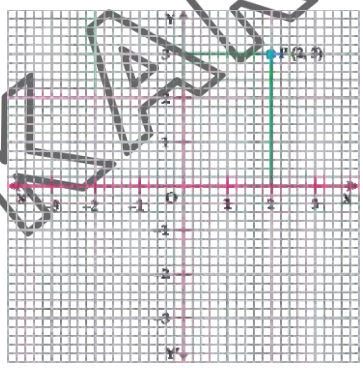
متاڇري تي ٽٻڪن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ اسان کي x– محددي، جيڪو افقي مفاصلو آهي y– محور کان ۽ y– محددي جيڪو عمودي مفاصلو آهي x– محور کان ضروري معلوم هجي.

x– محور ۽ y– محور ڪارتيسي متاڇري کي چئن حصن (چوٿن) ۾ ورهائين ٿا جن جا رومن عددي عدد I، II، III ۽ IV آهن. ڪارتيسي متاڇري کي xy متاڇر پڻ چئبو آهي.

- پهرين چوٿي I ۾ ٻئي x– محددي ۽ y– محددي واڌو آهن $x > 0$ ۽ $y > 0$.
- ٻئي چوٿي II ۾ x محددي ڪاٽو ۽ y– محددي واڌو آهي $x < 0$ ۽ $y > 0$.
- ٽئين چوٿي III ۾ x محددي ۽ y– محددي ڪاٽو آهن $x < 0$ ۽ $y < 0$.
- چوٿين چوٿيIV ۾ x محددي واڌو ۽ y– محددي ڪاٽو آهي $x > 0$ ۽ $y < 0$.
- اصل ٽٻڪي تي $x = y = o$، تنهنڪري اصل نقطي جا محددي $(0, 0)$ آهن.

گراف ڪيڊ جو طريقي جڏهن هڪ ٽٻڪو ڪارتيسي متاڇري (xy متاڇري) تي

اچو تہ هيٺين مثالن ذريعي سکون تہ ڪيئن هڪ ٽٻڪو ڪارتيسي متاڇري تي ظاهر ڪجي.



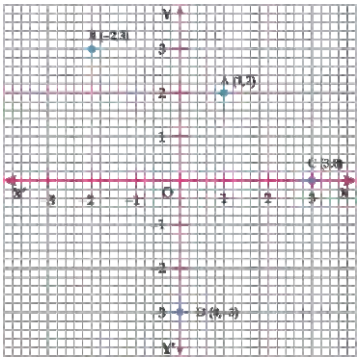
$(2, 3)$ کي ظاهر ڪرڻ جي لاءِ، اصل ٽٻڪي کان شروع ڪريو ۽ 2 ايڪا ساڄي طرف y– محور کان ۽ پوءِ 3 ايڪا مٿي x– محور کان حرڪت ڪريو جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. اسان P ٽٻڪي تي پهچي وياسين جيڪو $(2,3)$ کي ظاهر ڪري ٿو.

مثال 01 هيٺين ٽبڪن جا x محدد ۽ y– محدد ظاهر ڪريو. اهو پڻ ٻڌايو ته ڪهڙي چوٿي ۾ اهي موجود آهن، ٽبڪا پڻ ظاهر ڪريو.

(i) A (1, 2) (ii) B (–2, 3)

(iii) C (3, 0) (iv) D (0, –3)

حل: پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو



(i) A (1, 2)

هتي x– محدد 1 ايڪو ۽ محدد 2 ايڪا آهن.

جيئن ته $x > 0$ ۽ $y > 0$ مليل ٽبڪا پهرين چوٿي ۾ آهن.

(ii) B (–2, 3)

هتي x– محدد 2– ايڪا ۽ y– محدد 3 ايڪا آهن.

جيئن ته $x > 0$ ۽ $y > 0$ تنهنڪري مليل ٽبڪا ٻئي چوٿي ۾ آهن.

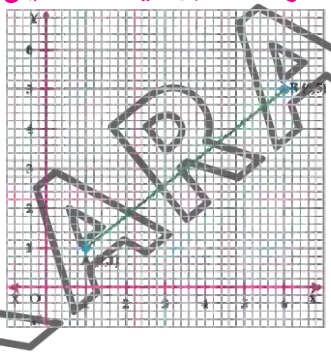
(iii) C (3, 0)

هتي x– محدد 3– ايڪا ۽ y– محدد 0 ايڪا آهي. تنهنڪري C ٽبڪو x– محور تي آهي جيڪو اصل ڪان ساڄي طرف آهي.

(iv) D (0, –3)

هتي x– محدد 0 ايڪا، y– محدد 3 ايڪا آهن. تنهنڪري D ٽبڪو y– محور تي آهي جيڪو اصل ڪان هيٺ آهي.

7.1.6 مختلف جاميٽري جون شڪليون ٺاهيو (ليڪ ٽڪر ٽڪنڊو ۽ مستطيل وغيره.



هيٺين ڪلاسن ۾ اسان ڪيترن ئي جاميٽري جي شڪلين جي باري ۾ پڙهي آيا آهيون ۽ پڻ ڏنل معلومات مطابق ڪيئن ٺا ٺاهجي. هاڻ اسان مختلف جاميٽري جون شڪليون گراف پيپر تي مليل ٽبڪن مطابق ٺاهينداسين.

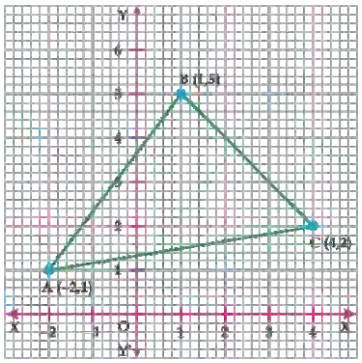
مثال 01 ليڪ ٽڪر AB ٺاهيو جنهن جا آخري ٽبڪا A (1, 1) ۽ B (6, 5) آهن.

طريقو: پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

پهرئين اسان گراف پيپر تي ليڪ جي ٽبڪن جي نشاندهي ڪنداسين، پوءِ انهن کي ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ حاصل ڪرڻ لاءِ ملائينداسين، جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

مثال 02 تڪنڊو ABC ناهيو جنهن جا ڪنڊ وارا ٽڪا A (–2, 1)، B (1, 5) ۽ C (4, 2) آهن.

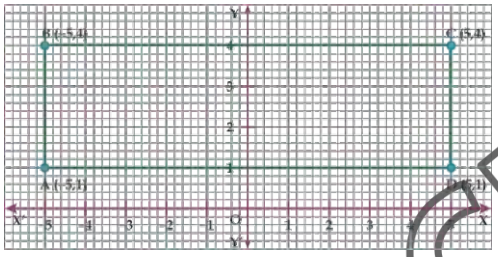
طريقو:



پئمانو: 5 نندا چورس = 1 ايڪو.
پهرئين اسان A، B ۽ C جي ٽڪن جي نشاندهي ڪنداسين، پوءِ انهن کي ملائي ΔABC حاصل ڪنداسين، جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

مثال 03 هڪ مستطيل ناهيو جنهن جا ڪنڊ وارا ٽڪا A (–5, 1)، B (–5, 4)، C (5, 4) ۽ D ((5, 1)) آهن.

طريقو:



پئمانو: 5 نندا چورس = 1 ايڪو.
A (–5, 1)، B (–5, 4)، C (5, 4) ۽ D ((5,1)) ٽڪن جي گراف ۾ نشاندهي ڪريو. هاڻ ٽڪن A، B، C ۽ D کي پاڻ ۾ ملايو، نتيجو (1) AB مستطيل آهي.

7.1.7 ٻن بدلجندڙن ۾ هڪ درجي مساوات کي حل ڪرڻ لاءِ رقمن جي جوڑن جي جدول کي ناهڻ.

هن جي هيٺين مثالن جي مدد سان وضاحت ڪري سگهجي ٿي.

مثال 01 فرض ڪريو ته $x + y = 5$، ٻن بدلجندڙن x ۽ y ۾ هڪ درجي مساوات هجي x ۽ y جي ڪجهه رقمن لاءِ جدول ناهيو.

حل: مليل آهي ته $x + y = 5$ جنهن $y = 5x$ لکي سگهجي ٿو.
هاڻ جدول تيار ڪيو، x جون رقمون وجهو ۽ y جي قيمتون حاصل ڪريو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	8	7	6	5	4	3	2	...

مشق 7.1

.1 هيٺين ٽپڪن مان x– محددي ۽ y محددي جي وضاحت ڪريو.

i. A(-2, 2) ii. B(5, -1) iii. C(4, 0)
iv. D(-5, -6) v. E(3, 4) vi. F($-\sqrt{8}$, $\sqrt{8}$)

.2 هيٺيان ٽپڪا ڪهڙي چوٿائي ۾ موجود آهي واضح ڪريو.

i. A(2, -1) ii. B(-3, 3) iii. C($2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$)
iv. D(-2, -4) v. E(5, 4) vi. F($\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$)

.3 x ۽ y متاڇري ۾ هيٺين ٽپڪن A، B، C ۽ D کي ناهيو.

i. A(2, 1), B(3, 2), C(-3, 4), D(-4, -5)
ii. A(2, 0), B(0, 2), C(3, -3), D(-3, 3)
iii. A(0, 0), B(-3, -3), C(5, -6), D(-6, 5)

.4 ٽپڪن A (4, 6) ۽ B (–6, 8) کي ملائي، ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ ناهيو.

.5 ٽپڪن A (–1, 4) ۽ B (–3, 6) کي (3, –2) کي ملائي ٽڪنڊو ABC ناهيو.

.6 ٽپڪن A (0, 1)، B (4, –3)، C (8, 5) ۽ D (4, 7) کي ملائي ABCD مستطيل ناهيو.

.7 ٽپڪن O (0, 0)، A (5, 0)، B = (5, 5) ۽ C (–2, –3) کي ملائي OABC چورس ناهيو.

.8 ٽپڪن O (0, 0)، A (3, –4)، B (1, –7) ۽ C (–2, –3) کي ملائي OABC هڪ پوروچوٽ چوڪنڊو ناهيو.

.9 هيٺين هڪ درجي مساوات جي لاءِ x ۽ y جي ڪجهه رقمن جي جدول ناهيو.

i. $x+y-2=0$ ii. $2x-y-2=4$
iii. $\frac{1}{2}(x+2y)-6=0$ iv. $\frac{2}{3}(x-2y)=-2$

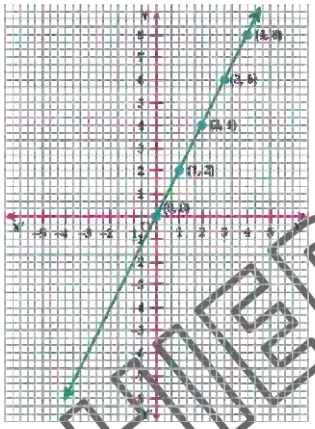
7.1.8 مليل اظهار جو گراف حاصل ڪرڻ لاءِ رقمن جا جوڙ ظاهر ڪريو.

فرض ڪريو تہ هڪ درجي مساوات $y=2x$ ۾ بدلجندڙن تي مشتمل آهي جتي x کي آزاد (Independent) ۽ y کي منحصر (Dependent) بدلجندڙ چئبو آهي. چاڪاڻ تہ y جي رقم جو دارومدار x جي رقم تي آهي.

مسلسل مساوات جو گراف ناهڻ جي لاءِ اسان x ۽ y جي جدول ناهينداسين ۽ هي ترتيب ڏنل جوڙ انهي جي محددي متاڇري تي رکنداسين، ٻہ ٽپڪا ليڪ کي واضح ڪرڻ لاءِ ڪافي آهي، تنهن هوندي ٻہ ممڪن غلطين کان بچڻ خاطر ٽن کان وڌيڪ ٽپڪا پڻ ظاهر ڪري سگهجن ٿا.

x	0	1	2	3	4	...
y	0	2	4	6	8	...

لاڳيتو ترتيب ڏنل جوڙن x, y کي گراف ۾ جوڙ ڪندي اهو واضح آهي ته y جي رقم x جي رقم کان ٻيڻي آهي ۽ ان کان پوءِ هڪ ئي ليڪ تي موجود تنهن کي ڏيکارڻ لاءِ اسان هڪ ليڪ ناهينداسين گراف تير جا نشان اهو ظاهر ڪن ٿا، گراف تي ٻنهي پاسي نہ ڪٽندڙ ليڪ آهي. هيٺيون گراف ائين ڏسڻ ۾ اچي ٿو شڪل ۾ ڏسو.



7.1.9 گراف ناهڻ جي لاءِ مناسب پئماني جي چونڊ ڪريو.

پئماني جي اهڙي طرح چونڊ ڪجي جو مواد آساني ظاهر ڪري ۽ پڙهي سگهجي.

هڪ مساوات جو گراف ناهڻ جي لاءِ اسان هڪ پئمانو چونڊيندا سين. مثال طور هڪ ننڍو چورس هڪ يونٽ کي ظاهر ڪندو يا 2 ننڍا چورس 1 يونٽ کي ظاهر ڪندا وغيرو، ان جي چونڊ پني جي پکيڙ ڏسي ڪبي. ڪنهن وقت ٻنهي x ۽ y محددن جي لاءِ اسان ساڳي پئماني جي چونڊ ڪنداسين اسان مختلف پئمانا، x ۽ y محددن جي رقمن کي ڏسي چونڊ ڪنداسين.

7.1.10 گراف ٺاهيو.

- $y = c$ جي نموني جي مساوات جو.
- $x = a$ واري نمونڳ جي مساوات جو.
- $y = mx$ واري نمونڳ جي مساوات جو.
- $y = mx + c$ واري نمونڳي جي مساوات جو.

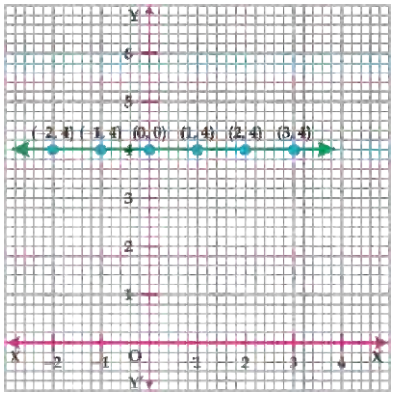
(i) 7.1.10 $y = c$ نموني واري مساوات جو گراف ٺاهڻ.

مثال 01 گراف ٺاهيو جڏهن $y = 4$

حل: پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو

گراف ٺاهڻ جي لاءِ جدول ٺاهيو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	4	4	4	4	4	4	4	...



$y = 4$ مساوات جو گرف شڪل ۾ ڏيکاريل آهي

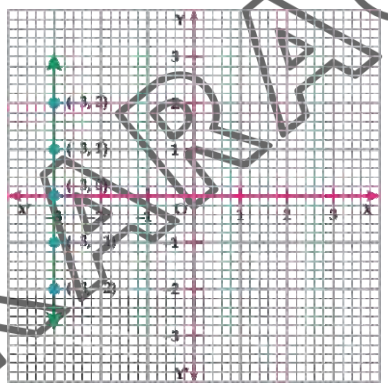
نوٽ:
$y = c$ جو گراف x– محور جي پوروچوٽ آهي.

(ii)7.1.10 $x = a$ نموني واري مساوات جو گراف ٺاهڻ

مثال 01 $x = 3$ مساوات جو گراف ٺاهيو.

طريقو: پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

x	-3	-3	-3	-3	-3	...
y	-2	-1	0	1	2	...



مساوات جو گراف شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

نوٽ:
$x = a$ جو گراف y– محور جي پوروچوٽ آهي.

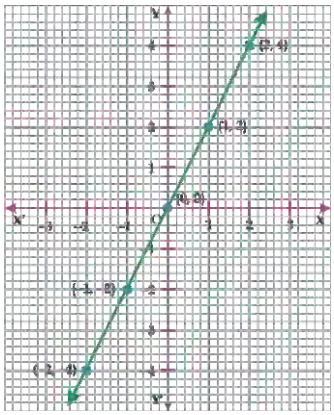
7.1.10 (iii) $y = mx$ نموني واري مساوات جو گراف ٺاهڻ.

$y = mx$ مساوات ۾ y جي رقم (يا y– محدد) m ۽ ضرب پت آهي جڏهن ته m هڪ مستقل حقيقي عدد آهي.

مثال 01 جيڪڏهن $y = 2x$ ته m جو ملهه لهو ۽ گراف ٺاهيو.

حل: پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

گراف جي لاءِ جدول ٺاهيو.



x	-2	-1	0	1	2	...
y	-4	-2	0	2	4	...

نوٽ:
$y = mx$ جو گراف هميشه اصل ٽپڪي مان گذرندو.

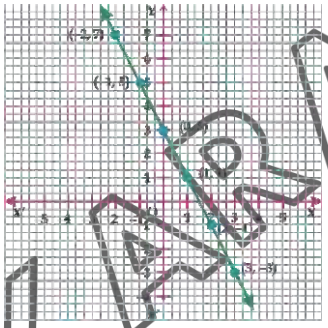
7.1.10 (iv) $y = mx + c$ نموني واري مساوات جو گراف ٺاهڻ.

$y = mx + c$ مساوات ۾ m ۽ c حقيقي عدد آهن ۽ m = گهيريا لاهي، y = ليڪ کي جدا ڪندڙ.

مثال 01 $y = -2x + 3$ جو گراف ٺاهيو.

پئمانو: 3 ننڍا چورس = 1 ايڪو.

گراف ڪڍڻ کاءِ جدول ٺاهيو.



x	-2	-1	0	1	2	3	...
y	7	5	3	1	-1	-3	...

نوٽ:
$y = mx + c$ جو گراف هميشه y– محور کي $y = c$ تي ڪپيندو.

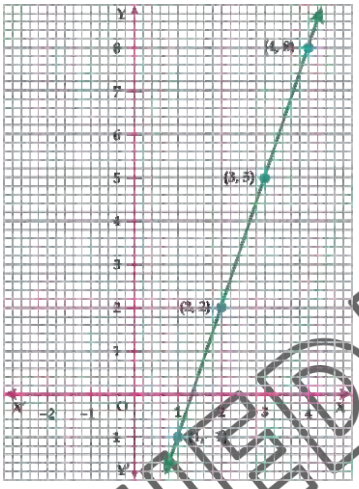
7.1.11 جدا جدا رقمن جي ڏنل جدول گراف ٺاهڻ.

جدا جدا مليل رقمن جي جدول جو گراف ٺاهڻ جي لاءِ x ۽ y کي ٽپڪن جي صورت ۾ ملائبو آهي جيڪي گراف پني تي ظاهر ڪبيون آهن.

مثال 01 هيٺ ڏنل جدول ۾ مليل ٽڀڪن جو گراف ٺاهيو.

x	1	2	3	4	...
y	-1	2	5	8	...

طريقو: مليل جدول ۾ A (1, 1)، B (2, 2)، C (3, 5) ۽ D (4, 8) آهي تہ اسان گراف پني تي گراف ٺاهيندا سين.
پئمانو: 5 ننڍ چورس = 1 ايڪو.

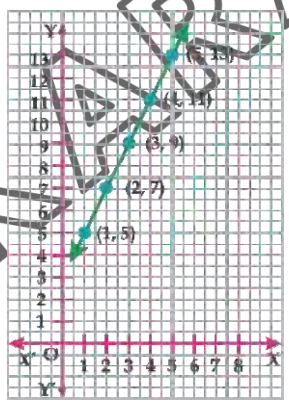


7.1.12 روزمرو زندگي سان تعلق رکندڙ حسابن کي حل ڪريو.

هڪ درجي مساوات کي روزمرو زندگي جي حسابن سان نموني طور عددن کي استعمال ڪري سگهجي ٿو، جهڙوڪ وقت جي عرصي ۾ توهان ڪيترا پئسا ٺاهي سگهو ٿا يا سائيڪل هلائڻ وارو گهٽ شرح تي پيڊلنگ ڪرڻ سان ڪيتري مفاصلي تائين سفر ڪري سگهي ٿو. محددي مٿاڇري تي اهڙن تعلقن جو گراف ٺاهڻ جي لاءِ اسان اڪثر ڪري حساب ۽ انهن جي حل بابت سوچيندا آهيون.

مثال 01

ڪنهن ماڻهو جو وزن y ڪلوگرامن ۾، عمر x سالن ۾ مساوات $y = 2x + 3$ جي صورت ۾ بيان ڪيل آهي. عمر ۽ وزن جو مساوات مطابق گراف ٺاهيو.



عمر (x)	1	2	3	4	5	...
وزن (y)	5	7	9	11	13	...

مشق 7.2

1. هيٺ ڏنل مساوات جي جدول ناهيو، جيڪا رقمن جي جوڙي $x + y = 6$ کي مطمئن ڪري.

2. هيٺ مليل جدول مان مناسب پئمانو وٺي گراف ناهيو.

x	0	-1	4	-4
y	2	4	5	-5

3. هيٺين جو گراف ناهيو.

i. $y = 3$ ii. $x = 3$ iii. $y = 0$

iv. $y = 2x + y$ v. $x = 3.5$ vi. $-y = 2x$

4 هيٺ ڏنل جدول مان غائب ٿيل محدد معلوم ڪريو

نمبر شمار	مساوات	x– محدد	y– محدد
(i)	$y = \frac{1}{2}x$		0
		4	
(ii)	$x = \frac{2}{3}y$	1	
			$\frac{3}{2}$
(iii)	$2x + 4y = 8$	0	
			$\frac{1}{4}$
(iv)	$2x + y = 6$	1	
			0
(v)	$x - y = 2$		0
		1	
(vi)	$x - 3y = 6$	3	
			-1

5. هڪ ماڻهو جو وزن y ڪلوگرامن، عمر x سالن ۾ مساوات $y = 2x$ جي صورت ۾ ظاهر ڪئي وئي آهي ته هيٺين جدول مان عمر ۔ وزن جو گراف ناهيو.

6. عائشہ بن ڦيٽن واري گاڏي لاڳيتو 20 ڪلوميٽر في ڪلاڪ سان هلائي سگهي ٿي. هن صورت جو مفاصلي ۽ وقت جو گراف ناهيو.

(a) 100 ڪلوميٽر سواري ڪرڻ لاءِ عائشہ کي گهربل وقت.

(b) ٽوٽل 3 ڪلاڪن ۾ عائشہ جو طئ ڪيل مفاصلو.

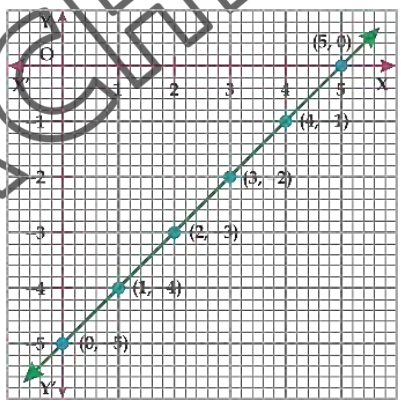
7.2 تبديل ڪرڻ جا گراف:

7.2.1 سڌي تناسب ۾ مليل بن مقدارن سان تبديل ٿيندڙ گراف، هڪ سڌي ليڪ جي گراف، هڪ سڌي ليڪ جي گراف طور سمجهائڻ.

هتي سڌي تناسب سان تعلق رکندڙ بن مقدارن جي تبديل ٿيڻ سان تبديل ٿيندڙ گراف کي سڌي ليڪ ۾ گراف طور فرض ڪنداسين. اسان ترتيب ڏنل جوڙن کي پيش ڪنداسين جيڪي $y = x - 5$ مساوات جي صورت ۾ گراف تي موجود آهن انهن جي رقم کي اسان هيٺ ڏنل جدول مطابق معلوم ڪنداسين.

x	0	1	2	3	4	5
y	-5	-4	-3	-2	-1	0
(x, y)	(0, -5)	(1,-4)	(2, -3)	(3, -2)	(4, -1)	(5, 0)

مليل هڪ درجي مساوات مطابق گراف جي ٽبڪن کي ظاهر ڪريو، جنهن ۾ هر x–محدد ۾ ايڪي جي تبديلي جو y–محدد جي رقم جي تبديلي سان تناسب آهي.



7.2.2 هڪ مقدار جو تعلق ٻي مقدار سان آهي مليل گراف کي پڙهي جاڻ حاصل ڪرڻ.

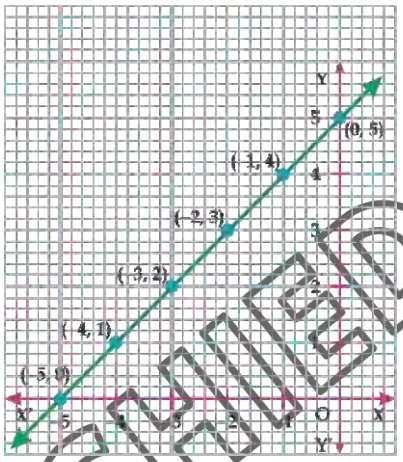
سمجهو تہ $y = x - 5$ هڪ درجي مساوات

$y = x - 5$ جي مدد سان اسان x جون رقمون ۽ y جون رقمون تناسب سان پڙهي سگهون ٿا.

y جي ڏنل رقم مان اسان x سان تعلق رکندڙ رقم پڙهي سگهون ٿا.
$y = x - 5$ کي $x = y - 5$ جي مساوات ۾ ۽ تعلق رکندڙ گراف پڻ ناهي سگهون ٿا.
تبديل ٿيل گراف ۾ اسان x کي y جي جز ۾ ظاهر ڪري سگهون ٿا. جيئن هيٺ ڏنل آهي $y = x - 5$

y	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	0	1	2	3	4	5
(y, x)	(-5, 0)	(-4, 1)	(-3, 2)	(-2, 3)	(-1, 4)	(0, 5)

x جو تبديل ٿيل گراف y جي نسبت سان گراف پني تي نهيل آهي.



7.2.3 تبديل ڪرڻ جي نموني جا گراف پڙهو

- ميل ۽ ڪلوميٽر
- ايڪڙ ۽ هيڪٽر
- سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ
- پاڪستاني سڪو ۽ ٻين ملڪن جا سڪا وغيرو.

جيڪڏهن مقدارن ۾ وڌڻ يا گهٽ ٿيڻ جو تعلق آهي تہ، ان تعلق جو گراف سٽي ليک ۾ ٿيندو، جيڪو ٻنهي مقدارن جي حد کي ڏيکاريندو گڏيل محدديءَ محور تي.

(i) ميل ۽ ڪلوميٽر جي تبديلي جو گراف پڙهن.

اچو تہ ميل ۽ ڪلوميٽر جي گراف جو نموني بابت بحث ڪريون، ٻئي ايڪا مفاصلي جا هجن. جيڪڏهن ميل جو مفاصلو x- محور تي آهي تہ ڪلوميٽر جو مفاصلو y- محور تي ٿيندو. اچو تہ هيٺيون مثال ڏسون.

مثال هيٺيان ميلن ۽ ڪلوميٽرن جي تبديلي جا گراف پڙهو.

(i) 2 ميل ڪلوميٽرن ۾

(ii) 5 ميل ڪوميٽرن ۾

(iii) 3 ميل ڪلوميٽرن ۾

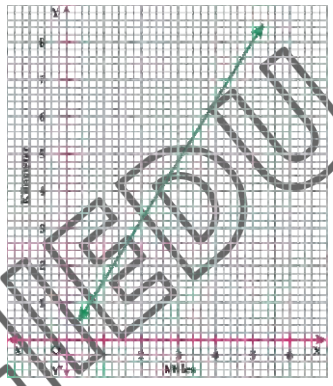
(iv) 7 ميل ڪلوميٽرن ۾

۽ ڏنل پئمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

ميلن ۽ ڪلوميٽرن ۾ تبديلي جو گرا

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ميل x محور تي

5 ننڍا چورس = 1 ڪلوميٽر y محور تي



حل: (i) 2 ميل ڪوميٽرن ۾

پڙهنداسين ته

2 ميل ≅ 3.20 ڪلوميٽرن جي

(ii) 5 ميل ڪلوميٽرن ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

5 ميل ≅ 8 ڪلوميٽرن جي

(iii) 3 ڪلوميٽر ميلن ۾

مٿئين گراف جي مليل پئماني مطابصق پڙهنداسين ته

3 ڪلوميٽر ≅ 1.8 ميل

(iv) 7 ڪلوميٽر ميلن ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

7 ڪلوميٽر ≅ 4.20 ميل

(ii) هڪٽرن ايڪڙن ۾ تبديلي کي پڙهو.

اچو ته هيڪٽر ۽ ايڪڙن جي نموني جي گراف تي بحث ڪريون، ٻئي زمين جي ايراضي جا ايڪا آهن جيڪڏهن هيڪٽر جو مفاصلو x– محور تي ظاهر ڪجي ۽ ايڪڙن جو مفاصلو y– محور تي ، ته اچو هيٺيان مثال ڏسون.

مثال: هيٺيان هيڪٽر ۽ ايڪڙن جي تبديلي جا گراف پڙهو.

(i) 2 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾

(ii) 6 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾

(iii) 10 ايڪڙن کي هيڪٽرن ۾

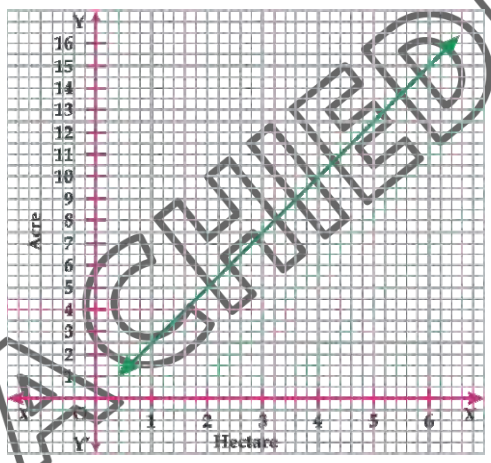
(iv) 8 ايڪڙن کي هيڪٽرن ۾

۽ ڏنل پئمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

هيڪٽرن ۽ ايڪڙن ۾ تبديل ٿيندڙ گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 هيڪٽر x– محور تي

2 ننڍا چورس = 1 هيڪٽر y– محور تي



حل: **(i) 2 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾**

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

2 هيڪٽر ≅ 5 ايڪڙن ۾

(ii) 6 هيڪٽر، ايڪڙن ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

6 هيڪٽر ≅ 5 ايڪڙ جي

(iii) 10 ايڪڙ، هيڪٽر ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

10 ايڪڙ ≅ 4 هيڪٽر

(iv) 8 ايڪڙ هيڪٽرن ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

8 ايڪڙ ≅ 3.20 هيڪٽر

(iii) سينٽي گريڊ جو فارنهائيٽ ۾ تبديلي جو گراف پرهو.

اچو ته سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ گراف جي نموني تي بحث ڪريون. ٻئي گرمي جي درجي جا ايڪا آهن. جيڪڏهن سينٽي گريڊ x– محور تي ظاهر ڪجي ۽ فارنهائيٽ کي y– محور تي ظاهر ڪجي، ته پوءِ اچو ته هيٺيان مثال ڏسون.

مثال: هيٺيان سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ جي تبديلي جا گراف پڙهو.

(i) 1° سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

(ii) 3° سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

(iii) 36° فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

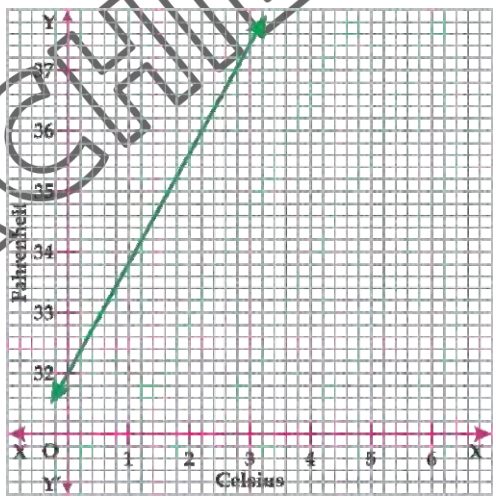
(iv) 37° فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

۽ ڏنل پئمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ ۾ تبديل ٿيندڙ گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 سينٽي گريڊ x– محور تي

5 ننڍا چورس = 1 فارنهائيٽ y– محور تي



حل: (i) 1° سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

1° سينٽي گريڈ ≅ 33.8° کي فارنهائيٽ جي

(ii) 3° سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

3° سينٽي گريڊ ≅ 31.8° کي فارنهائيٽ جي

(iii) 36° فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

36° فارنهائيٽ ≅ 2.2° سينٽي گريڊ

(iv) 37° فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

37° فارنهائيٽ ≅ 2.8° سينٽي گريڊ جي

(iv) سکي جي تبديلي جو گراف پڙهو.

مثال 1: هيٺيان گراف، آمريڪي ڊالر ۽ پاڪستاني رپيو جي تبديلي جا پڙهو.

(i) 2 آمريڪي ڊالرن کي رپين ۾

(ii) 5 آمريڪي ڊالرن کي روپين ۾

(iii) 360 رپين کي آمريڪي ڊالرن ۾

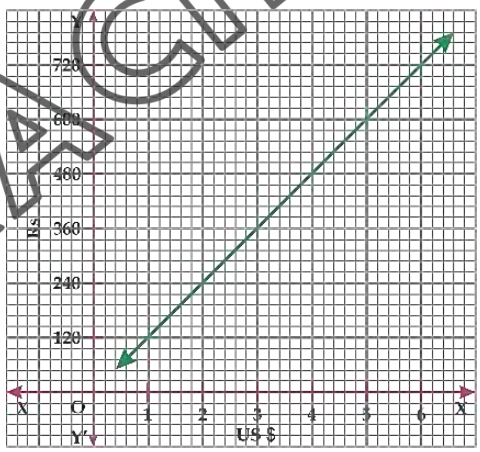
(iv) 720 رپين کي آمريڪي ڊالرن ۾

۽ ڏنل پئمانا استعمال ڪري تبديل ڪريو.

آمريڪي ڊالرن ۽ پاڪستاني رپين جي تبديلي جو گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 آمريڪي ڊالر x– محور تي

5 ننڍا چورس = 120 پاڪستاني رپيه y– محور تي



حل: (i) 2 آمريڪي ڊالرن کي رپين ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

2 آمريڪي ڊالر ≅ 240 رپين جي

(ii) 5 آمريڪي ڊالرن کي رپين ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

5 آمريڪي ڊالر ≅ 600 رپين جي

(iii) 360 پاڪستاني رپين کي ڊالرن ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

360 رپيو ≅ 3 ڊالر ۾

(iv) 720 پاڪستاني رپين کي ڊالرن ۾

مٿئين گراف کي مليل پئماني مطابق پڙهنداسين ته

720 پاڪستان رپيه ≅ 6 ڊالرن جي

7.3 گرافي طريقي سان ٻن بدلجندڙ تي مشتمل مساوات جو حل:

7.3.1 ٻن بدلجندڙ واري هڪ درجي مساوات کي گرافي طريقي سان حل ڪريو.

اسان اڳ ۾ ئي ٻن هڪ درجي مساوات کي آلجبري طريقي سان حل ڪرڻ سکي آيا آهيون. هاڻ اسان هن حصي ۾ ٻن هڪ درجي مساواتن کي ٻن بدلجندڙن سان گرافي طريقي سان حل ڪرڻ سکنداسين. هتي ٻن ليکن جي ڪپيندڙ ٽپڪو مساوات جو حل سيٽ هوندو آهي.

مثال 01 مليل مساواتن جو گرافي طريقي سان حل سيٽ معلوم ڪريو.

$x + y = 3$ ۽ $x - y = 5$

حل: مليل مساواتن هن طرح آهن.

$x+y = 3 \rightarrow (1)$

۽ $x-y = 5 \rightarrow (2)$

هنن مساواتن کي اسان y جي جزي لاءِ هن طرح لکنداسين

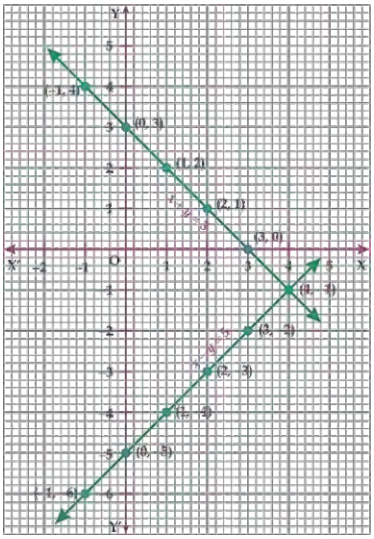
$y = 3 - x \rightarrow (3)$

$y = x - 5 \rightarrow (4)$

هاڻ هرهڪ، هڪ درجي مساوات لاءِ الڳ جدول ٺاهيو.

جدول مساوات (3) جي لاءِ هيٺ ڏنل آهي.

x	-1	0	1	2	3	4	...
y	4	3	2	1	0	-1	...



جدول مساوات (4) جي لاءِ هيٺ ڏنل آهي.

x	-1	0	1	2	3	4	...
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	...

هاڻي ٻنهي جدولن ۾ مليل ٽپڪن کي استعمال ڪري سڌيون ليڪون ناهيو.

اسان ڏسنداسين ته مليل مساواتن جون سڌيون ليڪون l_1 ڪپي ٿي l کي ٽپڪي $(4, -1)$ تي.

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\{4, -1\}$.

مثال مليل مساوات $y = 2x + 4$ ۽ $y = 2x - 2$ جو گراف جي صورت ۾ حل سيٽ معلوم ڪريو.

حل: مليل مساواتون هن ريت آهن.

$$y = 2x + 4 \rightarrow (1)$$

$$\text{۽ } y = 2x - 2 \rightarrow (2)$$

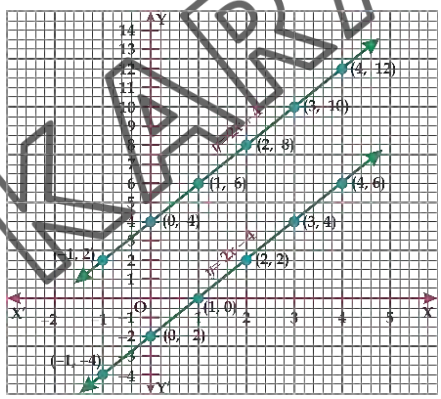
هن هرهڪ، هڪ درجي مساوات جي لاءِ الڳ جدول ناهيو.

مساوات (i) جي لاءِ جدول هيٺ ڏنل آهي.

x	-1	0	1	2	3	4
y	2	4	6	8	10	12

مساوات (ii) جي لاءِ جدول هيٺ ڏنل آهي.

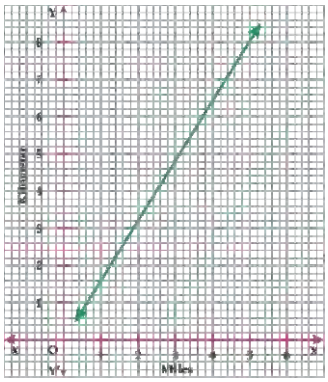
x	-1	0	1	2	3	4
y	-4	-2	0	2	4	6



هاڻي هنن ٽپڪن کي ٻنهي مساواتن لاءِ ظاهر ڪريو. ۽ پوءِ هنن ٽپڪن کي ملائي ٻه ليڪون ناهيو.

اسان ڏسي سگهون ٿا ته هنن مساواتن مان حاصل ٿيل ٻنهي سڌين ليڪن ۾ ڪابه مشترڪ ٽپڪو نه آهي. ان جو مطلب ته هي ليڪون پاڻ کي ڪٽي ڪنهن به ٽپڪي تي نه ٿيون ڪپين تنهنڪري ان جو حل سيٽ خالي سيٽ آهي. حل سيٽ { } آهي.

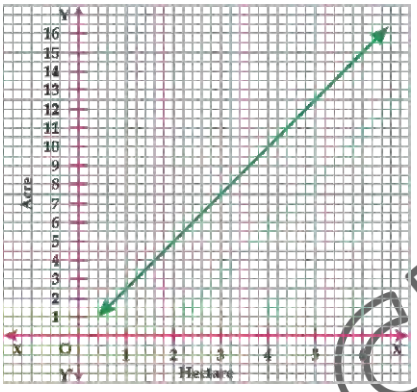
مشق 7.3



1. ميل ۽ ڪلوميٽر جا مليل تبديل ٿيل گراف پڙهو.
   (i) 1 ميل کي ڪلوميٽرن ۾
   (ii) 3 ميلن کي ڪلوميٽرن ۾
   (iii) 2 ڪلوميٽرن کي ميلن ۾
   (iv) 8 ڪلوميٽرن کي ميلن ۾
   ۽ مليل پئماني کي استعمال ڪري تبديل ڪريو.

ميلن ۽ ڪلوميٽرن جي وچ ۾ تبديل ٿيل گراف

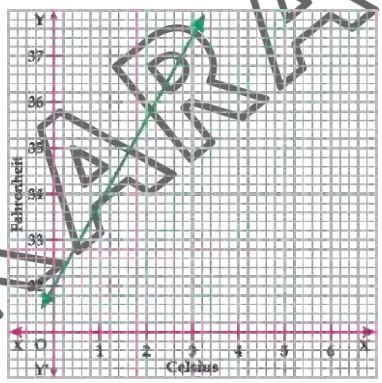
پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 ميل x– محور سان
5 ننڍا چورس = 1 ميل y– محور سان



2. هيڪٽر ۽ ايڪڙن جا مليل تبديل ٿيل گراف پڙهو
   (i) 2 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾
   (ii) 5 هيڪٽرن کي ايڪڙن ۾
   (iii) 5 ايڪڙن کي هيڪٽرن ۾
   (iv) 15 ايڪڙن کي هيڪٽرن ۾
   ۽ مليل پئماني کي استعمال ڪري تبديل ڪريو.

هيڪٽرن ۽ ايڪڙن جي وچ ۾ تبديل ٿيل گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس = 1 هيڪٽر x– محور سان
2 ننڍا چورس = 1 ايڪڙ y– محور سان

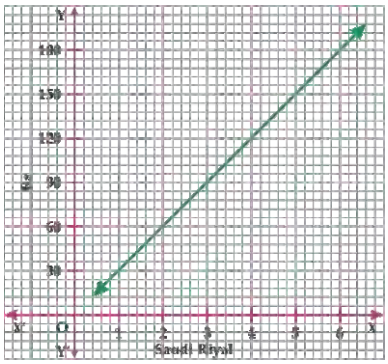


3. سينٽي گريڊ ۽ فارنهائيٽ جا مليل، تبديل ٿيل گراف پڙهو.
   (i) 2°C سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾
   (ii) 80°C سينٽي گريڊ کي فارنهائيٽ ۾
   (iii) 32°C فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾
   (iv) 36.4°C فارنهائيٽ کي سينٽي گريڊ ۾

سينٽي گريڊ فارنهائيٽ جي وچ ۾ تبديل ٿيل گراف

پئمانو: 5 ننڍا چورس =1 سينٽي گريڊ x– محور سان
5 ننڍا چورس =1 فارنهائيٽ y– محور سان

4. پاڪستاني رپين ۽ سعودي ريالن جا مليل، تبديل ٿيل گراف پڙهو.



(i) 3 سعودي ريال کي رپين ۾

(ii) 5.2 سعودي ريال کي رپين ۾

(iii) 150 رپين کي سعودي ريالن ۾

(iv) 78 رپين کي سعودي ريالن ۾

۽ مليل پئماني کي استعمال ڪري تبديل ڪريو.

پاڪستاني رپين ۽ سعودي ريالن ۾ تبديل ڪرڻ جو گراف.

پئمانو: 5 نڊيا چورس = 1 سعودي ريال x– محور سان

5 نڊيا چورس = 30 رپيه y– محور سان

5. هيٺين همزاد مساواتن کي گراف جي طريقي سان حل ڪريو.

i. $3x - 11 = y;\ x-3y=9$

ii. $x + y = 4;\ 2x - 1=5y$

iii. $2x = y + 5;\ x=2y+1$

iv. $y=3x - 5;\ x+y=11$

v. $2x + y = 3;\ x - y=0$

vi. $2x+2=y;\ y=x - 1$

vii. $5 = x + 4y;\ 2x+3y=0$

viii. $3x = 5y-2;\ 3x+5y=8$

ix. $\frac{x+2}{5}+y= 6;\ y=2x - 12$

x. $3x -2y = 13;\ 2x+3y=13$

ورجايل مشق 7

1. صحيح ۽ غلط جواب.

هيٺيان جملا غور سان پڙهو ۽ T يا F تي گول لڳايو جيڪو ٻه هجي.

(i) ڪارتيسي مٿاڇري کي xy مٿاڇرو پڻ چئبو آهي. T/F

(ii) ٻي چوٿائي ۾ ٻئي x ۽ y محدد مثبت هوندا آهن. T/F

(iii) ٽڪو $(1, -2)$ پهرئين چوٿائي ۾ هوندا آهن. T/F

(iv) ٽڪو $(-3, -4)$ چوٿين چوٿائي ۾ هوندا آهن. T/F

2. هيٺين مان صحيح جواب تي (√) تل لڳايو.

(i) ٽڪو $(-3, -4)$ ظاهر ٿيل هوندو آهي.

(a) پهرئين چوٿائي ۾ (b) ٻئي چوٿائي ۾

(c) ٽئين چوٿائي ۾ (d) چوٿين چوٿائي ۾

(ii) ٻه محددي محور جي ڪنڊ تي ڪپيندا آهن.

(a) 45° (b) 90°

(c) 180° (d) 270°

(iii) ليڪ $y = 4$ پوروچوٽ آهي.

(a) $-x$ محور (b) $-y$ محور

(c) ٻنهي محورن تي (d) ڪوبه نه

(iv) ليڪ $x = 5$ پوروچوٽ آهي.

(a) $-x$ محور (b) $-y$ محور

(c) ٻنهي محورن تي (d) ڪوبه نه

(v) ليڪ $x = 5$ جي $-x$ محور تي ٽڪو آهن.

(a) $(-5, 5)$ (b) $(0, -5)$

(c) $(-5, 0)$ (d) $(5, 0)$

(vi) ليڪ $x = 2$ جي $x = 5$ جو حل سيٽ آهي.

(a) $\{(2, 5)\}$ (b) $\{(2, 5)\}$

(c) $\{(0, 5)\}$ (d) $\{\ \}$

(vii) محددي محور پاڻ ۾ _____ آهن.

(a) عمود (b) پوروچوٽ

(c) 30° تي ڪپيندڙ (d) 45° تي ڪپيندڙ

خلاصو

- ترتيب ڏنل جوڙو، ڪارتيسي مٿاڇري تي ٽڪي جي جڳهه کي ظاهر ڪندو آهي.
- ٻه طرفي ڪارتيسي محددي نظام، ٻن عمودي ليڪن x- ۽ y- محور سان تعريف ڪيو ويندو آهي ٻئي محور هڪ ٻئي کي مخصوص ٽڪي تي اڏو اڏ ڪندا جنهن کي اصل $(0, 0)$ چئبو آهي.
- مٿاڇرو چئن چوٿاين ۾ محور سان ورهايل آهي.
- ڪارتيسي مٿاڇري کي xy مٿاڇرو پڻ چئبو آهي.
- پهرين چوٿي I ۾ ٻئي x- محددي ۽ y- محددي واڌو آهن $x > 0$ ۽ $y > 0$.
- ٻئي چوٿي II ۾ x محددي ڪاٿو ۽ y- محددي واڌو آهي $x < 0$ ۽ $y > 0$.
- ٽئين چوٿي III ۾ x محددي ۽ y- محددي ڪاٿو آهن $x < 0$ ۽ $y < 0$.
- چوٿين چوٿي IV ۾ x محددي واڌو ۽ y- محددي ڪاٿو آهي $x > 0$ ۽ $y < 0$.
- اصل ٽڪي تي $x = y = o$، تنهنڪري اصل نقطي جا محددي $(0, 0)$ آهن.
- عام طرح سان ڪارتيسي مٿاڇري ۾ ٽڪن کي ترتيب ڏنل جوڙن (a, b) جي صورت ۾ ظاهر ڪبو آهي، جڏهن ته a، x- محددي (abscissa) ۽ b، y محددي (ordinate) آهي.
- $x = a$ جو گراف y- محور جي پوروچوٽ آهي.
- $y = c$ جو گراف x- محور جي پوروچوٽ آهي.
- $y = mx$ جو گراف هميشه اصل مان گذرندو آهي.
- $y = mx + c$ جو گراف y- محور کي $y = c$ ۾ ڪٽيندو آهي.

يونٽ 8

ٻہ درجي مساوات
(Quadratic Equation)

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هي يونٽ مڪمل ڪرڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- هڪ بدلجندڙ ۾ ٻہ درجي مساوات حل ڪري سگهندا.
  - جزن وسيلي
  - مڪمل چورس بنائڻ
- مڪمل چورس بنائڻ جو طريقو استعمال ڪري ٻہ درجي فارمولا حاصل ڪندا ٻہ درجي فارمولو استعمال ڪري ٻہ درجي مساوات حل ڪندا.
- $ax^1 + bx^2 + c = 0$ نموني مساوات کي ٻہ درجي مساوات ۾ تبديل ڪري چوٿائي يا چوٿائي درجي جي مساوات.
- $ap(x) + \frac{c}{p(x)} = b,$ صورت واري مساوات کي حل ڪري سگهندا، جڏهن تہ a ، b ۽ c عدد آهن.
- ٻنهي طرفن واري مساوات جي صورت $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$ کي حل ڪري سگهندا.جڏهن تہ a ، b ۽ c عدد آهن.
- سگهن واريو مساواتون، جنهن جي بدلجندڙ تي سگهہ نما هجن، حل ڪري سگهندا.
- مساوات جي صورت $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)= k$ کي حل ڪري سگهندا جڏهن تہ $a + b = c + d$ $k \neq 0$
- مساوات ڏنل صورت ۾ حل ڪندا.
  - $\sqrt{(ax+b)} = cx + d.$
  - $\sqrt{(x+a)} + \sqrt{(x+b)} = \sqrt{(x+c)}$
  - $\sqrt{(x^2 + px + m)} + \sqrt{(x^2 + px + n)} = q.$

8.1 ٻہ درجي مساوات ۽ انهن جو حل

8.1.1 وضاحت ڪري پوءِ ٻہ درجي مساوات جي معياري صورت جي تعريف ڪريو.

ٻہ درجي گهڻ رقمي مساوات کي ٻہ درجي مساوات چئبو آهي.

ٻہ درجي مساوات جي معياري صورت $ax^2+bx+c=0$ آهي جڏهن تہ $a \neq 0$ ۽ $a, b,$ $c \in \mathbb{R}$

هن صورت ۾ "a" عددي سرو آهي x^2 جو، b عددي سرو آهي. x جو ۽ c مستقل جزو آهي.

$ax^2+bx+c=0$ ۾ جيڪڏهن $a=0$ تہ اها گهٽجي هڪ درجي مساوات $bx+c=0$ ٿيندي ۽ جيڪڏهن $b=0$ تہ پوءِ اها، خالص ٻہ درجي صورت $ax^2+c=0$ ۾ ٿيندي.

هيٺيان مثال ٻہ درجي مساوات جا آهن.

(i) $4x^2+4x+1=0$ (ٻہ درجي مساوات جي معياري صورت)

(ii) $x^2-4=0$ (خالص ٻہ درجي مساوات)

8.1.2: هڪ بدلجندڙ ۾ ٻہ درجي مساوات جو حل ڪريو.

- جزن ذريعي
- مڪمل چورس بڻائڻ ذريعي

هتي اسان ٻہ درجي مساوات کي حل ڪرڻ لاءِ ٻن طريقن کي غور ڪريون ٿا.

(a) جزن ڪرڻ جو طريقو (b) مڪمل چورس بڻائڻ جو طريقو

(a) جزن ڪرڻ جو طريقو

مثال 01 حل ڪريو.

(i) $x^2+2x-15=0$ (ii) $2x^2-5x=12$

حل (i):

$$x^2+2x-15=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+5x-3x-15=0$$

$$\Rightarrow \quad x(x+5)-3(x+5)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-3)(x+5)=0$$

$$\Rightarrow \quad x-3=0 \quad \text{يا} \quad x+5=0$$

$$\Rightarrow \quad x=3 \quad \text{يا} \quad x=-5$$

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\{-5,3\}$

حل (ii):

$$2x^2-5x=12$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2-5x-12=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2-8x+3x-12=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x(x-4)+3(x-4)=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(2x+3)=0$$
$$\Rightarrow \quad x-4=0 \quad \text{or} \quad 2x+3=0$$
$$\Rightarrow \quad x=4 \quad \text{or} \quad x=\frac{-3}{2}$$

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\left\{-\frac{3}{2}, 4\right\}$

مثال 02 خالص ۾ درجي مساوات $4m^2-1=0$، جزن واري طريقي سان حل ڪريو.

حل:

$$4m^2-1=0$$
$$\Rightarrow \quad (2m)^2-(1)^2=0$$
$$\Rightarrow \quad (2m-1)(2m-1)=0 \quad \left[a^2-b^2=(a-b)(a+b)\right]$$
$$\Rightarrow \quad 2m-1=0 \quad \text{or} \quad 2m+1=0$$
$$\Rightarrow \quad 2m=1 \quad \text{or} \quad 2m=-1$$
$$\Rightarrow \quad m=\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad m=-\frac{1}{2}$$

تنهنڪري حل سيٽ آهي $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

(b) مڪمل چورس بڻائڻ وارو طريقو

طريقي جي وضاحت هيٺ ڪجي ٿي.

(i) پهريائين مساوات کي معياري صورت $ax^2+bx+c=0$ ۾ لکو.

(ii) مساوات کي ٻنهي پاسن کان x^2 جي عددي منڊي، جيڪو 1 کان مختلف هجي، ان سان وندڪريو.

(iii) مستقل رقم کي ساڄي پاسي ٽپايو.

(iv) ٻنهي طرف $(x)^2$ جو عددي منڊو $\left(\frac{1}{2}\times\right)$ جوڙ ڪريو.

(v) کاٻي طرف واري رقم کي چورس ۾ لکو ۽ ساڄي طرف واري رقم کي مختصر ڪيو.

(vi) مليل مساوات جي ٻنهي طرفن جو ٻيو مول وٺو، حاصل ٿيندڙ مساوات کي، حل ڪريو ۽ حل سيٽ لکو.

مثال 01 حل ڪريو $2x^2+8x-1=0$

حل:

$$2x^2+8x-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+8x=1 \quad ...(i)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+4x=\frac{1}{2} \quad ...(ii)$$

مساوات (i) کي 2 سان وڌ ڪرڻ سان)

مساوات جي ٻنهي طرفن $\left[\frac{1}{2}\times 4\right]^2=4$ جوڙ ڪريو. ته اسان کي ملندو

$$x^2+4x+4=\frac{1}{2}+4$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2(2)x+(2)^2=\frac{1}{2}+(2)^2$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2=\frac{1}{2}+4$$

$$\Rightarrow \quad (x+2)^2=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x+2=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \quad x+2=\frac{3}{\sqrt{2}}$	$x+2=-\frac{3}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow \quad x+2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$x+2=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow \quad x=-2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$x=-2-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow \quad x=\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}$	$x=\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}$

ته حل سيٽ آهي $\left\{\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}, \frac{-4-3\sqrt{2}}{2}\right\}$.

مشق 8.1

.1 هيٺيون ٻہ درجي مساواتون جزن ڪرڻ واري طريقي سان حل ڪريو.

(i) $x^2+5x+6=0$ (ii) $6x^2-x-1=0$ (iii) $x^2-11x+30=0$

(iv) $x^2-2x=0$ (v) $x^2-2x-15=0$ (vi) $12x^2-41x+24=0$

(vii) $(x-5)^2-9=0$ (viii) $(3x+4)^2-16=0$

.2 هيٺين مان هر هڪ مڪمل چورس بڻائڻ واري طريقي سان حل ڪريو.

(i) $x^2+6x+1=0$ (ii) $(3x+2)(x+2)=6-2(x+1)$. (iii) $3x^2-8x=-1$

(iv) $24x^2=-10x+21$ (v) $2(x^2-3)-3x=2(x+3)$ (vi) $2x^2+4x-1=0$

.3 مساوات $3x^2+bx-8=0$ ، انهن جي جزن مان 2 هڪ جز هجي.

(i) b جو ملهڻ ڳالهه آهي.

(ii) مساوات جو ٻيو جزو ڪهڙو آهي.

8.2 ٻہ درجي فارمولا

مليل مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ کي حل ڪرڻ لاءِ اسان هيٺيون ٻہ درجي فارمولا $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ استعمال ڪنداسين. جنهن کي ٻہ درجي فارمولا چئبو آهي.

8.2.1: مڪمل چورس بڻائڻ وارو طريقو استعمال ڪري ٻہ درجي فارمولا حاصل ڪريو.

ٻہ درجي مساوات معياري صورت ۾ لکو.

$ax^2+bx+c=0$ . . . (i)

مساوات (i)کي ٻنهي طرف a سان وندڪرڻ سان حاصل ٿيندو.

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$\therefore\quad x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

مستقل جزي $\frac{c}{a}$ کي ساجي پاسي ٽپائڻ سان

$$\therefore\quad x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a}\quad . . . \text{(ii)}$$

مساوات ۾ ٻنهي طرفن $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ جوڙ ڪرڻ سان

$$\therefore \quad x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

8.2.2: ٻہ درجي مساوات کر حل ڪرڻ لاءِ ٻہ درجي فارمولا جو استعمال

مثال 01 ٻہ درجي فارمولا استعمال ڪري حل ڪريو.

(i) $2x^2-5x-3=0$ (ii) $x^2+x+1=0$

حل (i):

$$2x^2-5x-3=0$$

هتي $a=2, b=-5$ ۽ $c=-3$

ٻہ درجي فارمولا استعمال ڪرڻ سان

$$\therefore \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(-3)}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{25-(-24)}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5\pm 7}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{5+7}{4} \qquad\qquad x=\frac{5-7}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{12}{4} \qquad\qquad x=\frac{-2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x=3 \qquad\qquad x=-\frac{1}{2}$$

ته جزا آهن 3 ۽ $-\frac{1}{2}$

ته حل سيٽ آهي $\left\{3,-\frac{1}{2}\right\}$

حل (ii): $x^2+x+1=0$

هتي $a=1, b=1$ ۽ $c=1$ آهي.

به درجي فارمولا استعمال ڪرڻ سان

$$\because x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},$$

ته حل سيٽ آهي $\left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

مشق 8.2

هيٺيون مساواتون به درجي فارمولا استعمال ڪري حل ڪريو.

(i) $x^2-2x=15$ (ii) $10x^2+19x-15=0$ (iii) $x^2=-x+1$

(iv) $2x=9-3x^2$ (v) $9x^2=12x-49$ (vi) $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1=0$

(vii) $3x^2-2x+2=0$ (viii) $6x^2-x-1=0$ (ix) $4x^2-10x=0$

(x) $x^2-1=0$ (xi) $x^2-6x+9=0$ (xii) $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-4}=4$

8.3 ٻہ درجي صورت ۾ گهٽجندڙ جهڙيون مساواتون

مساواتن جا ڪيترا ئي نمونا آهن جيڪي ٻہ درجي نہ آهن پر انهن کي ٻہ درجي صورت ۾ ڪو مناسب نعمل بدل وٺي گهٽائي سگهجي ٿو.

8.3.1: $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$ نموني جي مساوات ٻہ درجي صورت ۾ گهٽجڻ جهڙن مساواتن کي حل ڪريو. چوٿائي درجي جي مساوات

فرض ڪريو تہ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ، چوٿائي يا چوٿائي درجي جي مساوات آهي ۽ ٻہ درجي صورت $ay^2 + by + c = 0$ ۾ گهٽائي سگهجي ٿي. هي طريقو هيٺين مثالن سان سمجهايو ويو آهي.

مثال چوٿائي درجي جي مساوات $4x^4 - 25x^2 + 36 = 0$ کي حل ڪريو.

حل:

$$4x^4 - 25x^2 + 36 = 0 \quad \ldots \text{(i)}$$

هن مساوات کي لکي سگهجي ٿو

$$(x^2)^2 - 25x^2 + 36 = 0 \quad \ldots \text{(ii)}$$

$y = x^2$ مساوات (ii) ۾ لکڻ سان اسان کي ملندو

$$4y^2 - 25x^2 + 36 = 0$$

هتي $a = 4, b = -25$ ۽ $c = 36$ آهي.

$$\because \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\therefore \quad y = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(4)(36)}}{2(4)}$$

$$y = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2(4)} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{25 \pm 7}{8}$$

i.e., $y = \dfrac{25 + 7}{8}$

$y = \dfrac{32}{8} = 4$

but, $y = x^2$, then

$x^2 = 4$

$y = \dfrac{25 - 7}{8}$

$y = \dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}$

$x^2 = \dfrac{9}{4}$

$x = \pm 2$ | $x = \pm \frac{3}{2}$

تہ حل سيٽ آهي $\left\{\pm 2 , \pm \frac{3}{2}\right\}$

8.3.2: $ap(x) + \frac{b}{p(x)} = c$ نموني جي مساوات حل ڪريو، جڏهن a, b ۽ c حقيقي آهن. $a \neq 0$ ۽ $p(x)$ هڪ آلجبري اظهار آهي.

مثال 01 حل ڪريو $8\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2$

حل:

$$8\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2 \quad \ldots \text{(i)}$$

فرض ڪريو تہ $p(x) = y = \sqrt{x+3}$ تہ (i) ۾ رقم رکڻ سان

$$\Rightarrow \quad 8y - \frac{1}{y} = 2$$

$$\Rightarrow \quad 8y^2 - 1 = 2y$$

$$\Rightarrow \quad 8y^2 - 2y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 8y^2 - 4y + 2y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4y(2y-1) + 1(2y-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (4y+1)(2y-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4y + 1 = 0 \qquad\qquad 2y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-1}{4} \qquad\qquad y = \frac{1}{2},$$

when $y = -\frac{1}{4}$, | $y = \frac{1}{2}$, then,

$$\sqrt{x+3} = -\frac{1}{4} \qquad\qquad \sqrt{x+3} = \frac{1}{2}$$

بنهي پاسي چورس وٺڻ سان | بنهي پاسي چورس وٺڻ سان

$$\Rightarrow \quad x + 3 = \frac{1}{16} \qquad\qquad x + 3 = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} - 3$$
$$x = \frac{1-12}{4}$$
$$x = -\frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{16} - 3$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1-48}{16}$$
$$\Rightarrow \quad x = -\frac{47}{16}$$

چڪاس

$$8\sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} = 2$$

مثين مساوات ۾ $x = -\frac{11}{4}$ وجهڻ سان

$$8\sqrt{\frac{-11}{4} + 3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-11}{4} + 3}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{-11+12}{4}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-11+12}{4}}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$$
$$8\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$
$$4 - 2 = 2$$
$$2 = 2$$

ثابت ٿي ويو. Verified

مثين مساوات ۾ $x = -\frac{47}{16}$ وجهڻ سان

$$8\sqrt{\frac{-47}{16} + 3} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-47}{16} + 3}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{-47+48}{16}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{-47+48}{16}}} = 2$$
$$8\sqrt{\frac{1}{16}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16}}} = 2$$
$$8\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 2$$
$$2 - 4 = 2$$
$$-2 \neq 2$$

ثابت نہ ٿيو. Non verified

تہ حل سيٽ آهي = $\left\{-\frac{11}{4}\right\}$.

8.3.3: باهمي مساوات $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$ حل ڪريو.جڏهن تہ a, b ۽ c ناطق عدد آهن

هڪ گهڻ رقمي مساوات کي باهمي مساوات (Reciprocal Equation) چئبو جيڪڏهن اها تبديل نہ ٿئي هجي جڏهن x کي تبديل ڪجي $\frac{1}{x}$ سان.

هن قسم جي باهمي مساوات $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0,$ کي حل ڪرڻ جو طريقو هيٺين مثالن ۾ ڏجي ٿو، جڏهن a, b, c ناطق عدد هجن.

مثال 10 حل ڪريو $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$

حل:

جيڪڏهن $x+\frac{1}{x}=y$ ، تہ پوءِ $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$ ، تہ مساوات (i) ۾ رکڻ سان ملندو

$$2\left(y^2-2\right)-9y+14=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2-9y+10=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2-4y-5y+10=0$$

$$\Rightarrow \quad 2y(y-2)-5(y-2)=0$$

$$\Rightarrow \quad (y-2)(2y-5)=0$$

i.e. $y-2=0$

$\Rightarrow \quad y=2$

جڏهن $y=x+\frac{1}{x},$ تہ پوءِ

$$x+\frac{1}{x}=2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+1=2x$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2x+1=0$$

$$2y-5=0$$

$$y=\frac{5}{2}$$

$y=x+\frac{1}{x},$ استعمال ڪرڻ سان ملندو

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+2=5x$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2-5x+2=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2-4x-x+2=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x(x-2)-1(x-2)=0$$
$$\Rightarrow \quad (x-2)(2x-1)=0$$
$$\Rightarrow \quad x-2=0$$
$$\Rightarrow \quad x=2$$
$$\Rightarrow \quad 2x-1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2=0$$
$$\Rightarrow \quad x-1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=1$$

تہ حل سيٽ ٿيندو = $\left\{\frac{1}{2}, 2, 1\right\}$.

8.3.4: سگهن واريون حل ڪريو جنهن ۾ بدلجندڙ تي سگهه نما هجن مساواتون جن ۾ بدلجندڙن تي سگهه نما ملڪل هجن تہ انهن کي سگهن واري مساوات چئبو آهي. اهڙ مساواتن جو حل هيٺين مثالن سان ظاهر ڪيو ويو آهي.

مثال 01 حل ڪريو $7^{1+x}+7^{1-x}=50$

حل:

$$7^{1+x}+7^{1-x}=50 \qquad \ldots \text{(i)}$$

(سگهن تي تقسيم ڪرڻ سان) $7.7^x+7.7^{-x}-50=0$

$$\Rightarrow \quad 7.7^x+\frac{7}{7^x}=50 \qquad \ldots \text{(ii)}$$

فرض ڪريو تہ $y=7^x$

مساوات (ii) کي گهٽائڻ سان $\therefore$

$$7y+\frac{7}{y}-50=0,$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2+7-50y=0$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2-50y+7=0$$
$$\Rightarrow \quad 7y^2-49y-y+7=0 \quad \text{(Factorizing)}$$
$$\Rightarrow \quad 7y(y-7)-1(y-7)=0$$
$$\Rightarrow \quad (7y-1)(y-7)=0$$

$\Rightarrow \quad 7y-1=0$	$y-7=0$
$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{7}$	$\Rightarrow \quad y=7$
then $7^x=7^{-1}$	$y=7$ then $7^x=7^1$
$\Rightarrow \quad x=-1$	$x=1$

$=\{-1,1\}$ تہ حل سيٽ آهي

8.3.5: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=k$ نموني واريون مساواتون حل ڪريو.جڏهن تہ $a+b=c+d$ ۽ $k\neq0$ مستقل آهي.

مثال 01 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=48$

حل: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=48$

ترتيب کي تبديل ڪرڻ سان

$$(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)=48$$
$$(x^2+4x+x+4)(x^2+2x+3x+6)=48$$
$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=48 \ldots \text{(i)}$$

فرض ڪريو تہ $x^2+5x=t$

By substituting in equation (i)

$$\Rightarrow \quad (t+4)(t+6)=48$$
$$\Rightarrow \quad t^2+4t+6t+24=48$$
$$\Rightarrow \quad t^2+10t-24=0$$
$$\Rightarrow \quad t^2+12t-2t-24=0$$
$$\Rightarrow \quad t(t+12)-2(t+12)=0$$
$$\Rightarrow \quad (t+12)(t-2)=0$$

ياوري

$\Rightarrow \quad t+12=0$	$t-2=0$
$\Rightarrow \quad t=-12$	$t=2$
(ii) مساوات ۾ رقم تبديل ڪرڻ سان	(ii) مساوات ۾ رقم تبديل ڪرڻ سان
$\Rightarrow \quad x^2+5x=-12$	$x^2+5x=2$
$\Rightarrow \quad x^2+5x+12=0$	$x^2+5x-2=0$

هتي $a=1,\ b=5$ and $c=12,$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-48}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{-23}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{2}$$

هتي $a=1,\ b=5$ and $c=-2,$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+8}}{2}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$$

حل سيٽ آهي $\left\{\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{2},\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}\right\}$

مشق 8.3

هيٺيون مساواتون حل ڪريو.

1. $x^4-8x^2-9=0$
2. $x^4-3x^2-4=0$
3. $12x^4-11x^2+2=0$
4. $\frac{2x+3}{x+1}+6\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)=7$
5. $\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2+1}}+6\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+1}}=5$
6. $5^{x+1}+5^{2-x}=5^3+1$
7. $5^{2x}+5^{x+3}+125=5^x$
8. $2\left(\frac{x}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x+1}\right)+2=x\neq-1$
9. $2\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-4\left(\frac{x}{x-1}\right)+4=0$
10. $9^{x+2}-6\cdot 3^{x+1}+1=0$
11. $2x^2+2^{-x+6}-20=0$
12. $(x-1)(x+5)(x+8)(x+2)=880$
13. $(x-1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$
14. $7^{1+x}+7^{1-x}=50$
15. $(x-2)(x+1)(x+3)(x-4)=24$

8.4 مولي مساواتون

اهڙيون مساواتون جن جي بدلجندڙ اظهارن تي مول هجي تہ انهن کي مولي مساواتون چئبو آهي. مولي مساواتن جو چڪاس ڪرڻ ضروري آهي.

8.4.1: مساواتن جي هيٺين نمونن جو حل

نمونو (i): $\sqrt{ax+b} = cx+d$ نمونو (ii): $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{x+c}$

نمونو (iii): $\sqrt{x^2+px+m} + \sqrt{x^2+px+n} = q$

نمونو (i): $\sqrt{ax+b} = cx+d$

مثال حل ڪريو $\sqrt{217-x} = x-7$

حل: $\sqrt{217-x} = x-7$

بنهي پاسي چورس ڪرڻ سان

$$\left(\sqrt{217-x}\right)^2 = (x-7)^2$$

$$\Rightarrow \quad 217-x=(x-7)^2$$

$$\Rightarrow \quad 217-x=x^2-14x+49$$

$$\Rightarrow \quad x^2-13x-168=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-21x+8x-168=0$$

$$\Rightarrow \quad x(x-21)+8(x-21)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-21)(x+8)=0$$

$x=21$ يا $x=-8$

چڪاس: $x=21$	چڪاس: $x=-8$
$\sqrt{217-x} = x-7$	$\sqrt{217-x} = x-7$
$\therefore \quad \sqrt{217-21} = 21-7$	$\therefore \quad \sqrt{217-(-8)} = -8-7$
$\Rightarrow \quad \sqrt{196} = 14$	$\Rightarrow \quad \sqrt{225} = 15$
$\Rightarrow \quad 14 = 14$	$\Rightarrow \quad 15 \neq -15$
ثابت ٿيو verified	ثابت نہ ٿيو not verified

{21} حل سيٽ آهي

نمونو (ii): $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{x+c}$

مثال حل ڪريو $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

حل: $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

بنهي پاسي چورس ڪرڻ سان

$$(\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{6x+13})^2$$

$$\Rightarrow \quad (\sqrt{x+7})^2 + 2(\sqrt{x+7})(\sqrt{x+2}) + ((\sqrt{x+2})^2 = 6x+13$$

$$\Rightarrow \quad x+7 + 2\sqrt{(x+7)(x+2x)} + x+2 = 6x+13,$$

$$\Rightarrow \quad 2x+7+2+2\sqrt{(x^2+7x+2x+14} = 6x+13$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2+9x+14} = 4x+4$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+9x+14} = 2x+2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+9x+14} = 2(x+1)$$

وري بنهي پاسي چورس ڪرڻ سان

$$\left(\sqrt{x^2+9x+14}\right)^2 = [2(x+1)]^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4(x^2+2x+1)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+9x+14 = 4x^2+8x+4$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2-x-10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2+5x-6x-10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(3x+5)-2(3x+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-2)(3x+5) = 0$$

يا وري

$3x+5 = 0$

i.e. $x = -\frac{5}{3}$ يا

$x-2 = 0$

$x=2$

چڪاس:

$x = -\frac{5}{3}$

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

$x=2$

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13},$

$$\sqrt{2+7}+\sqrt{2+2}=\sqrt{6(2)+13},$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{25}$$

$$\Rightarrow \quad 3+2=5$$

$$\Rightarrow \quad 5=5$$

ثابت ٿيو.Verified

$$\sqrt{-\frac{5}{3}+7}+\sqrt{-\frac{5}{3}+2}=\sqrt{6\left(-\frac{5}{3}\right)+13}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{16}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{\sqrt{3}}\neq\sqrt{3}$$

ثابت نہ ٿيو.Not verified

جنين تہ $-\frac{5}{3}$ باهرين جز آهي تنهن ڪري x=5 حل آهي{5}

نمونو(iii): $\sqrt{x^2+px+m}+\sqrt{x^2+px+n}=q$

مثال 01 حل ڪريو $\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$

حل: مليل مساوات ۾ $y=x^2-3x$ رکڻ سان اسان کي ملندو

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$

$$\sqrt{y+21}-\sqrt{y+5}=2$$

$$\sqrt{y+21}=2+\sqrt{y+5}$$

بنهي طرفن چورس ڪرڻ سان

$$y+21=(2)^2+4\sqrt{y+5}+(\sqrt{y+5})^2$$

$$\Rightarrow \quad y+21=(2)^2+4\sqrt{y+5}+\left(\sqrt{y+5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad y+21=4+4\sqrt{y+5}+y+5$$

$$\Rightarrow \quad 4\sqrt{y+5}=\cancel{y}+21-4-\cancel{y}-5$$

$$\Rightarrow \quad 4\sqrt{y+5}=12$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{y+5}=3$$

وري بنهي طرفن چورس ڪرڻ سان اسان کي ملندو.

$$\Rightarrow \quad y+5=9$$

$$\Rightarrow \quad y=4,$$

$y=4$ رکبو، تبديل ڪيل $y=x^2-3x^2$ ۾ تہ اسان کي ملندو.

$$4=x^2-3x,$$
$$\Rightarrow \quad x^2-3x-4=0,$$
$$\Rightarrow \quad x^2-4x+x-4=0,$$
$$\Rightarrow \quad x(x-4)+1(x-4)=0,$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(x+1)=0,$$
$$\text{i.e.,} \quad x-4=0 \qquad x+1=0$$
$$\Rightarrow \quad x=4, \qquad x=-1,$$

For $x=4$

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$
$$\sqrt{(4)^2-3(4)+21}-\sqrt{(4)^2-3(4)+5}=2$$
$$\sqrt{16+12+21}-\sqrt{16-12+5}=2$$
$$\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$$
$$5-3=2$$
$$2=2$$

چڪاس:

$x=-1$ جي لاءِ

$$\sqrt{x^2-3x+21}-\sqrt{x^2-3x+5}=2$$
$$\sqrt{(-1)^2-3(-1)+21}-\sqrt{(-1)^2-3(-1)+5}=2$$
$$\sqrt{1+3+21}-\sqrt{1+3+5}=2$$
$$\sqrt{25}-\sqrt{9}=2$$
$$5-3=2$$
$$2=2$$

تنهنڪري ٻئي جز مليل مساوات جو حصو آهن تنهنڪري حل سيٽ ٿيندو $\{-1,4\}$

مشق 8.4

هيٺين مساواتن کي حل ڪريو.

1. $x+\sqrt{x+5}=7$
2. $\sqrt{x-2}=8-x$
3. $\sqrt{7-5x}+\sqrt{13-5x}=3\sqrt{4-2x}$
4. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=\sqrt{6x+13}$
5. $\sqrt{x^2-3x+36}-\sqrt{x^2-3x+9}=3$
6. $\sqrt{x^2+3x+32}+\sqrt{x^2+3x+5}=9$

ورجايل مشق 8.4

1. خال پريو.

(i) گهڻ رقمي مساوات جنهن ۾ بدلجندڙ جو درجو _____ هجي ته ان کي ٻه درجي مساوات چئبو آهي.

(ii) ٻه درجي مساوات جي معياري آهي _____.

(iii) $3^x + 3^{2x} = 1$ کي _____ مساوات چئبو.

(iv) $3^x = 9$ جو حل ٿيندو _____ .

(v) $ax^2 + bx + c = 0$ جو حل ٿيندو _____ .

2. درست جواب تي (√) ڪريو.

(i) ٻه درجي مساوات جو درجو آهي.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(ii) ٻه درجي مساوات جي معياري صورت آهي.

(a) $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ (b) $ax^2 + c = 0, a \neq 0$

(c) $ax^2 + bx = 0, a \neq 0$ (d) $ax^3 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$

(iii) $ax^2 + bx + c = 0$ جي لاءِ ٻه درجي فارمولا آهي.

(a) $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ (b) $\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(c) $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (d) $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

(iv) $x^2 + 10x + 24 = 0$ جو حل سيٽ آهي.

(a) $\{-6, -4\}$ (b) $\{-6, 4\}$

(c) $\{6, 4\}$ (d) $\{6, -4\}$

(v) ٻه درجي مساوات جا وڌ ۾ وڌ جزا آهن

(a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 4

(vi) $x^2 - 15x + 56$ جا هڪ درجي جزا آهن.

(a) $(x-7)$ ۽ $(x+8)$ (b) $(x+7)$ ۽ $(x-8)$

(c) $(x-7)$ ۽ $(x-8)$ (d) $(x+7)$ ۽ $(x+8)$

(vii) گهڻ رقمي مساوات جيڪا تبديل نه ٿي سگهي جڏهن x کي $\frac{1}{x}$ سان تبديل ڪجهي ان کي چئبو _____ .

(a) سگهن واري مساوات (b) باهمي مساوات (Reciprocal)

(c) مولي مساوات (d) هن مان ڪوبه نه

(viii) $3^x + 3^{2-x} + 6 = 0$ مساوات جو _____ نمونو آهي.

(a) سگهن واري مساوات (b) مولي مساوات

(c) باهمي مساوات (Reciprocal) (d) هن مان ڪوبہ نہ

(ix) $4x^2 - 16 = 0$ جو حل سيٽ آهي.

(a) $\{\pm 4\}$ (b) $\{4\}$ (c) $\{\pm 2\}$ هنن مان ڪوبہ نہ

(x) $2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x + 2 = 0$ مساوات _____ نموني جي چئبي.

(a) باهمي مساوات (Reciprocal) (b) مولي مساوات

(c) سگهن واري مساوات (d) هن مان ڪوبہ نہ

3. غلط ۽ صحيح جواب

هيٺيان جملا غور پڙهو ۽ صحيح بيان لاءِ "T" ۽ "F" تي گولن پايو.

(i) هر ٻہ درجي مساوات جزن وسيلي حل ڪري سگهجي ٿي. T/F

(ii) هر ٻہ درجي مساوات کي ٻہ جزا هوندا آهن. T/F

(iii) ٽہ درجي مساوات کي ٽي جزا هوندو آهن. T/F

(iv) $ax^2 + bx + c = 0$ کي ٻہ درجي مساوات x واري آهي. جيڪڏهن b, ۽ $a=0$ حقيقي عدد آهن. T/F

(v) ٻاهر يان جزا مساوات کي مطمئن ڪن ٿا. T/F

(vi) ٻاهر يان جزا مساوات کي مطمئن نٿا ڪن. T/F

(vii) ٻہ درجي مساوات ۾ بدلجندڙ جو وڏي ۾ وڏو سگهہ نما 2 آهي. T/F

خلاصو

- گهڻ رقمي مساوات جنهن ۾ بدلجندڙ جو درجو ٻہ هجي ان کي ٻہ درجي مساوات چئبو آهي.
- $ax^2 + bx + c = 0$، $a \neq 0$, ۽ c, b, a حقيقي عدد هنن تہ ان کي ٻہ درجي مساوات جي معياري صورت چئبو آهي.
- ٻہ درجي مساوات، $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ جو ٻہ درجي فارمولا $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- سگهن واري مساواتن ۾ بدلجندڙ تي سگهہ نما هوندا آهن.
- هڪ مساوات جيڪا مول جي نشاني هيٺ اظهار هجي تہ ان کي مولي مساوات چئبو آهي.

يونٽ 9

يڪسان ٽڪندا

Congruent Triangles

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

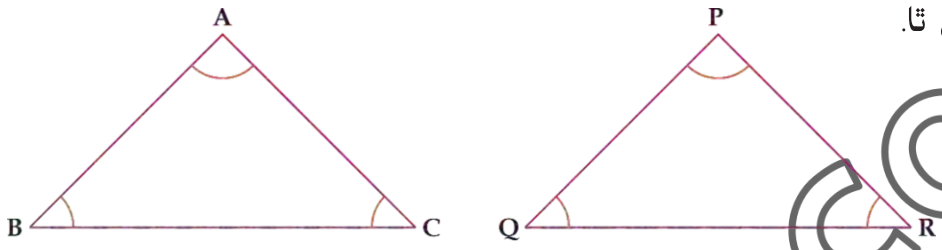
هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

هيٺين سڌيانن کي شامل نتيجن سان گڏ سمجهي سگهندا ۽ انهن کي استعمال ڪري لاڳاپيل حساب حل ڪندا.

- جيڪڏهن ڪن بہ ڏنل مطابقت ۾ هڪ ٽڪندي جون بہ ڪندون ۽ ڪو بہ هڪ پاسو ٻي ٽڪندي جي واسطيدارڪندن ۽ پاسي سان يڪسان هجن تہ ٻئي ٽڪندا يڪسان ٿيندا.
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪندي بہ ڪندون يڪسان هجن تہ سندس سامهون وارا پاسا بہ يڪسان هوندا.
- جيڪڏهن ٻن ٽڪندي ڏنل موافقت ۾ هڪ ٽڪندي جا ٽئي پاسا، ٻئي ٽڪندي جي واسطيدار ٽنهي پاسن سان يڪسان هجن تہ، ٻئي ٽڪندا پاڻ ۾ يڪسان يا ساڳيا هوندا.
- جيڪڏهن ٻن گوني ڪنڊ ٽڪندن جي موافقت ۾ هڪ ٽڪندي جو هئياٽينيوز ۽ هڪ پاسي، ٻي ٽڪندي جي واسطيدار هئياٽينيوز ۽ ٻي پاسي سان يڪسان آهي تہ ٽڪندا پاڻ ۾ يڪسان هوندا.

تعارف

هڪ ٽڪنڊي جا ڇهه حصا هوندا آهن، ٽي پاسا ۽ ٽي ڪنڊون. جيڪڏهن اسان کي ٻه ٽڪنڊا ABC ۽ PQR مليل هجن، اسان انهن جي چوٽين کي ملائي، هنن ٽڪنڊن جي ڪنڊن ۽ پاسن ۾ (1-1) موافقت يا مطابقت، ڇهن مختلف طريقن سان قائم ڪري سگهون ٿا.



ٽڪنڊن $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ ۾ مطابقت جو مطلب

(i) $\angle A \leftrightarrow \angle P$ ($\angle A$ جي مطابقت $\angle P$ سان)

(ii) $\angle B \leftrightarrow \angle Q$ ($\angle B$ جي مطابقت $\angle Q$ سان)

(iii) $\angle C \leftrightarrow \angle R$ ($\angle C$ جي مطابقت $\angle R$ سان)

(iv) $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{PQ}$ ($\overline{AB}$ جي مطابقت $\overline{PQ}$ سان)

(v) $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{QR}$ ($\overline{BC}$ جي مطابقت $\overline{QR}$ سان)

(vi) $\overline{CA} \leftrightarrow \overline{RP}$ ($\overline{CA}$ جي مطابقت $\overline{RP}$ سان)

9.1 يڪسان ٽڪنڊا

جسامت (Size) ۽ شڪل (Shape) جي هڪ جهڙائي کي رياضي ۾ يڪسان چئبو آهي.

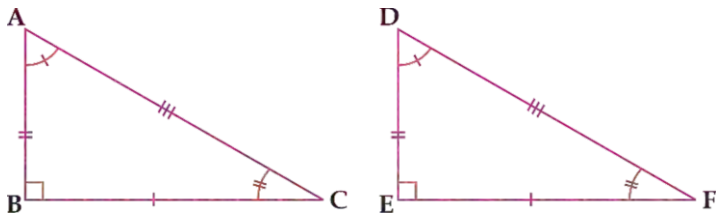
مليل تصوير ٻه ٻن ڪارين جا مختلف رنگ ۽ بيهڪ (Position) آهي. پرانهن جي جسامت ۽ شڪل هڪ جهڙي آهي. هن ٻن ڪارن کي يڪسان چئبو آهي. جيڪڏهن اسان هڪ ڪارجي تصوير ٻي جي مٿان رکنداسين ته اهي هڪ ٻئي کي اورليپ(هڪ جهڙائي ڪري) ڪنديون

سرگرمي

تلاش ڪرڻ

ڇا توهان کي ٻه يڪسان تصويرون يا شيون پنهنجي ڪلاس يا اسڪول ۾ سڃاڻپ ڪري سگهه ٿا. انهن يڪسان تصويرن جي فهرست ناهي تصوير ناهيو يا تصوير ڪڍو.

بن ٽڪنڊن کي يڪسان چئبو جيڪڏهن سندن موافق (واسطيدار) ڪنڊون ۽ پاسا يڪسان آهن.



هي بہ ٽڪنڊا ABC ۽ DEF يڪسان آهن جن کي هن طرح لکو

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ٽڪنڊن ΔABC ۽ ΔDEF جون موافق پاسا ۽ ڪنڊون ماپ ۾ برابر آهن.

نوٽ: هيٺيان نتيجا ڪارآمد آهن.

(i) پنهنجو پاڻ سان يڪسان (Identity Congruance) جيڪو $\Delta ABC \cong \Delta ABC$

(ii) مطابقت جي خاصيت (Symmetric Property) جيڪو $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ تہ پوءِ

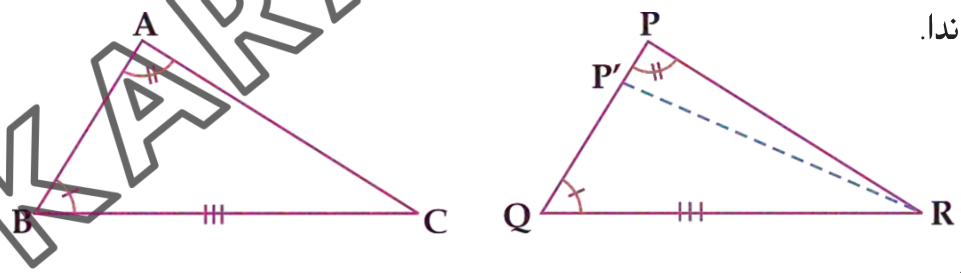
$\Delta PQR \cong \Delta ABC$

(iii) يڪسانيت جي متعدي خاصيت (Transitive Property of Congruence)

جيڪڏهن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, $\Delta PQR \cong \Delta DEF$ ۽ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

9.1.1 سڌيان

جيڪڏهن ڪن بن ٽڪنڊن جي ڏنل مطابقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جون بہ ڪنڊون ۽ هڪ پاسو، ٻي ٽڪنڊي جي واسطيدار ڪنڊن ۽ پاسي سان يڪسان هجن تہ ٻئي ٽڪنڊا يڪسان هوندا.



مليل: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ ۾

$\angle A \cong \angle P$ ۽ $m\overline{BC} \cong m\overline{QR}$, $\angle B \cong \angle Q$

گهربل: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

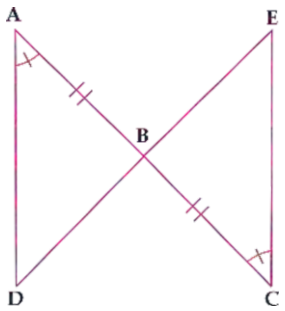
جوڙجڪ: فرض ڪريو تہ $\overline{AB} \ncong \overline{PQ}$ تہ پوءِ $\overline{PQ}$ تي هڪ ٽپڪو P' وٺو تہ جيئن $\overline{AB} \cong \overline{P'Q}$

ثابتي

بيان	دليل/ سبب
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ جي مطابقت ۾	
i. $\angle A \cong \angle P$	i. مليل
ii. $\angle B \cong \angle Q$	ii. مليل
$\therefore \angle C \cong \angle R$	
جيڪڏهن $\overline{BA} \ncong \overline{QP}$ تہ $\overline{QP}$ کي وڌائي يا $\overline{QP}$ تي ٽپڪو P' اهڙي طرح وٺو تہ $\overline{BA} \cong \overline{QP'}$ ۽ $\Delta P'QR$ جي مطابقت ۾	مفروضو بہ ڪندون ٻنهي ٽڪندن جو برابر آهن
In $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta P'QR$	
$\overline{BC} \cong \overline{QR}$	i. مليل
$\angle B \cong \angle Q$	ii. مليل
$\overline{BA} \cong \overline{QP'}$	iii. مفروضي طور
تنهنڪري $\therefore \Delta ABC \cong \Delta P'QR$	S.A.S مفروضو
$\therefore \angle C \cong \angle QRP'$	
پر $\angle C \cong \angle QRP$	ثابت ڪيل (2) ۾
$\therefore \angle QRP' \cong \angle QRP$	يڪسانيت جي متعدي خاصيت
اهو صرف تڏهن ممڪن آهي جڏهن P ۽ P' ٽپڪا هڪ ٻي تي ٺهڪي اچن ۽	ڪنڊ جي بناوٽ جو موضوع
$\overline{RP'} \cong \overline{RP}$	
تنهنڪري $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	P ۽ P' جو هڪ ٻئي تي ٺهڪي اچڻ
ΔABC ۽ ΔPQR جي مطابقت ۾	
i. $\overline{BC} \cong \overline{QR}$	i. مليل
ii. $\angle B \cong \angle Q$	ii. مليل
iii. $\overline{BA} \cong \overline{QP}$	iii. ثابت ڪيل
تنهنڪري $\Delta ABC \cong \Delta PQR$	S.A.S موضوع

Q.E.D.

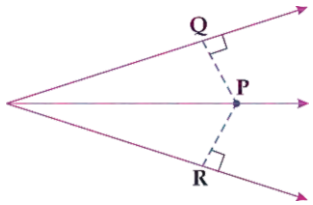
مشق 9.1



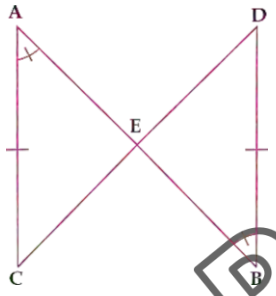
.1 مليل شڪل ۾

$\angle A \cong \angle C$ ۽ $m\overline{AB} = m\overline{CB}$

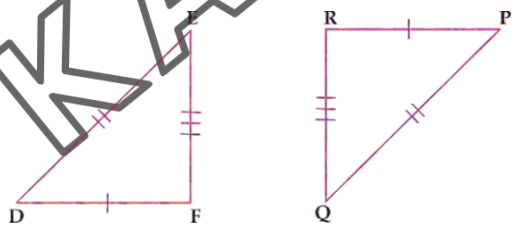
ته ثابت ڪريو ته $\Delta ABD \cong \Delta CBE$



.2 ڪنڊجي اڌ ڪندڙ واري ليڪ تي ڪنهن
ٽڪي ڪان ڪنڊجي يا نهن تي
عمود ٺهيل آهن. ثابت ڪريو ته هي
عمود ماپ ۾ برابر آهن



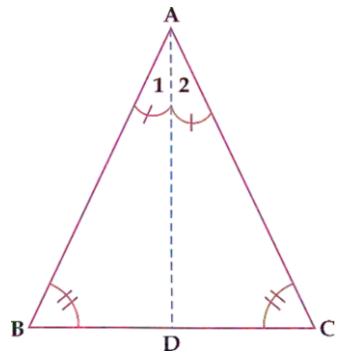
.3 مليل شڪل ۾ اسان کي $\Delta ACE \cong \Delta BDE$
مليل آهن جيئن $m\overline{AC} = m\overline{BD} = 3\ cm$
$\angle A = (3x+1)^\circ\ ,\ m\angle E = (3y-2)^\circ$
۽ $m\angle B = (x+35)^\circ$
ته x, y جون قيمتون معلوم ڪريو.



.4 مليل شڪل ۾ $\Delta DEF \cong \Delta PQR$
تنهنڪري
س. ۾ $m\overline{DE} = (6x+1)$
س. ۾ $m\overline{EF} = 8$
س. ۾ $m\ \overline{RQ} = (5y-7)$ ۽
س. ۾ $m\overline{PQ} = (10x-19)$
ته x ۽ y جون قيمتون معلوم ڪريو.

9.1.2 سڌيان

جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جون ٻه ڪنڊون يڪسان هجن تہ انهن ڪنڊن جي سامهون وارا پاسا ٻہ يڪسان ٿيندا.



مليل: ΔABC ۾

$\angle B \cong \angle C$

گهربل: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

جوڙجڪ: $\angle A$ جو اٿڪندڙ $\overline{AD}$ ڪڍو.

جيڪو $\overline{BC}$ کي ٽڪي D تي ملي.

ثابتي

بيان	دليل/ سبب
موافقت $\Delta ADE \leftrightarrow \Delta ADC$	
i. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	i. مليل
ii. $\angle 1 \cong \angle 2$	ii. جوڙجڪ
iii. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	iii. مشترڪ (پنهنجو پاڻ سان يڪسان
تنهنڪري $\Delta ABD \cong \Delta ADC$	S.A.S موضوع
$m\angle B = m\angle C$	ٽڪنڊن جي يڪسانيت جي لحاظ کان

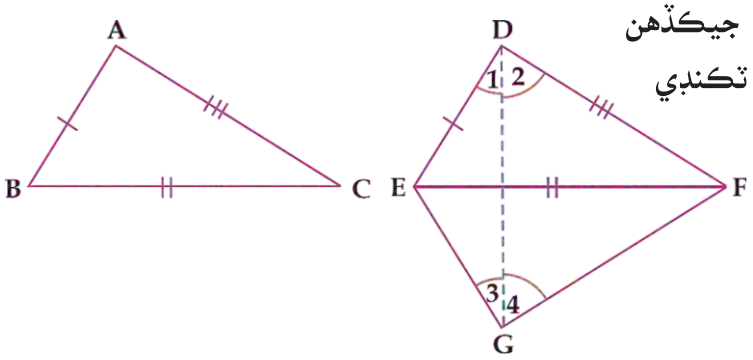
Q.E.D

مشق 9.2

1. ABC هڪ ٽڪنڊو آهي، جنهن ۾ $m\angle A=35°$ ۽ $m\angle B=100°$ ، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ آهي. ثابت ڪريو تہ ΔBDC ٻپور پاسو ٽڪنڊو آهي.
2. ٽڪنڊي جي ڪنهن ڪنڊ جو اٿڪندڙ اسامهون واري پاسي تہ عمود آهي تہ اهو ٽڪنڊو هڪ ٻپور پاسو ٽڪنڊو آهي.
3. ABC هڪ ٽڪنڊو آهي. جنهن ۾ $m\angle A = 25°$ ، $m\angle B = 45°$ ۽ $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ مليل آهي. ثابت ڪريو تہ ΔDBC هڪ ٻپور پاسو ٽڪنڊو آهي.

سڌيان 9.1.3

بن ٽڪنڊن جي موافقت ۾ جيڪڏهن هڪ ٽڪنڊي جا ٽئي پاسا ٻئي ٽڪنڊي جي واسطيدار ٽنهي پاسن سان يڪسان هجن ته ٻئي ٽڪنڊا يڪسان ٿيندا.



مليل: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ ۾

$\overline{BC} \cong \overline{EF}, \overline{AB} \cong \overline{DE}$ ۽ $\overline{CA} \cong \overline{FD}$

گهربل: $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$

جوڙجڪ: فرض ڪريو ته پاسو $\overline{BC}$ سيني پاسن کان وڏو آهي ΔABC ته ΔGEF ناهيو اهڙي طرح جيئن

(i) ٽڪو G

(ii) $\angle FEG \cong \angle B$

(iii) $\overline{EG} \cong \overline{BA}$

D کي G سان ملايو.

ثابتي

بيان	دليل/ سبب
مطابقت $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta GEF$ ۾	
i. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	i. مليل
ii. $\angle B \cong \angle GEF$	ii. جوڙجڪ
iii. $\overline{BA} \cong \overline{GE}$	iii. جوڙجڪ
$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta GEF$ تنهنڪري	S.A.S. موضوع
$\therefore$ $\overline{AC} \cong \overline{GF}$ ۽ $\angle A \cong \angle G$	ٽڪنڊن جي يڪسانيت
$\overline{DF} \cong \overline{AC}$ پر	مليل
$\therefore$ $\overline{GF} \cong \overline{DF}$	متعدي خاصيت
$\therefore$ $\Delta DEG, m\angle 1 = m\angle 3$	سامهون وارا پاسا يڪسان آهن
	$\overline{EG} \cong \overline{BA} \cong \overline{ED}$

ساڳي طرح $m\angle 2 = m\angle 4$ ۾ ΔGFE	$\overline{DF} \cong \overline{GF}$
انهي ڪري $\therefore\ m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3 + m\angle 4$	مساوات جي جوڙ جي خاصيت
يا $m\angle D = m\angle G$	$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle D$
پر $m\angle G = m\angle A$	$m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle G$
$\therefore\ m\angle A = m\angle D$	مثي ثابت ٿيل
مطابقت $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ ۾	متعدي خاصيت
i. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	i. مليل
ii. $\angle A \cong \angle D$	ii. مثي ثابت ٿيل
iii. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	iii. مليل
$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta DEF$ ته پوءِ	S.A.S موضوع

Q.E.D

شامل نتيجو:

ٽپور پاسي ٽڪنڊي جون ڪنڊون ماپ ۾ برابر هونديون آهن.

مشق 9.3

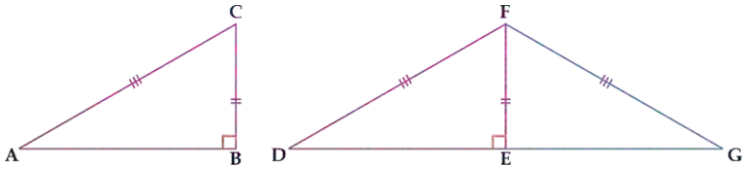
1. ABC هڪ ٻپور پاسو ٽڪنڊو آهي. D ان جي بنياد $\overline{BC}$ جي وچ وارو ٽپڪو آهي، ثابت ڪريو ته $\overline{AD}$ ، اڏڪندو $\angle A$ کي ۽ $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

2. مشترڪ بنياد جي ساڳي پاسي ABC ۽ DBC ٻه ٻپور پاسا ٽڪنڊا آهن ثابت ڪريو ته $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي اڏڪندڙ آهي $\overline{BC}$ جو.

3. PQRS هڪ چورس آهي. جنهن ۾ ترتيبوار $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ ۽ $\overline{RS}$ پاسن جا وچيان ٽپڪا x,y ۽ z آهن ثابت ڪريو ته $\Delta PXY \cong \Delta SZY$

9.1.4 سڌيان

جيڪڏهن ٻن گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي موافقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جو هئپاٿينيوز ۽ هڪ پاسو، ٻئي ٽڪنڊي هئپاٿينيوز ۽ واسطيدار ٻي پاسي سان يڪسان آهي ته ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان ٿيندا.



مليل: گوني ڪنڊ ٽڪنڊن ΔDEF ۽ ΔABC جي مطابقت ۾

(گوني ڪنڊ) $\angle B \cong \angle E$، (هئپاٿينيوز) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ۽ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ پاسو.

گهربل: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

جوڙجڪ: $\overline{DE}$ کي ٽپڪي G تائين وڌايو، ته جيئن $\overline{EG} \cong \overline{AB}$. ٽپڪن F ۽ G کي پاڻ ۾ ملايو

ثابتي:

بيان	دليل/ سبب
$m\angle DEF + m\angle GEF = 180^o$	سپليمنٽري ڪنڊن جو موضوع
پر $m\angle DEF = 90^o$	مليل
ته پوءِ $\therefore\ m\angle GEF = 90^o$	$\therefore\ 180^o - 90^o = 90^o$
۾ $\Delta GEF \leftrightarrow \Delta ABC$	(i) جوڙجڪ
i. $\overline{GE} \cong \overline{AB}$	(ii) هر هڪ گوني ڪنڊ آهي
ii. $\angle GEF \cong \angle ABC$	(iii) مليل
iii. $\overline{EF} \cong \overline{BC}$	S.A.S. $\cong$ S.A.S.
$\therefore\ \Delta GEF \cong \Delta ABC$	يڪسان پاسن جون مخالف ڪنڊون
انڪري $\angle G \cong \angle A$ ۽ $\therefore\ \overline{FG} \cong \overline{FG}$	هرهڪ ΔG جي يڪسان آهي.
$\therefore\ \overline{FG} \cong \overline{DF}$	
ٽڪنڊي ΔDFG, $\angle D \cong \angle G$ ۾	مطابقت
$\therefore\ \angle D \cong \angle A$	
۾ $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$	(i) ثابت ٿيل
i. $\angle A \cong \angle D$	(ii) گوني ڪنڊ
ii. $\angle ABC \cong \angle DEF$	(iii) مليل
iii. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$	
تنهنڪري $\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta DEF$	A.A.S $\cong$ A.A.S

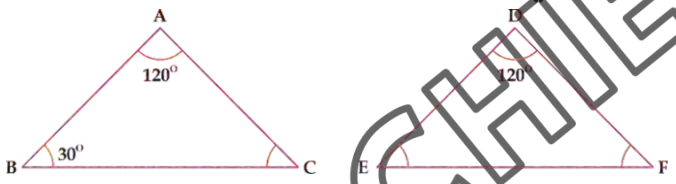
Q.E.D

مشق 9.4

1. ثابت ڪريو تہ
ٻپور پاسي ٽڪنڊي جي بنياد جي چوٽي کان عمود سامهون پاسي تي يڪسان هوندا آهن.
2. ثابت ڪريو تہ جيڪڏهن ٽڪنڊي جي ڪنڊ جو عمودي اڏڪندڙ، ان جي سامهون پاسن کي اڏواڙ ڪري تہ اهو ٽڪنڊو ٻپور پاسو ٽڪنڊو ٿيندو.
3. ثابت ڪريو تہ ٽپور پاسي ٽڪنڊي جا مڌيان يڪسان ٿيندا آهن.
4. ثابت ڪريو تہ ٻپور پاسي ٽڪنڊي جي بنياد کي اڏواڙ ڪندڙ مڌيان، ٽڪنڊي جي چوٽي واري ڪنڊ کي اڏواڙ ڪندا ۽ بنياد تي عمود آهن.
5. ثابت ڪريو تہ جيڪڏهن ٽڪنڊي جا ٽي عمود يڪسان آهن تہ ٽڪنڊو ٽپور پاسو آهي.

مشق ورجايو 9

1. جيڪڏهن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ $m\angle F$ ڳرا آهي.



A. $90°$
B. $60°$
C. $30°$
D. $20°$

2. هيٺين مان صحيح ۽ غلط بيانن جي سڃاڻپ ڪريو.
(i) چوڪنڊي ۾ سيني ڪنڊن جي ماپ جو جوڙ $360°$ آهي.
(ii) ٽڪنڊي ۾ سيني ڪنڊن جي ماپ جو جوڙ $270°$ آهي.
(iii) ٽپور پاسي ٽڪنڊي ۾ ڪنڊون ساڳي ماپ جون هونديون آهن.
(iv) ٽڪنڊي ۾ ٻہ گوني ڪنڊ ٽڪندا آهن.
(v) ٻپور پاسي ٽڪنڊي ۾ موافقت ۾ ڪنڊون ۽ موافقت ۾ پاسان ماپ ۾ برابر هوندا آهن.
3. جملي درست ڪرڻ لاءِ خال ڀريو.
(i) $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ تہ پوءِ $\overline{AC}$ جي موافقت آهي _____.
(ii) $\Delta KLM \leftrightarrow \Delta PQR$ تہ پوءِ $\angle MKL$ جي موافقت آهي _____.
(iii) ٽپور پاسي ٽڪنڊي ۾ بنيادي ڪنڊون _____ آهن.
(iv) جيڪڏهن ٽڪنڊي جي هر هڪ ڪنڊ جي ماپ $60°$ آهي تہ ٽڪنڊو _____ آهي.
(v) گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾، گوني ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو _____ ڇئبو آهي.
(vi) گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي، سوڙ هين ڪنڊن جي ماپ جو جوڙ _____ آهي.

4. درست جواب جي واسطيدار کي a, b,c ۽ d گول پايو.

(i) هيٺين مان کهڙي ٻٽ ٽڪنڊن جي يڪسانيت لاءِ مناسب صورت نہ آهي.

(a) A.S.A ≅A.S.A (b) H.S.H ≅ H.S.H

(c) S.A.A≅ S. A. A (d) A.A.A≅ A. A. A

(ii) ٽڪنڊي ΔABC ۾ جيڪڏهن ∠A ≅ ∠B تہ _____ ڪنڊ جو اڌواڌ ڪندڙ ٽڪنڊي کي ٻن يڪسان ٽڪنڊن ۾ تقسيم ڪندو.

(a) ∠A (b) ∠B (c) ∠C (d) ڪنڊن کا بہ هر

(iii) _____ جي اريب، ان کي ٻن يڪسان ٽڪنڊن ۾ تقسيم نہ ڪندي آهي.

(a) مستطيل (b) ٽرئپيزيم

(c) پورو چوٽ چوڪنڊو (d) چورس

(iv) سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊي ۾، ڪيترين ڪنڊن سوڙهيون هونديون آهن.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) ٻن کان وڌيڪ

خلاصو

هن يونٽ ۾ اسان هيٺيان سڌيان بيان ڪري ثابت ڪيا آهن.

- جيڪڏهن ڪن بہ ڏنل مطابقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جون ٻہ ڪنڊون ۽ ڪو بہ هڪ پاسو ٻي ٽڪنڊي جي واسطيدارڪنڊن ۽ پاسي سان يڪسان هجن تہ ٻئي ٽڪنڊا يڪسان ٿيندا. (A.S.A. ≅ A.S.A)
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي ٻہ ڪنڊون يڪسان هجن تہ سندس سامهون وارا پاسا بہ يڪسان هوندا.
- جيڪڏهن ٻن ٽڪنڊي ڏنل موافقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جاڻئي پاسا، ٻئي ٽڪنڊي جي واسطيدار ٽنهي پاسن سان يڪسان هجن تہ، ٻئي ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان يا ساڳيا هوندا. (S.S.S ≅ S.S.S)
- جيڪڏهن ٻن گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي موافقت ۾ هڪ ٽڪنڊي جو هئياٽينيوز ۽ هڪ پاسي، ٻي ٽڪنڊي جي واسطيدار هئياٽينيوز ۽ ٻي پاسي سان يڪسان آهي تہ ٽڪنڊا پاڻ ۾ يڪسان هوندا.
- ٻن ٽڪنڊن کي يڪسان چئبو آهي، جيڪڏهن انهن ۾ مطابقت موجود هجي اهڙي طرح تہ سي مطابقت رکندڙ پاسا ۽ ڪنڊون يڪسان آهن. (S.S.S)

يونٽ 10

پوروچوٽ چوڪنڊا ۽ ٽڪنڊا
(Parellelogram And Triangles)

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- هيٺين سڌيانن کي شامل نتيجن سان گڏ سمجهي سگهندا ۽ انهن کي استعمال ڪري لاڳاپيل حساب حل ڪندا.

(a) هڪ پورو چوٽ چوڪنڊي ۾
- آمهون سامهون پاسا يڪسان آهن.
- آمهون سامهون واريون ڪنڊون يڪسان آهن.
- اريب هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪندا آهن.

(b) جيڪڏهن ڪنهن چوڪنڊي جا ٻه آمهون سامهون وارا پاسا يڪسان ۽ پورو چوٽ آهن ته اهو چوڪنڊو پورو چوٽ چوڪنڊو آهي.

(c) جيڪڏهن ڪوليڪٽڪر، ڪنهن ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي وچين ٽبڪن کي پاڻ ۾ ملائي ٿو ته اهو ٽڪنڊي جي ٽئين پاسي جي پورو چوٽ هوندو ۽ ماپ ۾ انهي جي اڌ جيترو هوندو.

(d) ٽڪنڊي جا مڌيان هڪ ٽبڪي تي ملن ٿا ۽ اهو ٽبڪو هر مڌيان کي پورن ٽن حصن ۾ ورهائي ٿو.

(e) جيڪڏهن ٽي يا ٽن کان وڌيڪ پورو چوٽ ليڪون هڪ ڪپينڊڙ ليڪ کي يڪسان ٽڪرن ۾ ورهائن ته ، اهي ليڪون ڪنهن ٻي ڪپينڊڙ ليڪ کي پڻ يڪسان ٽڪرن ڪرن ۾ ورهائينديون.

تعارف:

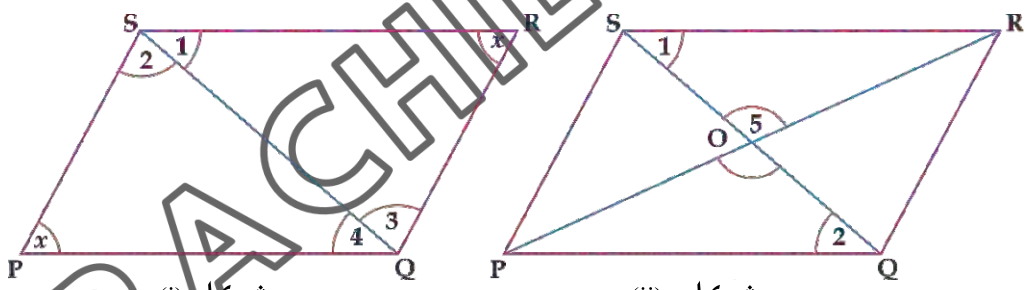
گذريل ڪلاسن ۾ شاگردن ڪيترن ئي قسمن جي گهڻ پاسن واريون شڪلون جهڙڪ ٽڪندا، پورو چوٽ چوڪنڊو، چورس، مستطيل، رامبس ۽ ٽرئيپيزيم وغيره بابت سکيو ۽ ڏاهيون آهن ۽ انهن جي پاسن ۽ ڪنڊن جي يڪسانيت بابت پڻ سکيو آهي. هن يونٽ ۾ اسان پورو چوٽ چوڪنڊي ۽ ٽڪنڊن سان تعلق رکندڙ سڌيانن بابت سکنداسين.

10.1 پورو چوٽ چوڪنڊا ۽ ٽڪنڊا:

سڌيان 10.1.1:

پورو چوٽ چوڪنڊي ۾

- آمهون سامهون پاسا يڪسان آهن.
- آمهون سامهون واريون ڪنڊون يڪسان آهن.
- اريب هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪنڊي.



شڪل (i) شڪل (ii)

مليل: $PQRS \parallel^{m}$

گهربل: (1) $\overline{PS} \cong \overline{QR}$; $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

(2) $\angle S \cong \angle Q$; $\angle P \cong \angle R$

(3) اريب PR ۽ $\overline{SQ}$ هڪبئي کي ٽپڪي O تي اڌواڌ ڪن ٿيون .

جوڙجڪ:

مليل شڪل (i) ۾ Q ۽ S کي ملايو.

ثابتي

بيان	سبب / دليل
شڪل (i) ۾	
(1)	
$\overline{SR} \quad \overline{PQ}, \overline{SQ}$	متبادل ڪندون
$m\angle 1 = m\angle 2$	$\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$
$m\angle 3 = m\angle 4$ ساڳي طرح تنهنڪري	جوڙ جي خاصيت جو موضوع
$\therefore \quad m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 3 + m\angle 4$	ڪندن جو جوڙ جو موضوع
$\angle S \cong \angle Q$ يا	ساڳيو طريقو مٿي ڏنل
$\angle P \cong \angle R$ ساڳي طرح تنهنڪري	
تہ آمهون سامهون ڪندون يڪسان آهن	
(2)	
$\Delta SPQ \leftrightarrow \Delta QRS$	
$\angle 1 \cong \angle 2$ and $\angle 3 \cong \angle 4$	(1) ۾ ثابت ٿيل
$\overline{SQ} \cong \overline{SQ}$	ٻنهي ۾ مشترڪ
$\therefore \quad \Delta SPQ \cong \Delta QRS$	پ . ڪ . پ ڪ . پ . ڪ
$\therefore \quad \overline{PQ} \cong \overline{RS}$ and $\overline{PS} \cong \overline{QR}$	
تہ آمهون سامهون پاسا يڪسان آهن شڪل	
(3)	
$\Delta SOQ \leftrightarrow \Delta ROS$	
$\angle 1 \cong \angle 2$	(1) ۾ ثابت ٿيل
$\angle POQ \cong \angle SOR$	چوٽي واريون مخالف ڪندو.
$\overline{PQ} \cong \overline{SR}$	(2) ۾ مٿي ثابت ٿيل
$\therefore \quad \Delta POQ \cong \Delta ROS$	پ . ڪ . پ ڪ . پ . ڪ
$\therefore \quad \overline{PO} \cong \overline{OR}$ and $\overline{OQ} \cong \overline{OS}$	ٽڪندن جي يڪسانيت سان
$\therefore \quad \overline{PR}$ ۽ $\overline{RS}$ اريبون هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿيون	

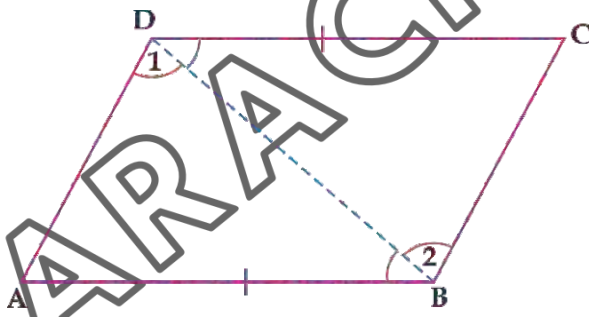
Q.E.D

مشق 10.1

1. پورو چوت چوڪنڊي جي ڪن ٻہ ٻن آمهون سامهون وارن پاسن جي وچين ٽٻڪن کي ملائيندڙ ليڪ انهيءَ جي ٻين پاسن سان پورو چوت آهي.
2. پورو چوت چوڪنڊي جي ڪنهن ٻہ پاسي تہ ٺهندڙ اندريون ڪنڊون سپليمنٽري هونديون آهن.
3. ثابت ڪريو تہ پورو چوت چوڪنڊي جي ساڳي پاسي وارين ٻن ڪنڊن جا اڏواڙ ڪنڊ، هڪ ٻئي کي گوني ڪنڊ تي ڪپيندا.
4. جيڪڏهن چوڪنڊي جون اريبون هڪ ٻئي کي اڏواڙ ڪن تہ ، اهو پورو چوت چوڪنڊو آهي.
5. پورو چوت چوڪنڊي جي ڪنهن ٻہ پاسي جون نسبتي ڪنڊون برابر آهن.

سڌيان 10.1.2

جيڪڏهن ڪنهن چوڪنڊي جا ٻہ آمهون سامهون وارا پاسا يڪسان ۽ پورو چوت آهن تہ اهو چوڪنڊو پورو چوت چوڪنڊو آهي.



مليل: چوڪنڊي ABCD, ۾
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ۽ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

گهربل: ABCD, هڪ چوڪنڊو آهي

جوڙجڪ: ٽٻڪا B ۽ D ملايو.

ثابتي

بيان	سبب / دليل
$\overline{AB}$ $\overline{CD}$, $\overline{BD}$ انهن کي ڪپيندڙ آهي	متبادل ڪندون
$\therefore$ ۽ $\angle ABD \cong \angle CBD$	
$\Delta ADB \leftrightarrow \Delta CBD$	
(i) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	(i) مليل
(ii) $\angle ABD \cong \angle CDB$	(ii) مٿي ثابت ٿيل
(iii) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	(iii) مشترڪ
$\therefore$ $\Delta ADB \cong \Delta CBD$	پ . ڪ . پ ڪ . پ . ڪ
$\therefore$ $\angle 1 \cong \angle 2$	مليل متبادل ڪندون
پَرَ هي متبادل ٿڪندا هن	
$\overline{AD}$ $\overline{BC}$	
$\overline{AB}$ $\overline{CD}$	
ABCD is a $\|^m$	

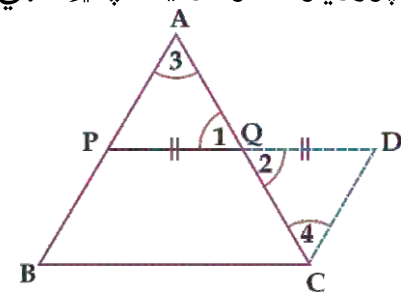
Q.E.D

مشق 10.2

1. ثابت ڪريو ته هڪ چوڪنڊو، پورو چوٽ چوڪنڊو آهي، جيڪڏهن ان جون آمهون سامهون واريون ڪندون يڪسان آهن.
2. ثابت ڪريو ته هڪ چوڪنڊو، پورو چوٽ چوڪنڊو آهي، جيڪڏهن ان جون اريبون هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿيون.
3. جيڪڏهن ڪنهن چوڪنڊي جي سامهون وارن پاسن جا ٻئي جوڙ پاڻ ۾ يڪسان هجن ته اهو چوڪنڊو پورو چوٽ چوڪنڊو آهي.
4. جيڪڏهن هڪ چوڪنڊو پورو چوٽ چوڪنڊو آهي، ته ان جون اريبون ٻه يڪسان ٿڪندا ٿاهيندڙيون.
5. جيڪڏهن ڪنهن چوڪنڊي جي هر پاسي کان ٺهندڙ ڪندون سپليمينٽري آهن ته اهو پورو چوٽ چوڪنڊو آهي.

سڌيان 10.1.3

جيڪڏهن ڪو ليڪ ٽڪر ڪنهن چوڪنڊي جي ٻن پاسن جي وچين ٽٻڪن کي پاڻ ۾ ملائي ٿو ته اهو ٽڪنڊو جي ٽئين پاسي جي پوروچوٿ هوندو ۽ ماپ ۾ انهيءَ جي اڌ جيترو هوندو.



مليل: ٽڪنڊي ABC ۾ پاسن $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ جا وچيان ٽپڪا ترتيبوار Q ۽ P آهن، ته $\overline{PQ}$, ΔABC ليڪ ٽڪر انهن کي ملائي ٿو.

گهربل: $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ۽ $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$

جوڙجڪ: $\overline{PQ}$ تي ٽپڪو D اهڙي طرح ڪڍو جو $\overline{QD} \cong \overline{PQ}$. ٽپڪن C ۽ D کي ملائي.

ثابتي

بيان	سبب / دليل
$\Delta APQ \leftrightarrow \Delta CDQ$	
$\overline{PQ} \cong \overline{QD}$ (i)	(i) جوڙجڪ
$\angle 1 \cong \angle 2$ (ii)	(ii) چوٽي واريون ڪنڊون
$\overline{AQ} \cong \overline{QC}$ (iii)	(iii) مليل
$\therefore \Delta APQ \cong \Delta CDQ$	Δs ٽڪنڊن جي يڪسانيت سان
$\therefore \angle 3 \cong \angle 4$ ۽ $\overline{AP} \cong \overline{CD}$	مليل
پر $\overline{PB} \cong \overline{AP}$	هرهڪ $\overline{AP}$ جي يڪسان آهي.
$\therefore \overline{PB} \cong \overline{CD}$	
$\angle$s متبادل آهن $\angle 4$ جي $\angle 3$	متبادل ڪنڊن جي وصف مطابق
$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ i.e. $\overline{PB} \parallel \overline{CD}$	متبادل ڪنڊون يڪسان آهن
$\therefore$ PBCD آهي $\parallel^m$	
$\therefore \overline{PD} \cong \overline{BC}$ ۽ $\overline{PD} \parallel \overline{BC}$	S جي سامهون پاسا پورو چوٽ ۽ يڪسان آهن
$\therefore \overline{PQ} \cong \overline{BC}$	$\overline{PD}$ ۽ $\overline{PQ}$ ساڳي ليڪ تي آهن ۽
۽ $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$	$m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{PD}$

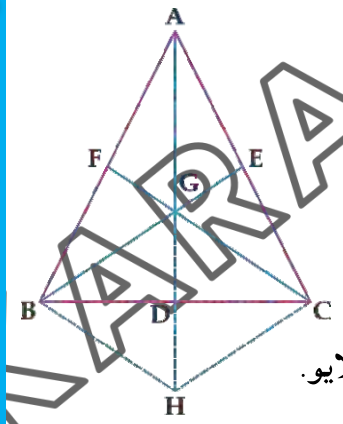
Q.E.D

مشق 10.3

1. جيڪڏهن ڪوليڪٽڪر ڪنهن ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي وچين ٽپڪن کي پاڻ ۾ ملائي ٿو، ته اهو ٽئي پاسي جي پورو چوٿ هوندو ۽ ان جي ڊيگهه 4 س. م آهي ته ٽي پاسي جي ڊيگهه ڪيتري ٿيندي.
2. ثابت ڪريو ته چوڪنڊي جي آمهون سامهون وارن پاسن جا اڌڪندڙ ليڪٽڪر هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿا.
3. چوڪنڊي جي چئني پاسن جي وچين ٽپڪن کي ترتيبوار هڪ ٻئي سان ملائڻ جيڪو ننڍو چوڪنڊو ٺهندو سو پورو چوٿ هوندو.
4. ثابت ڪريو ته ڪوليڪٽڪر ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي وچئين ٽپڪي مان گذري ٻي پاسي جو پورو چوٿ ٿئي ته اهو ٽيئن پاسي کي پڻ اڌواڌ ڪندو.
5. ثابت ڪريو ته ٽڪنڊي جي ٽنهي پاسن جي وچين ٽپڪن کي پاڻ ۾ ملائڻ سان جيڪي چار ننڍا ٽڪنڊا ٺهن ٿا. سڀي پاڻ ۾ يڪسان آهن.

سڌيان 10.1.4

ٽڪنڊي جا مڌيان هڪ ٽپڪي تي ملن ٿا ۽ اهو ٽپڪو هر مڌيان کي پورن ٽن حصن ۾ ورهائي ٿو.



مليل: ΔABC, جنهن ۾ ٻه مڌيان $\overline{BE}$ ۽ $\overline{CF}$ ٽپڪي G تي ملن ٿا.

گهربل: (i) $\overline{AG}$ وڌائڻ سان $\overline{BC}$ کي D وٽ ڪٽي.

(ii) ٽپڪو G هر مڌيان کي پورن ٽن حصن ۾ ورهائي ٿو

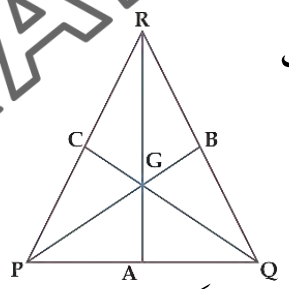
جوڙجڪ: $\overline{CH} \parallel \overline{EB}$ ناهيو، جيڪو $\overline{AD}$ سان پورو چوٿ هجي ۽ وڌايل کي H ٽپڪي تي ملي ٽپڪن B ۽ H کي ملايو.

ثابتي

بيان	سبب / دليل
تڪنڊي ۾ $\Delta ACH,\ \overline{AE} \cong \overline{EC}$	مليل
۽ $\overline{EG} \parallel \overline{CH}$	جوڙجڪ
$\therefore\ \overline{AG} \cong \overline{GH}$	سڌيان 10.1.3 جو عڪس
وري تڪنڊي ΔABH ۾	
$\overline{AG} \cong \overline{GH}$	مٿي ٺاهل ٿيل
$\overline{AF} \cong \overline{FB}$	مليل
$\overline{FG} \cong \overline{BH}$	سڌيان 10.1.3 جو عڪس
تنهنڪري BGCH هڪ پورو چوت چوڪنڊو آهي. جنهن جون اريبون $\overline{BC}$ ۽ $\overline{GH}$ هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿيون	
تہ پوءِ $\overline{GH} \cong \overline{DH},\ \overline{BD} \cong \overline{DC}$	سڌيان 10.1.1 مطابق
$\overline{AD}$ مڌيان آهي ΔABC	مٿي ثابت ٿيل آهي $\overline{BD} \cong \overline{DC}$
۽ $m\overline{AG} = m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$	$\overline{GD} \cong \overline{DH} \Rightarrow m\overline{GH} = 2m\overline{GD}$
G ٽڪڻو $\overline{AD}$ ئي ٽن حصن ۾ ورهائيندڙ آهي ساڳي طرح اسان G کي $\overline{BE}$ ۽ $\overline{CF}$ کي ٽن حصن ۾ ورهائڻ وارو ٽڪو پڻ ثابت ڪري سگهون ٿا.	جيئن تہ $\overline{AG}$ ٻيڻو آهي $\overline{GD}$ جو مٿيئن طريقي مطابق

Q.E.D

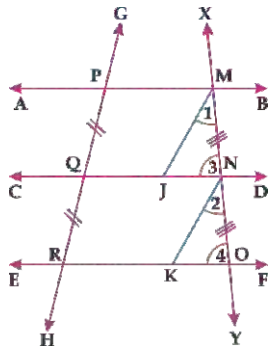
مشق 10.4



1. جيڪڏهن تڪنڊي جا ٽيڪي مڌيان يڪسان هجن تہ ثابت ڪريو تہ اهو ٽيور پاسو تڪنڊو آهي.
2. جيڪڏهن تڪنڊي $\overline{PB}, \overline{QC}$ جا ٽيئن مڌيان $\overline{RA}$ ۽ ΔPQR ٽڪي G تي ملن تہ ثابت ڪريو تہ G سيڌرائڊ (تنهي مڌيانن جي ملڻ وارو ٽڪو) آهي
3. مليل شڪل ۾ $\overline{GD}$ جي ڊيگهہ 2 س. م آهي تہ پوءِ $\overline{AG}$ جي ڊيگهہ معلوم ڪريو.

سڌيان 10.1.5

جيڪڏهن ٽي يا ٽن کان وڌيڪ پورو چوٽ ليڪون، هڪ ڪپيندڙ ليڪ کي يڪسان ٽڪرن ۾ ورهائن ته اهي ليڪون ڪنهن بي ڪپيندڙ ليڪ کي پڻ يڪسان نڪرن ۾ ورهائيندڙيون.



مليل: $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ ۽ $\overleftrightarrow{EF}$ ، پورو چوٽ ليڪون آهن

$\overleftrightarrow{GH}$ ليڪ P, اهڙي طرح ٽپڪن P , Q ۽ R تي ڪپي ٿي جو $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$

$\overleftrightarrow{XY}$ بي ڪپندڙ ليڪ آهي جيڪا $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$ ۽ EF ٽپڪن M , N , O تي ڪپي ٿي.

گهربل: $\overline{NM} \cong \overline{NO}$

جوڙجڪ: $\overline{MJ}$ ۽ $\overline{NK}$ ليڪون GH جي پوروچوٽ ڪيو. جيڪي $\overline{CD}$ ۽ $\overline{EF}$ کي ٽپڪن J ۽ K تي ملن.

ثابتي

بيان	سبب / دليل
چوڪنڊي PM QJ	$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ مليل
۾ $\overline{PQ}$ $\overline{MJ}$	جوڙجڪ
∴ PMJQ is a m	آمهون سامهون وارا پاسا پورو چوٽ آهن
∴ $\overline{PQ} \cong \overline{MJ}$	$\overline{QR} \parallel \overline{NK}$ and $\overline{QN} \parallel \overline{RK}$
PQJM هڪ پورو چوٽ چوڪنڊو آهي ساڳي طرح QRKN به هڪ پورو چوٽ چوڪنڊو آهي.	مليل
∴ $\overline{QR} \cong \overline{NK}$	مساوات جي عبوري خاصيت
پر $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$	هر هڪ $\overline{GH}$ جي پورو چوٽ آهي
∴ $\overline{MJ} \cong \overline{NK}$	نسبتي ڪندڙون
تنهنڪري $\overline{MJ} \parallel \overline{NK}$	(i) مٿي ثابت ٿيل
∴ $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) نسبتي ڪندڙون
هاڻ $\Delta MNJ \leftrightarrow \Delta NOK$	(iii) مٿي ثابت ٿيل
(i) $\angle 1 \cong \angle 2$	ڪ . ڪ . پ ڪ . ڪ . پ
(ii) $\angle 3 \cong \angle 4$	ٽڪندڙ جي يڪسانيت مطابق
(iii) $\overline{MJ} \cong \overline{NK}$	
∴ $\Delta MNJ \cong \Delta NOK$	
∴ $\overline{MN} \cong \overline{NO}$	

Q.E.D

مشق 10.5

ڪنهن ٽڪنڊي جي پاسن جي وچين ٽپڪن کي ملائڻ سان ٺهندڙ نئين ٽڪنڊي جون ڪنڊون، اصلوڪي ٽڪنڊي جي مساوي هونديون آهن.

ٽرئپيزيم جي ٻنهي غير پورو چوٽ پاسن جي وچين ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر ٻين ٻنهي پاسن سان پورو چوٽ بہ آهي ۽ ماپ ۾ انهن جي جوڙ جي اڌ جيترو آهي.

ڪنهن ٽڪنڊي جي چوٽيءَ کان، پابي تي نڪتل هر ليڪٽڪر کي ٻين پاسن جي وچين ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪرا پورا ٻہ ٽڪر ڪري ٿي.

ورجايل مشق 10

خال پريو.

(i) پوروچوٽ چوڪنڊي ۾ آمهون سامهون پاسا _____ آهن

(ii) پوروچوٽ چوڪنڊي ۾ آمهون سامهون ڪنڊو _____ آهن

(iii) ٽڪنڊي ۾ مڌيان _____ آهن

(iv) پوروچوٽ چوڪنڊي جو اريبون _____ هڪ ٻئي کي

(v) پوروچوٽ چوڪنڊي جو نسبتي ڪنڊون _____ آهن

(vi) ٽڪنڊي جا مڌيان _____ آهن

(vii) چوڪنڊي جي اندرين ڪنڊن جي ماپ جو جوڙ برابر _____ آهي

.2 صحيح جواب تي ٽڪ لڳايو.

1 (i) چورس جون اريبون پاڻ ۾ هڪ ٻي سان _____ آهن

(a) عمود (b) غير يڪسان

.2 (c) يڪسان (d) ٻئي (a) ۽ (c)

(ii) چوڪنڊي جي اندرين ڪنڊن جي ماپن جو جوڙ _____ آهي

(a) 2 گوني ڪنڊون (b) 4 گوني ڪنڊون

.3 (c) 3 گوني ڪنڊون (d) ڪو بہ نہ

(iii) ٽڪنڊي ABC ۾ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ جي وچين ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر برابر آهي 3.5 س.م جي ته $m\overline{BC}$ _____

(a) 4.5 س . م (b) 5.5 س . م

(c) 6 س . م (d) 7 س . م

(iv) جا ٻه مڌيان $\overline{AB}$ ۽ $\overline{BE}$ پاڻ کي ٽپڪي G تي ڪپين ٿا. جيڪڏهن $m\overline{GD} = 1.7$ س.م ته پوءِ mAG = _____

(a) 2.7 س . م (b) 8.85 س . م

(c) 3.4 س . م (d) 5.1 س . م

(v) پوروچوٽ چوڪنڊي ABCD جي ڪنڊون $\angle A$ ۽ $\angle C$ جي ماپن جو جوڙ 130 آهي ته پوءِ $m\angle C$ _____

(a) 25^0 (b) 50^0 (c) 65^0 (d) ڪابه نه

(vi) جيڪڏهن چوڪنڊي جي آمهون سامهون ڪنڊ جي ماپ برابر آهي ۽ انهن مان ڪابه گوني ڪنڊن آهي ته چوڪنڊو ٿيندو _____

(a) چورس (b) پورو چوٽ چوڪنڊو

(c) ٽرئپيزيم (d) مستطيل

(vii) سينٽرائڊ هڪ مشترڪ ٽپڪو آهي _____ کي ڪاٽ جو

(a) ٽڪنڊي جا مڌيان (b) پورو چوٽ چوڪنڊي جون اريبون

(c) ٽڪنڊي جي ڪنڊ جا اڌڪنڊڙ (d) ٽڪنڊي جو عمودي اڌڪنڊڙ

(viii) ڪنهن ٽڪنڊي جي مڌيان تي ٽپڪو آهي _____

(a) چوتيءَ کان هڪ جيتري مفاصلي تي

(b) پاسي جي وچ واري نقطي کان هڪ جيتري مفاصلي تي

(c) عمود کان هڪ جيتري مفاصلي تي

(d) ڪو به نه

خلاصو

- پورو چوٽ چوڪنڊي جا آمهون سامهون پاسا يڪسان هوندا آهن.
- پورو چوٽ چوڪنڊي جون آمهون سامهون ڪنڊون يڪسان هونديون آهن.
- سپليمينٽري ڪنڊون لاڳيتين ڪنڊن جي خاصيت رکن ٿيون.
- پورو چوٽ چوڪنڊي جون اريبون هڪ ٻئي کي اڌواڌ ڪن ٿيون ۽ هر هڪ اريب ان کي ٻن يڪسان ٽڪنڊن ۾ ورهائي ٿي.
- جيڪڏهن پوروچوٽ چوڪنڊي جون گوني ڪنڊون هجن تہ هي ڪنڊون گوني ٿينديون.
- پورو چوٽ چوڪنڊي جون اريبون، ان کي چئن يڪسان ٽڪنڊن ۾ تقسيم ڪن ٿيون.
- پورو چوٽ چوڪنڊي جي ڪنڊن جو جوڙ ** 360 آهي.
- ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊن جو جوڙ **180 آهي.
- ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊن جو جوڙ **360 آهي.
- جيڪڏهن تي يا ٽن کان وڌيڪ پورو چوٽ ليڪون هڪ ڪپينڊڙ ليڪ کي يڪسان ٽڪرن ۾ ورهائن تہ ، اهي ليڪون ڪنهن ٻي ڪپينڊڙ ليڪ کي پڻ يڪسان ٽڪرن ڪرن ۾ ورهائينديون.
- ٽڪنڊي جا مڌيان هڪ ٽبڪي تي ملن ٿا ۽ اهو ٽبڪو هر مڌيان کي پورن ٽن حصن ۾ ورهائي ٿو.
- جيڪڏهن ڪوليڪ ٽڪر، ڪنهن ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي وچين ٽبڪن کي پاڻ ۾ ملائي ٿو تہ اهو ٽڪنڊي جي ٽئين پاسي جي پورو چوٽ هوندو ۽ ماپ ۾ انهي جي اڌ جيترو هوندو.

يونٽ 11

ليڪ جا اڌ ڪندڙ ۽ ڪنڊ جا اڌ ڪندڙ

Line Bisectors and Angle Bisectors

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- هيٺين سڌيانن کي شامل نتيجن سان گڏ سمجهي سگهندا ۽ انهن کي استعمال ڪري لاڳاپيل حساب حل ڪندا.
- ڪنهن ليڪ جي عمودي اڌڪندڙ تي موجود ٽپڪو انهيءَ ليڪ ٽڪر جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو آهي.
- ليڪ ٽڪر تي ڪو بہ ٽپڪو جيڪو ان جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي، اهو ان جو عمودي اڌڪندڙ هوندو آهي.
- ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌڪندڙ هم ٽپڪا آهن (يعني ساڳئي ٽپڪي مان گذرندا آهن)
- ڪنهن بہ ڪنڊ کي اڌواڌ ڪندڙ ليڪ تي موجود ٽپڪو انهيءَ ڪنڊ جي ٻانهن تي هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.
- ڪنهن بہ ڪنڊ ۾ موجود اندر ٽپڪو ان جي ٻانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هجي تہ اهو ان جو اڌڪندڙ آهي.
- ٽڪنڊي جي ڪنڊن کي اڌ ڪندڙ ساڳي ٽپڪي گذرندا آهن.

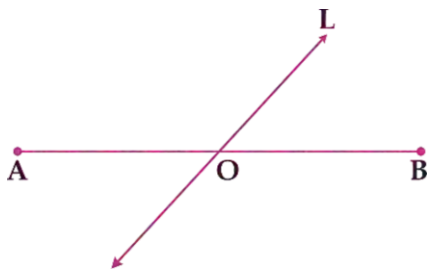
تعارف

اسان هتي ليک ٽڪر ۽ ڪنڊ جي اڌ ڪنڊڙ سان تعلق رکندڙ سڌيان ۽ حساب جي مطالعو ڪنداسين.

وصول:

(i) ليک جا اڌ ڪنڊڙ

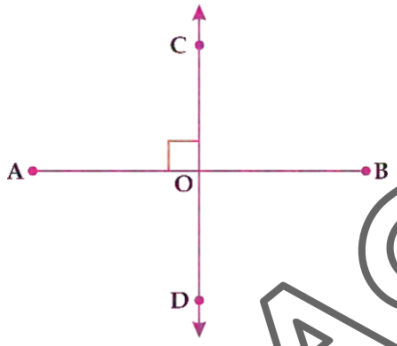
هڪ ليک، شعاع يا ٽڪرو، ٻي ليک ٽڪر کي ٻن برابر حصن ۾ ورهائي ته ان کي اڌ ڪنڊڙ چئبو آهي.



مثال طور: هيٺ شڪل ۾ ليک 'L'، $\overline{AB}$ ليک ٽڪري جو اڌ ڪنڊڙ آهي جيڪو $\overline{AB}$ جي وچ واري ٽپڪي 'O' مان گذري ٿو.

(ii) ليک ٽڪر جو عمودي اڌ ڪنڊڙ

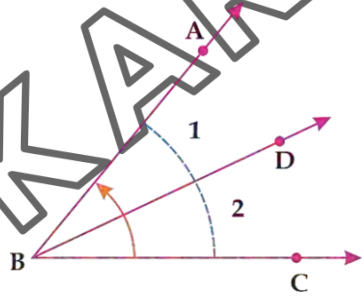
هڪ ليک جيڪا ليک ٽڪر کي 90 درجن تي ٻن حصن ۾ اڌ ڪري ته ان کي ليک ٽڪر جو عمودي اڌ ڪنڊڙ چئبو آهي.



مثال طور: ڏنل شڪل ۾ $\overleftrightarrow{CD}$ ليک ٽڪر، AB تي عمود آهي جيڪو وچين ٽپڪي 'O' مان گذري ٿو. ته پوءِ $\overline{CD}$ کي $\overline{AB}$ جوعمودي اڌ ڪنڊڙ چئبو آهي. هيٺ شڪل ۾ ليک $\overleftrightarrow{CD}$ ليک ٽڪر $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪنڊڙ آهي.

(iii) ڪنڊ جو اڌ ڪنڊڙ

هڪ ليک، شعاع يا ٽڪرو جڏهن ڪنهن ڪنڊ کي ٻن برابر ڪنڊن ۾ ورهائي ته ان کي ڪنڊ جو اڌ ڪنڊڙ چئبو آهي.

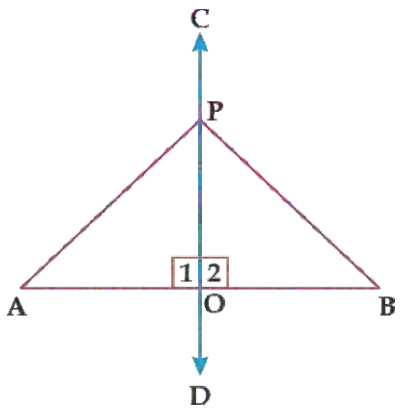


ڏنل شڪل ۾ $\angle CBA$ ڪنڊ جو اڌ ڪنڊڙ $\overrightarrow{BD}$ آهي، جيڪو ان ڪنڊ کي ٻن پورن ڪنڊن $\angle 1$ ۽ $\angle 2$ ۾ ورهائي ٿو. جيئن $\angle 1 \cong \angle 2$

سڌيان 11.1.1

ثابت ڪريو تہ:

ڪنهن ليڪ ٽڪر جي عمودي اڏڪندڙ تي موجود ٽپڪو انهيءَ ليڪ ٽڪر جي ٻنهي چيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو آهي.



مليل: $\overleftrightarrow{CD}$ عمودي اڏڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو جيڪو ان کي پوري وچ "O" تي ڪپي ٿو P ڪو ٽپڪو $\overleftrightarrow{CD}$ تي آهي.

گهربل: $\overline{AP} \cong \overline{BP}$، يعني P ٽپڪو A ۽ B کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.

ثابتي:

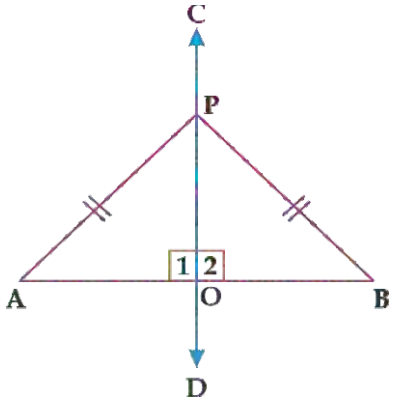
بيان	سبب / دليل
$\Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$ ۾	
(i) $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	(i) مليل ("O" وچ وارو ٽپڪو آهي)
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) مليل ($\overline{CD} \perp \overline{AB}$ "O" ٽپڪي وٽ)
(iii) $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	(iii) مشترڪ
$\therefore$ $\Delta AOP \leftrightarrow \Delta BOP$	پ . ڪ . پ موضوع
$\therefore$ $\overline{AP} \cong \overline{BP}$	ٽڪندن جي يڪسانيت مطابق .Δs
مگر ٽپڪو P ليڪ $\overleftrightarrow{CD}$ تي ڪو بہ ٽپڪو آهي ساڳي طرح $\overleftrightarrow{CD}$ تي ورتل ڪو بہ ٽپڪو ٻن ٽپڪن A ۽ B کان هڪ جيترو پري هوندو تنهنڪري ليڪ ٽڪر جي عمودي اڏڪندڙ تي موجود هر هڪ ٽپڪو انهيءَ جي چيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو.	فرضي ورتل مٿيا قدم ورجائڻ سان

Q.E.D

سڌيان 11.1.2

ثابت ڪريو تہ:

ليڪ ٽڪر تي ڪو بہ ٽپڪو جيڪو ان جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي تہ اهو ان جو عمودي اڌڪندڙ هوندو آهي.



مليل: A ۽ B بہ مشتمل ٽپڪا آهن ۽ P حرڪت ڪندڙ ٽپڪو آهي جيئن $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

گهربل: P عمودي اڌڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو

جوڙجڪ: $\overline{AB}$ ڪي "O" تي بن حصن ۾ ڪپيو ۽ P ۽ O کي پاڻ ۾ ملايو.

ثابتي:

بيان	Reasons
$\Delta POA \leftrightarrow \Delta POB$ ۾	
(i) $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	(i) جوڙجڪ
(ii) $\overline{PA} \cong \overline{PB}$	(ii) مليل
(iii) $\overline{PO} \cong \overline{PO}$	(iii) مشترڪ
$\Delta POA \cong \Delta BOP$	پ . ڪ . پ موضوع ٽڪنڊن جي يڪسانيت مطابق
$\angle 1 \cong \angle 2$	Δs هڪ ليڪ آهي (سپليمنٽ جو موضوع) جيڪڏهن ٻہ سپليمنٽري ڪنڊون ماپ ۾ برابر آهن تہ هر هڪ گوني ڪنڊ آهي.
پر $\angle 1$ ۽ $\angle 2$ سپليمنٽري ڪنڊون آهن هر هڪ $\angle 2$ ۽ $\angle 1$ گوني ڪنڊ آهي	$\overline{AO} \cong \overline{BO}$ ۽ $\overline{PO} \perp \overline{AB}$
تنهنڪري $\overline{PO}$ عمودي اڌڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو تہ پوءِ هر ٽپڪو جيڪو A ۽ B کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو اهو $\overline{AB}$ جو عمودي اڌڪندڙ ٿيندو.	اسان مٿيان قدم ورجائڻ سان ان کي ثابت ڪري سگهون ٿا.

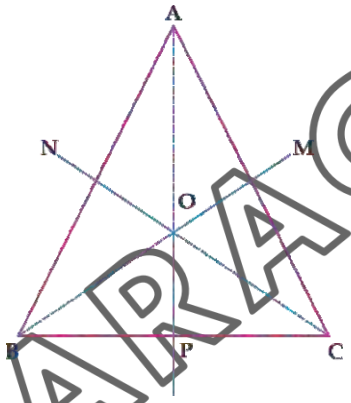
Q.E.D

مشق 11.1

1. ثابت ڪريو تہ ڪنهن ٽڪنڊي جي ڪن ٻہ ٻن پاسن جا عمودي اڌ ڪنڊڙ هڪ اهڙي ٽڪي تي ملن ٿا جيڪو سندس ٽنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.
2. ثابت ڪريو تہ گول جو مرڪز، هڪ زهہ جي عمودي اڌڪنڊڙن تي آهي.
3. ٽن غير هم ليڪ ٽڪن مان گذرندڙ گول جو مرڪز ڪٿي ٿيندو ۽ ڇو.
4. جيڪڏهن ٻہ گول پاڻ کي A ۽ B ٽڪن تي ڪپيسن، پوءِ ثابت ڪريو تہ انهن جي مرڪز مان گذرندڙ ليڪ جو عمودي اڌڪنڊڙ ٿيندي.
5. تي مارڪيٽون A, B ۽ C هڪ ليڪ تي نہ آهن. ڪاروباري شخص اهڙي جڳهہ تي مسجد ناهڻ چاهي ٿو، جيڪا هنن مارڪيٽن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هجي، مسجد جي جڳهہ طئ ڪرڻ کان پوءِ ثابت ڪريو تہ هئي جڳهہ ٽنهي مارڪيٽن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.

سڌيان 11.1.3:

ثابت ڪريو تہ ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌڪنڊڙ هم ٽڪا آهن (يعني ساڳئي مان گذرندا آهن)



مليل: ٽڪنڊو ABC

گهربل: ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌڪنڊڙ

جوڙجڪ:

$\overline{MO}$ ۽ $\overline{NO}$ جا عمودي اڌڪنڊڙ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ ناهيو جيڪي ٽڪي "O" تي ملن ٿا.

کي ٽڪي P اڌ ڪريو.

$\overline{OC}$, $\overline{OB}$, $\overline{OA}$, $\overline{OP}$ ۽ $\overline{BC}$ ڪڍو.

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
NO، AB جو عمودي اڌ ڪندڙ آهي.	جوڙجڪ
$\therefore \overline{AO} \cong \overline{OB}$	
تنهنڪري $\overline{AO} \cong \overline{OC}$	$\overline{MO}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{AC}$ جو
$\therefore \overline{OB} \cong \overline{OC}$	هر هڪ يڪسان آهي $\overline{AO}$ جي.
P ليک ٽڪر $\overline{BC}$ جي وچ وارو ٽپڪو آهي.	جوڙجڪ
تنهنڪري $\overline{OP}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{BC}$ جو.	سڌيان 11.1.2 مطابق
هتي ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ ساڳي ٽپڪي مان گذرن ٿا.	انهن مان هرهڪ اهئي ٽپڪي تي ملن ٿا.

Q.E.D

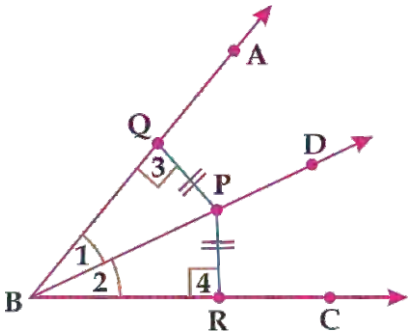
مشق 11.2

1. ثابت ڪريو تہ سوڙهي ڪنڊ جو گهيريندڙ مرڪز ٽڪنڊي جي اندرين ۾ هوندو.
2. ثابت ڪريو تہ ٻپور پاسي ٽرئيپزيم جي چئني پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ هم ٽپڪي تي هوندا آهن (يعني ساڳئي ٽپڪي تي هوندا)
3. ثابت ڪريو تہ ٽڪنڊي جا عمود هم ٽپڪي تي آهن (ساڳي ٽپڪي تي)

11.1.4 سڌيان

ثابت ڪريو تہ

ڪنهن بہ ڪنڊ تي اڌواڌ ڪندڙ ليک تي موجود ٽپڪو، انهي ڪنڊ جي بانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.



مليل: $\overline{BD}$ ڪنڊ $\overline{ABC}$ جو اڌواڌ ڪنڊ آهي.

P، $\overline{BD}$ تي ڪنيل ڪوبہ ٽپڪو آهي ۽

$\overline{PQ}$ ۽ $\overline{PR}$ ترتيبوار، ٻانهن $\overline{BA}$ ۽ $\overline{BC}$

تي عمود آهن.

گهربل:

$\overline{PQ} = \overline{PR}$ (يعني ٽپڪو P, BA ۽ BC کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي)

ثابتي:

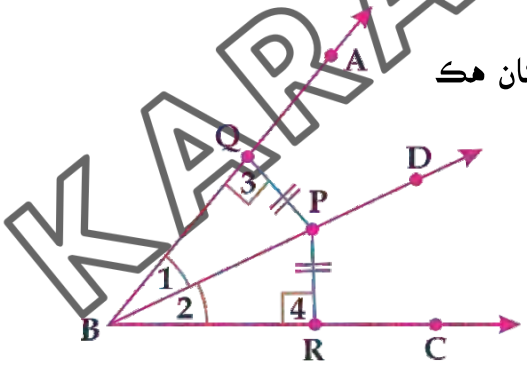
بيان	Reasons
۾ $\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$	
(i) $\angle 3 \cong \angle 4$	(i) هرهڪ گوني ڪنڊ آهي.
(ii) $\angle 1 \cong \angle 2$	(ii) مليل ($\overline{BD}$ اڌ ڪنڊ آهي)
(iii) $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	(iii) مشترڪ
$\Delta PQB \cong \Delta PRB$	ڪ . ڪ . پ = ڪ . ڪ . پ
$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	ٽڪنڊن جي يڪسانيت مطابق Δs
يعني P ٽپڪو، BA ۽ BC کان هڪجيتري مفاصلي تي آهي.	

Q.E.D

11.1.5 سڌيان

ثابت ڪريو تہ

ڪنهن بہ ڪنڊ ۾ موجود اندر ٽپڪو، ان جي ٻانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هجي تہ اهو ان جو اڌ ڪنڊ آهي.



مليل: $\overline{BD}$ تي موجود ٽپڪو P، ڪنڊ ABC

جي ٻانهن $\overline{AB}$ ۽ $\overline{BC}$ کان هڪ جيتري

مفاصلي تي آهي.

$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ ۽ $\overline{PQ} \perp \overline{BA}$ ۽ $\overline{PR} \perp \overline{BC}$.

گهربل: يعني $\overline{BD}$ ڪنڊ ABC جو اڌواڌ ڪنڊ آهي.

ثابتي:

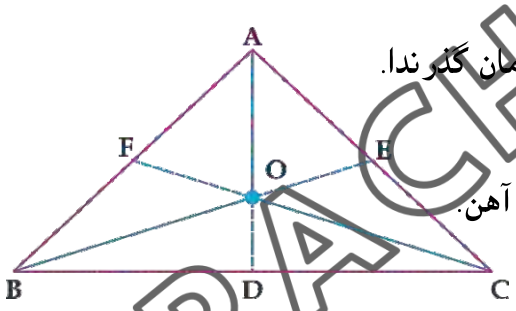
بيان	Reasons
$\Delta PQB \leftrightarrow \Delta PRB$ ۾	گوني ڪنڊ جي ٽڪنڊن نسبت Δs
(i) $\angle 3 \cong \angle 4$	(i) هرهڪ گوني ڪنڊ آهي.
(ii) $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	(ii) مليل
(iii) $\overline{BP} \cong \overline{BP}$	(iii) مشترڪ هيپاٽينيوز
$\Delta PQB \cong \Delta PRB$	گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾
$\angle 1 \cong \angle 2,$	H.S $\cong$ H.S
يعني BD، ڪنڊ $\angle ABC$ جو اڌواڌ ڪنڊ آهي.	ٽڪنڊن جي يڪسانيت سان

Q.E.D

11.1.6 سڌيان

ثابت ڪريو تہ

ٽڪنڊي جي ڪنڊن کي اڌ ڪنڊ ساڳي ٽپڪي مان گذرندا.



مليل: ٽڪنڊي ΔABC ۾

$\overline{BE}$ ۽ $\overline{BF}$ ڪنڊن $\angle C$ ۽ $\angle B$ جا اڌ ڪنڊ آهن.

جيڪي هڪ ٻئي کي 0 ٽپڪي تي اڌ ڪن ٿا.

گهربل: $\angle A, \angle B$ ۽ $\angle C$ جا اڌ ڪنڊ هم ٽپڪي تي هوندا.

جوڙجڪ: $\overline{OD} \perp \overline{BC}$. ۽ $\overline{OF} \perp \overline{AB}$ تي ٺاهيو.

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
مطابقت ۾	
(i) $\overline{OD} \cong \overline{OF}$	ڪنڊ تي اڌ ڪنڊ ٽڀڪو، ان جي ٻانهن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.
(ii) $\overline{OD} \cong \overline{OE}$	
(iii) $\overline{OE} \cong \overline{OF}$	(i) ۽ (ii) مان
تنهنڪري A جو اڌ ڪنڈ ٽڀڪون آهي.	
$\angle ABC$ ۽ $\angle BCA$ جو پن اڌ ڪنڈ ٽڀڪون 0 آهي.	مليل
تنهنڪري $\angle A$، $\angle B$ ۽ $\angle C$ جا اڌ ڪنڈ هڪ ٽڀڪي تي هوندا آهن.	

Q.E.D

مشق 11.3

1. ٻٽ ٻپور پاسي ٽڪنڊن جا بنياد مشترڪ آهن، ثابت ڪريو ته انهن جي چوٽين کي ملائيندڙ ليڪ، مشترڪ بنياد کي گوني ڪنڊ ۾ اڌواڌ ڪندي.
2. ٽڪنڊي جي ڪنڊن جا اڌواڌ ڪنڈ آمهون سامهون وارن پاسن کي به اڌواڌ ڪندا. ثابت ڪريو ته ٽڪنڊو ٻپور پاسو آهي.
3. ٻپور پاسي ٽڪنڊي ABC ۾ $\Delta ABC, m\overline{AB} = m\overline{AC}$ آهي. ثابت ڪريو ته B ۽ C چوٽين کان سامهون پاسن سان ٺهندڙ عمود برابر آهن.
4. ٽڪنڊي جو مڌيان هڪ ليڪ ٽڪر آهي. جيڪو پاسي کي مخالف چوٽي سان ملائي ٿو. ثابت ڪريو ته ٽپور پاسي ٽڪنڊي جا مڌيان يڪسان آهن.

ورجايل مشق 11

1. ثابت ڪريو تہ جيڪڏهن ٽڪنڊي جا ٻہ عمود يڪسان آهن تہ ٽڪنڊو ٻپور پاسو آهي.
2. ثابت ڪريو تہ ٽڪنڊي جو اندرپونٽبڪو ٽنهي پاسان ڪان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي، اهو ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جي اڏڪندڙ تي آهي.
3. هيٺين بيانن جي سامهون درست لاءِ (T) ۽ غلط لاءِ (F) لکو.

(i) پاسن جو اڏواڏ ڪرڻ جو مطلب آهي تي اسان ڏنل پاسي کي ٻن حصن ۾ تقسيم ڪيو.

(ii) ٻپور پاسي گهني ڪنڊ ٽڪنڊي جي بنياد جي هرهڪ ڪنڊ 45 جي آهي.

(iii) يڪسان پاسن وارن ٽڪنڊن جون ڪنڊون بہ يڪسان هونديون.

4. صحيح جواب جي چونڊ ڪريو.

(i) سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ _____ سوڙهيون ڪنڊون آهن.

(a) هڪ (b) ٻہ (c) ٽي (d) ڪا بہ نہ

(ii) ليک ٽڪر تي هڪ ٽبڪو جيڪو ان جي ٻنهي ڇيڙن ڪان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي اهو ان جو _____ آهي.

(a) عمودي اڏ ڪندڙ (b) عمودي

(c) مرڪز (d) وچ وارو ٽبڪو

(iii) ڪنهن سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊي جي پاسن جو _____ ٽڪنڊي جي اندر هڪ هڪ کي ڪپيندو.

(a) عمود (b) عمودي اڏ ڪندڙ

(c) ويڪري (d) سوڙهي

(iv) ٽڪنڊي جي ڪنڊن جا اڏ ڪندڙ آهن _____.

(a) هم ٽبڪا (b) هموار

(c) ڪو نہ ڪيندا (d) غير برابر

خلاصو

- ليڪ ٽڪر جو اڌ و اڌ ڪندڙ، ليڪ ٽڪر کي ٻن برابر حصن ۾ تقسيم ڪندو آهي.
- عمودي اڌ ڪندڙ ليڪ ٽڪر کي 90 تي ٻن برابر حصن ۾ ڪپين ٿا.
- ڪنهن ليڪ جي عمودي اڌ ڪندڙ تي موجود ٽپڪو، انهيءَ ليڪ ٽڪر جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندو آهي.
- ليڪ ٽڪر تي ڪو به ٽپڪو جيڪو ان جي ٻنهي ڇيڙن کان هڪ جيتري مفاصلي تي آهي، اهو ان جو عمودي اڌ ڪندڙ هم ٽپڪا آهن.
- ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ هم ٽپڪا آهن.
- ڪنهن به ڪنڊ کي اڌ و اڌ ڪندڙ ليڪ تي موجود ٽپڪو انهيءَ ڪنڊ جي ٻانهن تي هڪ جيتري مفاصلي تي آهي.
- ڪنهن به ڪنڊ ۾ موجود اندريون ٽپڪو، ان جي ٻانهن کي هڪ جيتري مفاصلي تي هجي ته اهو ان جو اڌ ڪندڙ آهي.
- ٽڪنڊي جي ڪنڊن کي اڌ ڪندڙ ساڳي ٽپڪي مان گذرندا آهن.

يونٽ 12

ٽڪنڊن جا پاسا ۽ ڪنڊون

SIDES AND ANGLES OF A TRAINGLE

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي مطالعي کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جا ٻه پاسا ڏيگهه ۾ برابر نه هجن ته وڏيڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ جو مقدار وڏيڪ هوندو.
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جون ٻه ڪنڊون ماپ ۾ برابر نه هجن ته وڏي ڪنڊ جي سا مهون وارو پاسو، ننڍي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي کان وڏو ٿيندو.
- ٽڪنڊي جي ڪن ٻه ٻن پاسن جي ڏيگهه جي ماپ، ٽئين پاسي جي ڏيگهه کان وڏيڪ هوندي آهي.
- ڪنهن ٽڪي کان جيڪو ليڪ کان ٻاهر هجي، ليڪ تا ئين عمود سڀ جو کان گهٽ مفاصلو ٿيندو.

تعارف:

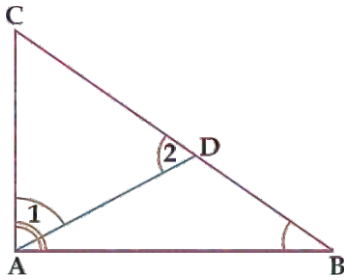
هن يونٽ ۾ اسان ٽڪنڊي جي پاسن ۽ ڪنڊن سان تعلق رکندڙ سڌيان، انهن جا شامل نتيجن بابت پڙهندا سين ۽ انهن سان تعلق ڏسندڙ حساب پڻ حل ڪنداسين.

12.1 ٽڪنڊي جا پاسا ۽ ڪنڊون

سڌيان 12.1.1

ثابت ڪريو ته:

جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جا ٻه پاسا ديگهه ۾ برابر نه هجن، ته وڏيڪ ديگهه واري پاسي جي سامهون واري ڪنڊ جو مقدار وڏيڪ هوندو.



مليل: ΔABC ۾ $m\overline{BC} > m\overline{AC}$

گهربل: $m\angle A > m\angle B$

جوڙ جڪ: $\overline{BC}$ مان $\overline{CD}$ کي $\overline{AC}$ جي يڪسان ڪٽيو ۽ ٽڻڪي A کي D سان ملايو.

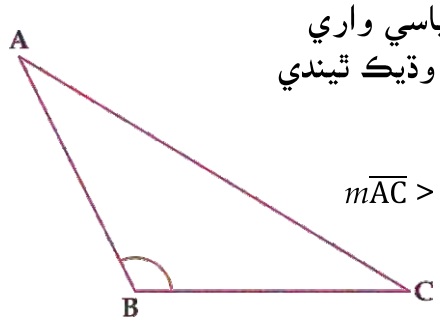
ثابتي:

بيان	سبب / دليل
ΔACD ۾ $\overline{AC} \cong \overline{CD}$	جوڙجڪ
$\therefore m\angle CAD = m\angle CDA$	يڪسان پاسا،
پَرَ $\angle ACD$ ٽڪنڊي ABD جي ٻاهرين ڪنڊ آهي	ٻاهرين ڪنڊن جي وصف مطابق
$\therefore m\angle CDA > m\angle B$	ٻاهرين ڪنڊ، غير پرواري ڪنڊ کان وڏي ٿيندي.
پَرَ $m\angle A > m\angle CAD$	$\therefore m\angle A = m\angle CAD + m\angle DAB$
$\therefore m\angle A > m\angle CDA$	$\therefore m\angle CAD = m\angle CAD$
$\therefore m\angle A > m\angle B$	نا برابري واري متعدي خاصيت

Q.E.D

هيٺيان مثال متئين سڌيان کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

ثابت ڪريو ته اٽپور پاسي تڪنڊي ۾ وڏي پاسي واري سامهون ڪنڊ جي ماپ $60°$ کان وڌيڪ ٿيندي

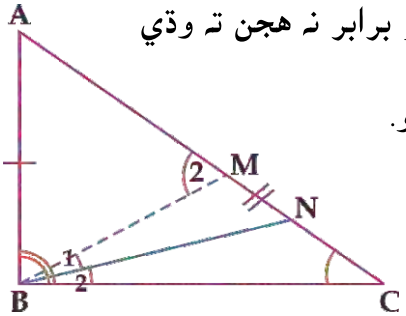


مليل: تڪنڊو ABC ۾ $m\overline{AC} > m\overline{AB}$ ۽ $m\overline{AC} > m\overline{BC}$.

گهربل ثابتي: $m\angle B > 60^0$

بيان	سبب / دليل
تڪنڊي ABC ۾	
اسان کي $m\angle B > m\angle C$	مليل $m\overline{AC} > m\overline{BC}$, $m\overline{AC} > m\overline{AB}$
۽ $m\angle B > m\angle A$	$\angle A, \angle B$ ۽ $\angle C$ تڪنڊي ABC جون ڪنڊون آهن
پَر $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$	
$\therefore$ $m\angle B + m\angle B + m\angle B > 180^0$	$m\angle B > m\angle C$ and $m\angle B > m\angle A$ جوڙ ڪرڻ سان
$3\, m\angle B > 180^0$	3 سان وندِ ڪرڻ سان
$= \quad m\angle B > \frac{180^0}{3}$	
ته پوءِ $m\angle B > 60^0$	

Q.E.D



ثابت ڪريو تہ جيڪڏهن ٽڪنڊي جون بہ ڪنڊون ماپ ۾ برابر نہ هجن تہ وڏي ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو، ننڍي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي کان وڏو ٿيندو.

مليل: ٽڪنڊي ABC ۾ $m\angle B > m\angle C$

گهربل: $m\overline{AC} > m\overline{AB}$

جوڙجڪ: $\angle ABM$ کي $\angle C$ سان يڪسان ڪرڻ لاءِ، $\angle MBC$ جواڻ ڪنڊ $\overline{BN}$، ناهو تہ جيئن $m\angle 1 = m\angle 2$

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
$\angle ANB$ ٻاهرين ڪنڊ آهي ΔCBN $\therefore$ تہ پوءِ	ٻاهرين ڪنڊ جي وصف مطابق
$m\angle ANB = m\angle C + m\angle 2$	
$= m\angle C + m\angle 1$	$\therefore m\angle 2 = m\angle 1$ جوڙجڪ
$= m\angle ABM + m\angle 1$	$\therefore m\angle C = m\angle ABM$ جوڙجڪ
$= m\angle ABN$	ڪنڊن کي جوڙ جو موضوع
$\therefore \overline{AB} \cong \overline{AN}$	$\therefore m\angle ANB = m\angle ABN$ مٿي ثابت ٿيل
$\therefore m\overline{AC} > m\overline{AB}$	$\therefore m\overline{AC} > m\overline{AN}$

Q.E.D

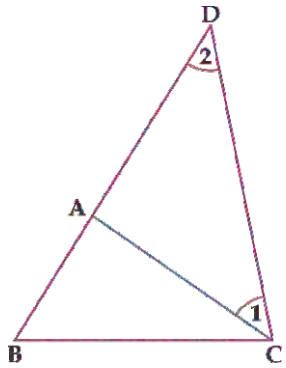
شامل نتيجا:

(1) گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جو هيبا ٿي*** باقي ٻين هر هڪ پاسن کان وڏو هوندو آهي.

(2) ويڪري ڪنڊ ٽڪنڊي ۾، ويڪري ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو ٻين پاسن مان هر هڪ کان وڏو هوندو آهي.

سڌيان 12.1.3

ٽڪنڊي جي ڪن به بن پاسن جي ڊيگهه جي ماپ اٽئين پاسي جي ڊيگهه کان وڌيڪ هوندي آهي.



مليل: ٽڪنڊو ABC

گهربل:

i) $m\overline{AB}+m\overline{AC}>m\overline{BC}$

ii) $m\overline{AB}+m\overline{BC}>m\overline{CA}$

iii) $m\overline{AC}+m\overline{BC}>m\overline{AB}$

جوڙجڪ: BA کي D تپڪي تائين اهڙي طرح وڌايو جو $\overline{AD}\cong\overline{AC}$ ۽ $\overline{DC}$ ناهيو

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
ٽڪنڊي ADC ۾ $\overline{AD}\cong\overline{AC}$	جوڙجڪ
$\therefore m\angle 1=m\angle 2$	يڪسان پاسن جي سامهون واريون ڪنڊو
پر $m\angle BCD>m\angle 1$	$m\angle BCD=m\angle BCA+m\angle 1$
$\therefore m\angle BCD>m\angle 2$	نا برابري واري متعدي خاصيت
تنهنڪري ΔBDC ۾ $m\overline{BD}>m\overline{BC}$	وڏي ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو وڏو ٿيندو
پر $m\overline{BD}=m\overline{AB}+m\overline{AD}$	جوڙجڪ مطابق
$=m\overline{AB}+m\overline{AC}$	
$\therefore m\overline{AB}=m\overline{AC}>m\overline{BC}$	$\overline{BD}$ جي قيمت رکڻ سان
ساڳي طرح اسان ثابت ڪري سگهان ٿا ته	
$m\overline{AB}+m\overline{BC}>m\overline{AC}$ ۽ $m\overline{BC}+m\overline{AC}>m\overline{AB}$	مٿئين طريقي ڪار مطابق

Q.E.D

هيٺيان مثال مٿي ڏنل سڌيان کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندو.

مثال 1: هيٺين مان، ڪهڙا ڊيگهن جا ڏنل سيٽ ٽڪنڊو ناهيندا:

(i) 3 س. م، 4 س. م ۽ 5 س. م

(ii) 4س. م، 5 س. م ۽ 4.5 س. م

(iii) 60 م. م، 80 م. م ۽ 10 س. م

(iv) 3 س. م، 4 س. م ۽ 10 س. م

حل: (i) 3 س. م ، 4 س.م ۽ 5 س.م

جيئن ته $3 + 4 > 5$, $3 + 5 > 4$ ۽ $4 + 5 > 3$ ته پوءِ

ان پاسن جو جوڙ ٿي پاسي جي جوڙ کان وڏيڪ آهي.

ڏنل ڊيگهه جو سيٽ هڪ ٽڪنڊو ناهيندو

(ii) 4 س.م ، 5 س.م ۽ 4.5 س.م

جئين ته $4 + 5 > 4.5$, $5 + 4.5 > 4$ ۽ $4.5 + 3 > 4$ ته پوءِ

ڏنل ڊيگهه جو سيٽ هڪ ٽڪنڊو ناهيندو.

(iii) 60 م.م، 80 م.م ۽ 10 س.م

جيئن ته 10 = 1 س.م تنهنڪري 60 م م = 6 س.م ۽ 80 م م = 8 س.م

هاڻ $6 + 8 > 10$, $6 + 10 > 8$ ۽ $8 + 10 > 6$ ته پوءِ

ڏنل ڊيگهه جو سيٽ هڪ ٽڪنڊو ناهيندو.

مثال 2: متين سڌيان کي ذهن ۾ رکي فيصلو ڪريو ته ڪهڙا ڊيگهن جا سيٽ ٽڪنڊو ناهيندا.

(i) 2 س. م ، 4 س.م ۽ 7 س.م (ii) 5.5 س.م ، 5 س.م ۽ 9.5 س.م

حل: (i) 2 س. م ، 4 س.م ۽ 7 س.م

جيئن ته $2 + 4 < 7$, $4 + 7 > 2$ ۽ $7 + 2 > 4$

هن قسم جي ڊيگهه جو سيٽ ٽڪنڊو نٿو ناهي سگهي.

(ii) 5.5 س.م ، 5 س.م ۽ 9.5 س.م

جيئن ته $5.5 + 5 > 9.5$, $5 + 9.5 > 5.5$ ۽ $9.5 + 5.5 > 5$ ته پوءِ

ڏنل ڊيگهه وارو سيٽ ٽڪنڊو ناهي سگهي ٿو

سرگرمي

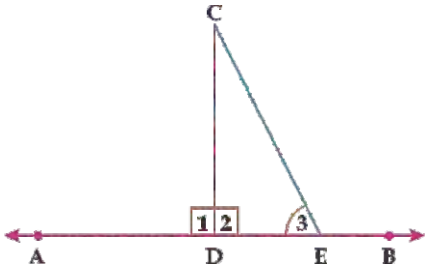
جيڪڏهن $a = 3$ cm

$b = 4$ cm

$c = 5$ cm

ته پوءِ ΔABC ناهي سگهبو يا نه

سڌيان 12.1.4 ڪنهن ٽڪي کان جيڪو ليڪ کان ٻاهر هجي، ليڪ تائين عمود سڀ کان گهٽ مفاصلو ٿيندو.



مليل: ٽڪي C کان $\overline{CD}$ ، ليڪ AB تي هڪ عمود ڪڍيو ويو آهي. جيڪو D ٽڪي تي ملي ٿو.

۽ $\overline{CE}$ هڪ ٻيو ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ کي ٽڪي E تي ملي ٿو

گهربل: $m\overline{CD} < m\overline{CE}$

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
$\angle 1$, ΔCDE جي ٻاهرين ڪنڊ آهي	ٻاهرين ڪنڊ جي وصف مطابق.
$\therefore m\angle 1 > m\angle 3$	ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ، سامهون واري اندرين ڪنڊ کان وڏي هوندي آهي.
$m\angle 1 = m\angle 2$	(هرهڪ گوني ڪنڊ آهي)
$\therefore m\angle 2 > m\angle 3$	وڏي ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو وڏو ٿيندو آهي.
$\therefore m\overline{CE} > m\overline{CD}$	مٿين طريقي ڪار سان
ساڳي طرح اهو ثابت ڪري سگهجي ٿو ته mCD جي ڊيگهه نندي ٿيندي ڪنهن به ٻي ليڪ تڪر کان، جيڪو C کان $\overleftrightarrow{AB}$ تائين ڪڍيو ويندو.	

Q.E.D

شامل نتيجو:

1. ڪنهن ليڪ تي ٽڪي ۽ ليڪ وچ ۾ مفاصلو ٻڌي آهي.

مشق 12.1

1. ٽڪنڊي ABC جو اندريون ٽڻڪو O آهي.

ثابت ڪريو ته $m\overline{OA}+m\overline{OB}+m\overline{OC}>\frac{1}{2}(m\overline{AB}+m\overline{BC}+m\overline{CA})$

2. ٽڪنڊي ABC ۾ $m<B=70^0$ ۽ $m<C=45^0$ آهي. ٽڪنڊي جو ڪهڙو پاسو وڏي ۾ وڏو ٿيندو؟

ورجايل مشق 12

1. صحيح ۽ غلط بيانن تي (✓) ٽڪ ڪريو.

(i) ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جو جوڙ ٽي پاسي کان وڏو ٿيندو آهي. T/F

(ii) ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي ڪٽ، ٽي پاسي کان وڌيڪ ٿيندي آهي. T/F

(iii) ليک جو ٻاهريون ٽڻڪو ٽهڪندڙ (coincident) آهي يا اها ليک آهي. T/F

(iv) گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي وڏي ۾ وڏي ڪنڊ 100° جي آهي. T/F

(v) ڪنهن ليک تي عمود هميشه 90° جي ڪنڊ ناهيندو. T/F

2. خال ڀري جملن کي درست ڪريو.

(i) ڪنهن گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي _____ وڏو پاسو آهي.

(ii) ڪنهن ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ گوني ڪنڊ واري پاسن جو جوڙ _____ آهي. هئباٽينيوز جي ماپ کان.

(iii) ٽڪنڊي ABC ۾ $m\angle A = 50^o$ ۽ $m\angle B = 30^o$ ته _____ پاسو وڏو ٿيندو باقي اهنن جي ٻين پاسن کان.

(iv) چوڪنڊي جي اريب جي ڊيگهه _____ آهي. ان جي ڀرواري پاسن جي جوڙ کان.

3. صحيح جواب تي (✓) ڪريو.

(i) ٽيپور پاسي ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي ماپ 6 س م آهي ته پوءِ ان جي مڌيان جي ماپ _____ ٿيندي 9 س م ڪان:

(a) گهٽ (b) وڌيڪ (c) برابر (d) ڪو به نه

(ii) مستطيل جي گهيري جي ماپ 22 س م آهي ته ان جي اريب جي ڊيگهه _____ ٿيندي 11 س م ڪان.

(a) برابر (b) وڌيڪ (c) گهٽ (d) ڪو به نه

اختصار Summary

- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جا ٻه پاسا ڊيگهه ۾ برابر نه هجن ته وڏيڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ جو مقدار وڏيڪ هوندو.
- جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جون ٻه ڪنڊون ماپ ۾ برابر نه هجن ته وڏي ڪنڊ جي سامهون واروپاسو، ننڍي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي کان وڏو ٿيندو.
- ٽڪنڊي جي ڪنڊ ٻه ٻن پاسن جي ڊيگهه جي ماپ ٽئين پاسي جي ڊيگهه کان وڏيڪ هوندي آهي.
- ڪنهن ٽڪي کي جيڪو ليڪ کان ٻاهر هجي، ليڪ تائين عمود جو سڀ کان گهٽ مفاصلو ٿيندو.

يونٽ 13

عملي جاميٽري (ٽڪنڊن) جي

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي مطالعي کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- ٽڪنڊو ٺاهيندا جن ۾ مليل هجن
  - بہ پاسا ۽ وچ واري ڪنڊ
  - هڪ پاسو ۽ بہ ڪنڊون
- بہ پاسا ۽ ڪنڊ، ڪنهن بہ هڪ پاسي جي سامهون واري (سيني، ٽنهي ممڪن ماپن سان)ٺاهيو:
  - ڪنڊ جو اڌ ڪنڊڙ
  - عمود
  - عمودي اڌ ڪنڊڙ
  - ٽڪنڊي جا مڌيان ۽ انهن جي هم ٽپڪو جي چڪاس
- ڏنل چوڪنڊي جي ايراضي جي برابر ٽڪنڊو ٺاهيو
- مليل ٽڪنڊي جي ايراضي جي برابر مستطيل ٺاهيو
- مليل مستطيل جي ايراضي جي برابر چورس ٺاهيو
- مساوي ايراضي جو ٽڪنڊو ڏنل ڏيگهہ واري بنياد تي ٺاهيو

13.1 تڪنڊي جي بناوٽ

13.1.1هڪ تڪنڊو ناهيو جنهن ۾ مليل هجي

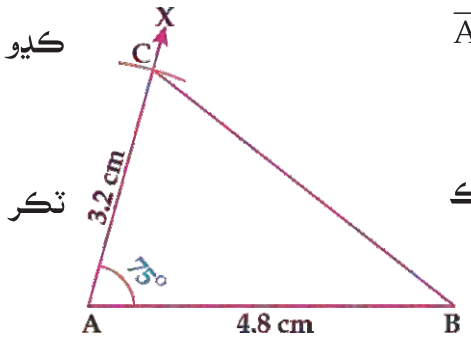
- ٻہ پاسا ۽ وچ واري ڪنڊ
- هڪ پاسو ۽ ٻہ ڪنڊون
- ٻہ پاسا ۽ ڪنهن ٻہ هڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ. سيني ممڪن (تنهي) ماپن سان

جتهن ٻہ پاسا ۽ وچ واري ڪنڊ مليل هجن.

مثال تڪنڊو ABC ناهيو جنهن ۾

$m\overline{AB} = 4.8$ س م، $m\overline{AC} = 3.2$ س م ۽ $m\angle B = 75°$

جوڙجڪ:



(i) 4.8 سينٽي ميٽر ڊگهو ليک تڪر $\overline{AB}$ ڪيو

(ii) ٽپڪي A کي چوٽي طور وٺي 75° ماپ واري ڪنڊ XAB ناهيو.

(iii) $\overline{AX}$ مان 3.2 سينٽي ميٽر ڊگهو ليک تڪر $\overline{AC}$ ڪيو.

(iv) $\overline{BC}$ ناهيو.

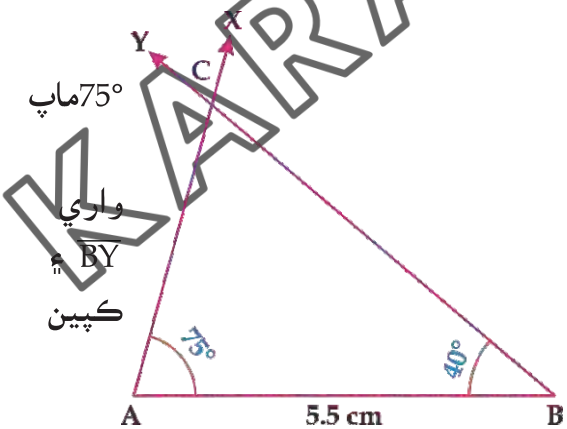
گهربل تڪنڊو ΔABC نهي پيو.

When one side and two angles are given.

مثال 01 تڪنڊو ΔABC ناهيو جنهن ۾

$m\overline{AB} = 5.5$ س م، $m\angle A = 75°$ ۽ $m\angle B = 40°$

جوڙجڪ:



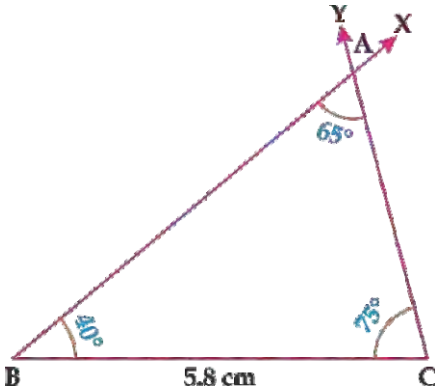
(i) 5.5 س م ڊگهو ليک تڪر ڪيو

(ii) ٽپڪي A کي چوٽي طور وٺي 75°ماپ واري ڪنڊ XAB ناهيو

(iii) ٽپڪي B کي چوٽي وٺي 40° ماپ ڪنڊ YBA اهڙي طرح ناهيو جو $\overline{AX}$ هڪبئي کي ٽپڪي C تي ڪپين ABC گهربل تڪنڊو آهي.

مثال 02 تڪنڊو ABC ناهيو جنهن ۾

$m\angle A = 65°$ س ۾، $m\angle B = 40°$ ۽ $m\overline{BC} = 5.8$ س م



جوڙجڪ: اسان کي خبر آهي ته تڪنڊي ABC ۾

$m\angle A + m\angle B + m\angle B = 180°$

هتي $m\angle A = 65°$ and $m\angle B = 40°$ ته پوءِ

$m\angle C = 180° - (m\angle A + m\angle B)$

$= 180° - (65° + 40°)$

$= 180° - 105°$

$= 75°$

هاڻ اسان اهڙو تڪنڊو ناهينداسين جنهن ۾

$m\overline{BC} = 5.8$ س م، $m\angle B = 40°$ ۽ $m\angle C = 75°$ آهي.

(i) 5.8 س م ڊگهو ليک تڪر $\overline{BC}$ ڪيو

(ii) تبڪي B کي چوٽي طور وٺي 40° ماپ واري ڪنڊ XAB ناهيو.

(iii) تبڪي C کي چوٽي طور وٺي ڪنڊ $m\angle YCB = 75°$ ناهيو

(iv) $\overline{BX}$ ۽ $\overline{CY}$ شعاع هڪبئي کي A وٽ ڪپين ٿا.

اهڙي ريت ABC گهربل تڪنڊو آهي.

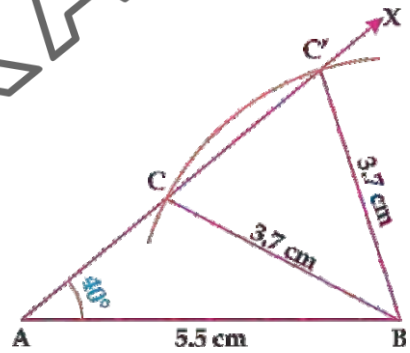
به پاسا ۽ ڪنهن به هڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ (سيني تنهي صورتن ۾)

صورت I:

مثال 01 تڪنڊو ABC ناهيو جنهن ۾

$m\overline{BC} = 3.7$ س م $m\overline{AB} = 5.3$، س م ۽ $m\angle A = 40°$

جوڙجڪ:



(i) 5.3 س م ڊگهو ليک تڪر $\overline{AB}$ ڪيو

(ii) تبڪي A کي چوٽي طور وٺي $\angle BAX$ ناهيو جنهن جي ماپ $40°$ هجي.

(iii) تبڪي B کي مرڪز وٺي 3.7 س م جيترو هڪ قوس ڪيو. جيڪو $\overline{AX}$ کي C ۽ C′ تبڪن تي ڪٽي.

(iv) $\overline{BC}$ ۽ $\overline{BC'}$ ناهيو.

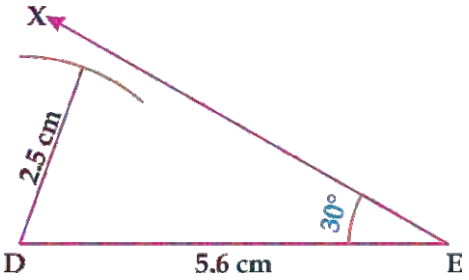
به تڪنڊا ABC′ ۽ ABC گهربل تڪنڊ آهن.

صورت II:

مثال 02 تڪنڊو DEF ناهيو جنهن ۾

$m\overline{DE} = 5.6$ س م ، $m\overline{DF} = 2.5$ س م ۽ $m\angle E = 30°$

جوڙجڪ:



(i) 5.6 س م ڊگهو ليڪ تڪر $\overline{DL}$ ناهيو.

(ii) 30° ماپ واري ڪنڊ DEX ڪيو.

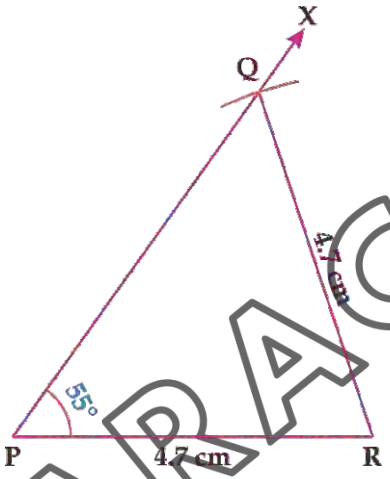
(iii) ٽپڪي D کي چوٽي طور وٺي 2.5 س.م رداس جيترو قوس ڪيو. جيڪو $\overline{LX}$ کي ڪٽهن ٽپڪي تي نه ٽوڪيي. هن صورت ۾ ڏنل ماپن وارو ڪوبه تڪنڊو نه ٿو ناهي سگهجي

صورت III:

مثال 03 تڪنڊو PQR ناهيو جنهن ۾

$m\overline{PR} = m\overline{QR} = 4.7$ س.م ۽ $m\angle P = 55°$

جوڙجڪ:



(i) 4.7 س.م ڊگهو ليڪ تڪر $\overline{PR}$ ناهيو.

(ii) 55° ماپ واري ڪنڊ XPR ناهيو.

(iii) ٽپڪي R کي چوٽي طور وٺي 4.7 س.م رداس جيترو هڪ قوس ڪيو، جيڪو $\overline{PX}$ کي ٽپڪي Q وٽ ڪٽي

(iv) ٽپڪن Q ۽ R کي ملايو.

ΔPQR گهربل تڪنڊو آهي.

نوٽ: مٿيون صورتون I ، II ۽ III مبهم صورتون آهن

مشق 13.1

1. تڪنڊو PQR. ناهيو جنهن ۾ $m\angle Q = 35°$ ۽ س.م، $m\overline{PQ} = m\overline{QR} = 4.6$
2. تڪنڊو ABC ناهيو جنهن ۾ $m\angle A = 65°$ ۽ س.م، $m\overline{AB} = m\overline{AC} = 5.1$
3. تڪنڊو LMN ناهيو جنهن ۾ $\angle M = 50°$ ۽ س.م، $m\overline{MN} = 2.5$ س.م، $m\overline{LM} = 3.7$
4. تڪنڊو ABC ناهيو جنهن ۾ $\angle B = 110°$ ۽ س.م، $m\overline{BC} = 2.7$ س.م، $m\overline{AB} = 3.5$
5. تڪنڊو XYZ ناهيو جنهن ۾ $\angle Z = 80°$ ۽ س.م، $m\overline{YZ} = 5$ س.م، $m\overline{XY} = 4.1$

6. هيٺيان تڪنڊا ΔABC ۽ $\Delta DEF, \Delta LMN$ ناهيو.

(i) $m\overline{DE} = 5cm, m\angle D = 45°$ and , $m\angle E = 60°$

(ii) $m\overline{LM} = 6cm, m\angle L = 75°$ and , $m\angle M = 45°$

$m\overline{BC} = 5.8cm, m\angle A = 30°$ and , $m\angle B = 45°$

7. تڪنڊو ABC ناهيو جڏهن ان جي ٻن پاسن جي ماپ ۽ هڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ جي ماپ مليل هجي.

(i) $m\overline{AC} = 4.5cm, m\overline{BC} = 4.1cm$ and $m\angle B = 75°$

(ii) $m\overline{BC} = 5cm, m\overline{AB} = 5.5$ cm and $m\angle C = 70°$

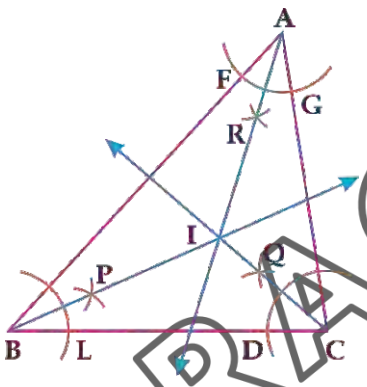
(iii) $mAB = 5cm, m\overline{BC} = 5.5cm$ and $m\angle A = 45°$

13.1.2: ناهيو

- ڪنڊ جا اڌ ڪنڊ
- عمود
- عمود جا اڌ ڪنڊ
- مڌيان

(i) ڏنل تڪنڊي جي ڪنڊ جا اڌ ڪنڊ ناهيو.

مثال تڪنڊي ΔABC جي ڪنڊن جا اڌڪنڊ ڪڍو.



مليل: ABC هڪ تڪنڊو آهي ۽ $\angle A, \angle B, \angle C$ ان جون ڪنڊون آهن.

گهربل: $\angle A, \angle B$ ۽ $\angle C$ جا اڌ ڪنڊ ڪڍڻ.

جوڙجڪ:

(i) تڪنڊو ABC ناهيو.

(ii) ٽپڪي B کي مرڪز وٺي مناسب رداس وارو قوس ڪڍو، جيڪو $\overline{BC}$ ۽ $\overline{BA}$ کي ٽپڪن L ۽ M تي ڪپي.

(iii) ٽپڪي L کي مرڪز وٺي مناسب رداس جو قوس ڪڍو.

(iv) هان ٽپڪي M کي مرڪز وٺي مناسب رداس جو قوس ڪڍو جيڪو قوس کي P ٽپڪي تي ڪپي.

(v) P ۽ B کي ملائي $\overline{BP}$ ناهيو.

(vi) قدم (ii) کان (v) تائين ورجائي، $\overline{AR}$ ۽ $\overline{CQ}$ ناهيو جيڪي ترتيبوار $\angle A$ ۽ $\angle C$ جا اڌ ڪنڊ آهن.

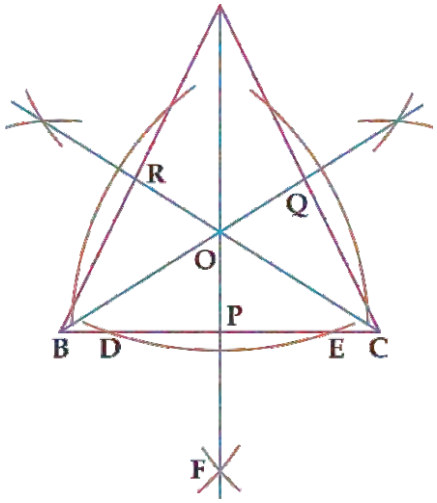
(ii) ڏنل تڪنڊي جا عمودي ناهيو.

مثال ڪوبہ تڪنڊو ABC وٺو ۽ ان جا عمود ناهيو.

مليل: تڪنڊو ABC

گهربل: تڪنڊي ABC جا عمود ڪڍڻ

جوڙجڪ:



(i) تڪنڊو ABC ڪڍو.

(ii) ٽپڪي A کي مرڪز وٺي مناسب رداس سان وڏو قوس ڪڍو. جيڪو $\overline{BC}$ کي ٽپڪن D ۽ E وٽ ڪپي.

(iii) ٽپڪي D کي مرڪز وٺي $\overline{DE}$ جي ماپ جي اڌ کان وڌيڪ جيتري رداس جو قوس ڪڍو.

(iv) وري ٽپڪي E کي مرڪز وٺي $\overline{BC}$ جي ٻاهرين پاسي رداس سان هڪ ٻيو قوس ڪڍو جيڪو پهرين قوس کي ٽپڪي F تي ڪپي.

(v) ٽپڪن A ۽ F کي ملائيو. اهڙي طرح $\overline{AF}$ ۽ $\overline{BC}$ کي ٽپڪ P وٽ ڪپي تہ $\overline{AP}$ تڪنڊي ABC جي چوٽي A کان هڪ عمود ٿهي پيو.

(vi) ساڳي طرح قدم (ii) کان (v) دهرايو $\overline{BQ}$ ۽ $\overline{CR}$, ناهيو جيڪي چوٽين B ۽ C کان تڪنڊي ABC جي رهيل پاسن تي عمود آهن.

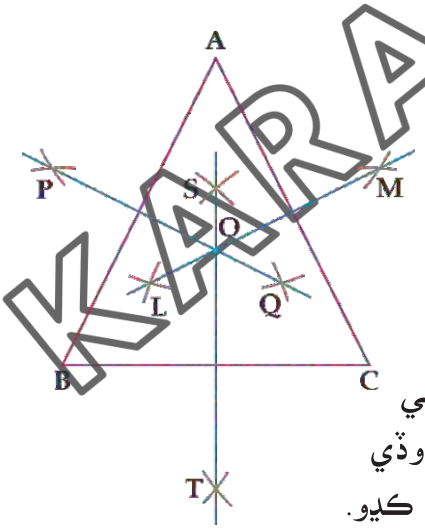
(iii) ڏنل تڪنڊي جي عمود جا اڌ ڪنڊ ناهيو.

مثال تڪنڊي ABC جا عمودي اڌ ڪنڊ ڪڍو.

مليل: هڪ تڪنڊو ABC

گهربل: تڪنڊي جي پاسن $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ۽ $\overline{CA}$ جا عمودي اڌ ڪنڊ ڪڍڻ.

جوڙجڪ: (i) تڪنڊو ABC ناهيو



(ii) پاسي $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪنڊ ڪڍڻ لاءِ ٽپڪي B کي مرڪز وٺي $\overline{AB}$ جي ماپ جي اڌ کان وڏي رداس سان $\overline{AB}$ جي ٻنهي طرفن ڏانهن قوس ڪڍو.

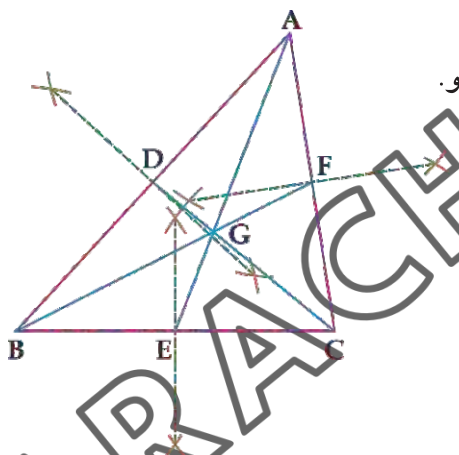
(iii) هاڻ ٽبڪي A کي مرڪز وٺي ساڳي رداس سان $\overline{AB}$ جي ٻنهي طرفن ڏانهن قوس ڪڍو، جيڪي اڳ ۾ ڪڍيل قوسن کي ٽبڪن P ۽ Q تي ڪٽين ٿا.

(iv) P ۽ Q کي ملايو. $\overline{PQ}$ جيڪو $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ آهي.

(v) قدم (ii) کان (iv) کي $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AC}$ لاءِ ورجايو ته $\overline{ST}$ ۽ $\overline{LM}$ ٻه ٽڪرا ملندا جيڪي $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AC}$ جا ترتيبوار عمودي اڌ ڪندڙ آهن.
اهڙي طرح $\overline{ST}$ ۽ $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{LM}$ گهربل عمودي اڌ ڪندڙ آهن.

(iv) ٽڪنڊي جا مڊيان ڪڍو.

مثال



مثال ڪو به ٽڪنڊو وٺي، ان ٽڪنڊي جا مڊيان ناهيو.

مليل: ٽڪنڊو ABC

گهربل: ٽڪنڊي ABC جا مڊيان ڪڍڻ.

جوڙجڪ:

(i) ٽڪنڊو ABC ناهيو.

(ii) پاسن $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AC}$ جا وچيان ٽبڪا D,E ۽ F تي ترتيبوار لهو.

(iii) A کي E سان، B کي F سان ۽ C کي D سان ملايو.
ته جيئن $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ ۽ $\overline{CD}$ مليل ٽڪنڊي ABCجا مڊيان آهن جيڪي هڪ ٻئي کي ٽبڪي G تي ڪپين ٿا.
اهو معلوم ٿيو ته هر ٽڪنڊي جا مڊيان ساڳي ٽبڪي تي ملن ٿا ۽ انهن جي ملاپ جي ٽبڪي کي (Centroid) چئبو آهي. يعني هر مڊيان 2:1 ۾ ورهائجي وڃي ٿو.
اصل ماپ سان اهو ثابت ڪري سگهجي ٿو ته

$$\frac{m\overline{AG}}{m\overline{GE}} = \frac{m\overline{BG}}{m\overline{GF}} = \frac{m\overline{CG}}{m\overline{GD}} = \frac{2}{1}$$

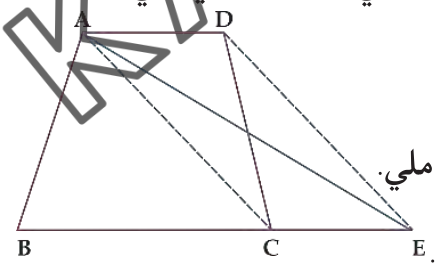
مشق 13.2

1. هڪ تڪنڊو ڪٿو ۽ ان جا مڌيان ناهيو. ثابت ڪريو تہ اهي ساڳي تبڪي تي ملن ٿا.
2. هڪ تڪنڊو ڪٿو ۽ ان جا عمود ناهيو. ثابت ڪريو تہ اهي ساڳي تبڪي تي ملن ٿا.
3. هڪ تڪنڊو ڪٿو ۽ ان جا اندريان ڪنڊن جا اڏڪندڙ ناهيو ۽ ثابت ڪريو تہ اهي ساڳي تبڪي تي ملن ٿا.
4. تڪنڊو ABC ناهيو جنهن ۾ $m\overline{BC}=6$ س.م، $m\overline{CA}=4$ س.م، $m\overline{AB}=5$ س م ان جي ڪنڊن A ۽ B جا اڏڪندڙ ناهيو.
5. تڪنڊو PQR ناهيو جنهن ۾ $m\overline{PQ}=5.7$ س.م $m\overline{QR}=6.4$ س.م ۽ $m\overline{PR}=4.4$ س.م آهي، ان جي چوٽي R ۽ Q کان عمود ناهيو.
6. تڪنڊو $m\overline{TU}=7$ ناهيو جنهن ۾ س م $\angle U=30°$ س م $\angle T=60°$ ۽ ABC سم تہ تڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڏ ڪندڙ ناهيو ۽ ثابت ڪريو تہ اهي ساڳي تبڪي تي ملن ٿا.
7. گوني ڪنڊ تڪنڊو $\angle B=45°$ ناهيو، جنهن ۾ $\angle C=90°$ $m\overline{CB}=5$ س م ۽ ان جا مڌيان ناهيو.
8. تڪنڊو ΔXYZ ناهيو، ان جا ٽيئي مڌيان ناهي ثابت ڪريو تہ اهي هم تبڪا آهن.
   (i) $m\overline{YZ}=4.4cm$, $m\angle Y=45°$ and $m\angle Z=75°$
   (ii) $m\overline{XY}=4.6cm$, $m\overline{XZ}=4.6cm$ and $m\angle Y=60°$
9. تڪنڊو ΔKLM ناهيو، جنهن ۾ $m\overline{KL}=4.8$ س.م $m\overline{LM}=5.2$ س.م ۽ $m\overline{MK}=4.5$ س.م ان جا عمود ناهي انهن جو هم تبڪي تي ملڻ جي چڪاس ڪريو.

13.2 برابر ايراضي واريون شڪليون

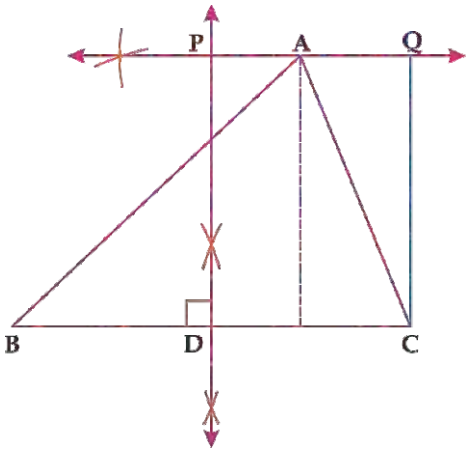
13.2.1 تڪنڊو ناهيو جيڪو ڏنل چوڪنڊي جي ايراضي جي برابر هجي.

مثال: ڏنل چوڪنڊي ABCD ۾ مليل ايراضي جي برابر هڪ ڪنڊ ناهيو. اسان کي خبر آهي تہ ساڳي بنياد وارن سيني تڪنڊن جي ايراضي برابر هوندي آهي. جن جو چوٽيون عمود کان بنياد تي هونديون آهن.



1. ABCD مليل چوڪنڊو آهي.
2. A ۽ C کي ملايو.
3. $\overline{AC}$ جي $\overline{DE}$ پوروچوٽ $\overline{DE}$ ناهيو جيڪو $\overline{BC}$ سان ملي. ۽ ان کي E تائين وڌايو.
4. A ۽ E کي ملايو تہ ABE گهربل تڪنڊو آهي.

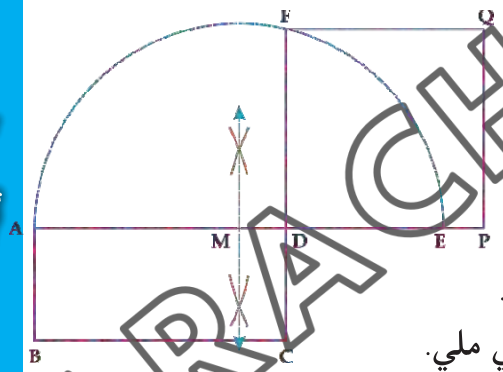
13.2.2 ڏنل تڪنڊي ۾ مليل ايراضي جي برابر مستطيل ٺاهيو.



مثال ڏنل تڪنڊي ۾ مليل ايراضي جي برابر هڪ مستطيل ٺاهيو.

1. هڪ تڪنڊو ABC ٺاهيو.
2. $\overline{BC}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{PD}$ ٺاهيو.
3. $\overline{BC}$ جي پورو چوٽ $\overline{PQ}$ تي، A کان هڪ ليڪ ٺاهيو.
4. $m\overline{PQ} = m\overline{BC}$ جي ونو.
5. تہ پوءِ CDPQ گهربل مستطيل آهي.

13.2.3 ڏنل مستطيل ۾ مليل ايراضي جي برابر چورس ٺاهيو.



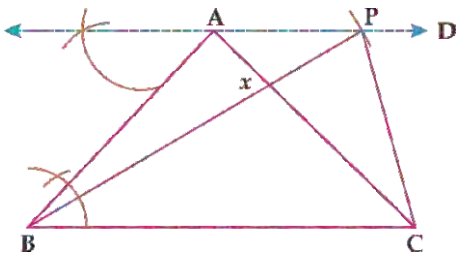
مثال: مليل مستطيل ABCD ۾ ايراضي جي برابر هڪ چورس ٺاهيو.

جوڙجڪ لاءِ هيٺيان قدم آهن.

1. ABCD هڪ مليل مستطيل آهي.
2. $\overline{AD}$ پاسي کي E تائين وڌايو تہ جيئن $m\overline{DE} = m\overline{CD}$ ٿهي
3. $\overline{AE}$ کي M تي ٽيڪي تي اڌ ڪريو.
4. M مرڪز وٺي $\overline{AM}$ رداس سان اڌ وڳل ٺاهيو.
5. $\overline{CD}$ کي وڌايو تہ جيئن اهو اڌگول کي F تي ملي.
6. هڪ پاسي $\overline{DF}$ تان هڪ چورس DFQP ٺاهيو جيڪو گهربل چورس هوندو.

13.2.4 مليل ماپ جي بنياد تي مساوي ايراضي جو ٽڪنڊو ٺاهيو.

جوڙجڪ لاءِ هيٺيان قدم آهن



1. ABC مليل ٽڪنڊو آهي.
2. $\overline{AD}$ کي $\overline{BC}$ جي پورو چوٽ ٺاهيو.
3. B مرڪز وٺي x رداس سان هڪ قوس ٺاهيو جيڪو $\overline{AD}$ کي P تي ڪپي.
4. $\overline{BP}$ ۽ $\overline{CP}$ کي پاڻ ۾ ملايو.
5. ته پوءِ BCP گهربل ٽڪنڊو آهي.

برابر بنياد BP = x جو ٽڪنڊو ۽ مساوي ايراضي ٽڪنڊي جي آهي.

مشق 13.3

1. هڪ مستطيل ٺاهيو جنهن جو پروارا پاسا ترتيبوار 2.5 س.م آهن. هڪ چورس ٺاهيو جنهن جي ايراضي ڏنل مستطيل جي برابر آهي.
2. مستطيل جي ايراضي جي برابر چورس ٺاهيو جنهن جا پروارا پاسا ترتيبوار 4.5 س.م ۽ 2.2 س.م آهن، چورس جي پاسن جي ماپ ڪريو ۽ ان جي ايراضي معلوم ڪري مستطيل جي ايراضي سان پيٽ ڪريو ۽ چڪاس ڪريو چورس جو گهيرا مستطيل جي گهيري کان ماپ ۾ گهٽ آهي.
3. ٽڪنڊو ٺاهيو، جنهن جو بنياد 4 س.م ۽ ٻيا ٻه پاسا هر هڪ 3.6 س.م ۽ 3.8 س.م آهن ان کي برابر ايراضي سان مستطيل ۾ تبديل ڪريو.
4. ٽڪنڊو ٺاهيو جنهن جو بنياد، 6 س.م ۽ ٻيا پاسا هر هڪ 5 س.م ۽ 6 س.م آهن ڏنل ٽڪنڊي جي ايراضي برابر هڪ مستطيل ٺاهيو.

ورجايل مشق 13

1. خال پريو.

(i) ٽڪنڊي جو وڏي ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو _____ آهي.

(ii) هڪ ليک ٽڪر جيڪو ٽڪنڈي جي چوٽي سان ملي ۽ مخالف پاسي تي عمود هجي ته ان کي _____ جئبو آهي.

(iii) هڪ ليک ٽڪر جيڪو ٽڪنڈي جي چوٽي کان ٺاهي، سامهون واري پاسي جي وچين ٽپڪي سان ملي ته ان کي _____ چئبو آهي.

(iv) تڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌ ڪنڊ آهن _____

(v) ٻہ يا ٻن ڪان وڌيڪ تڪنڊن کي يڪ سان چئبو جيڪڏهن انهن جو ڪنڊون برابر آهن ۽ انهن جي پاسن جون ماپون _____ آهن.

2. صحيح جوصا تي (✓) تڪ ڪريو.

(i) تڪنڊو جنهن جا ٽيئي پاسا يڪ سان آهن چئبو آهي _____.

(a) اٽپور (b) گوني ڪنڊ

(c) ٽپور پاسو (d) ٻپور پاسو

(ii) هڪ چوڪنڊو جنهن جي هر هڪنڊ 90° جي برابر هجي ۽ سيئي پاسا يڪ سان آهن. ان کي چئبو _____

(a) پورو چوٽ (b) مستطيل

(c) ٽرئينيريم (d) چورس

(iii) تڪنڊي جا مڌيان _____ آهن.

(a) هر ليڪ (b) يڪسان

(c) هم ٽڪو (d) پورو چوٽ

(iv) ٽپورپاسي تڪنڊي جا _____ عمود پاڻ ۾ يڪسان آهن.

(a) ٻہ (b) ٽي

(c) چار (d) ڪو ٻہ نہ

(v) مستطيل جون اريبون هڪ ٻي سان _____ آهن.

(a) اڌواڌ (b) ٽن حصن ۾ ورهاپيل

(c) گوني ڪنڊ تي ڪپيل (d) ڪو ٻہ نہ

(vi) تڪنڊي جا _____ هڪ ٻئي کي 2:1 جي نسبت ۾ ڪپين ٿا.

(a) عمود (b) ڪنڊن جا اڌ ڪنڊ

(c) عمودي اڌ ڪنڊ (d) مڌيان

(vii) جيڪڏهن ٻپور پاسي تڪنڊي جي بنياد جي هر هڪ ڪنڊ 45 آهي تہ ٽي ڪنڊ جي ماپ _____ آهي.

(a) 30° (b) 60°

(c) 90° (d) 120°

(viii) جيڪڏهن تڪنڊي جا ٽيئي مڌيان يڪسان آهن تہ تڪنڊو _____ آهي.

(a) گوني ڪنڊ (b) ٽپورپاسو

(c) ٻپور پاسو (d) سوڙهي ڪنڊ

(ix) جيڪڏهن تڪنڊي جا ٻہ _____ يڪسان آهن تہ اهي تڪنڊو ٻپور پاسو ٿيندو.

(a) عمود (b) مڌيان

(c) عمودي اڌ ڪنڊ (d) پاسا

خلاصو

- هن يونٽ ۾ اسان هيٺين شڪلين ۽ تعلق رکندڙ تصورن جي جوڙجڪ بابت سکيو آهي.
- ٽڪنڊو ٺاهيو جنهن جا ٻه پاسا ۽ وچ واري ڪنڊ مليل هجي.
- ٽڪنڊو ٺاهيو جنهن جو هڪ پاسو ۽ ٻه ڪنڊون مليل هجن.
- ٽڪنڊو ٺاهيو جنهن جا ٻه پاسا ۽ ڪنهن هڪ پاسي جي سامهون واري ڪنڊ مليل آهي.
- ٽڪنڊي جي ڪنڊن جا اڌ ڪنڊڙ ٺاهي انهن جي هم ٽپڪي جي چڪاس ڪرڻ.
- مليل ٽڪنڊي جا عمود ٺاهي انهن جي هم ٽپڪي جي چڪاس ڪرڻ.
- مليل ٽڪنڊي جا عمودي اڌ ڪنڊڙ ٺاهيو، انهن جي هم ٽپڪي جي چڪاس ڪريو.
- ٽڪنڊي جا مڊيان ٺاهڻ ۽ انهن جي هم ٽپڪي جي چڪاس ڪرڻ.
- ڏنل چوڪنڊي جي ايراضي برابر ٽڪنڊي کي ٺاهڻ.
- ڏنل ٽڪنڊي جي ايراضي جي برابر مستطيل جي جوڙجڪ ڪرڻ.
- ڏنل مستطيل جي ايراضي جي برابر چورس جي جوڙجڪ ڪرڻ.
- ڏنل ماپ جي بنياد تي مساوي ايراضي جو ٽڪنڊو ٺاهڻ.
- ٻه يا ٽن کان وڌيڪ ليڪون هم ٽپڪي چئبيون، جيڪڏهن اهي مشترڪ ٽپڪي مان گذري ۽ ان ٽپڪي کي هم مرڪز ٽپڪو چئبو آهي.
- ٽڪنڊي جي ڪنهن جو اندريون اڌواڌ ڪنڊڙ ٽپڪي کي، ٽڪنڊي جو اندريون مرڪز (In centre) چئبو آهي.
- ٽڪنڊي جي پاسن جي عمودي اڌ ڪنڊڙ جي هم ٽپڪي کي احاطي جو مرڪز (Circum centre) چئبو آهي.
- مڊيان جو مطلب آهي ته اهڙا ليڪ جيڪي ٽڪنڊي جي چوٽين کي مخالف پاسي جي وچين ٽپڪن سان ملائين.
- ٽڪنڊي جي عمودي مرڪز (Ortho centre) جو مطلب آهي ٽڪنڊي جي ٽن عمودن جو هم ٽپڪو.

يونٽ 14

ايراضي سان تعلق رکندڙ سڌيان
(Theorem Related with Area)

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي مطالعي کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- هيٺين سڌيان کي شامل نتيجن سان گڏ سمجهي سگهندا ۽ انهن کي استعمال ڪري لاڳاپيل حساب حل ڪندا.
- ساڳي بنياد ۽ ٻن پورو چوٽ ليڪن جي وچ ۾ لهندڙ پورو چوٽ چوڪندا ايراضي ۾ برابر آهن.
- برابر بنياد ۽ هڪ جهڙي عمود سان لهندڙ پورو چوٽ چوڪندا ايراضي ۾ برابر آهن.
- هڪ جهڙي بنياد ۽ هڪ جهڙي عمود سان لهندڙ ٽڪندا ايراضي ۾ برابر آهن.
- برابر بنياد ۽ هڪ جهڙي عمود سان لهندڙ ٽڪندا ايراضي ۾ برابر آهن.

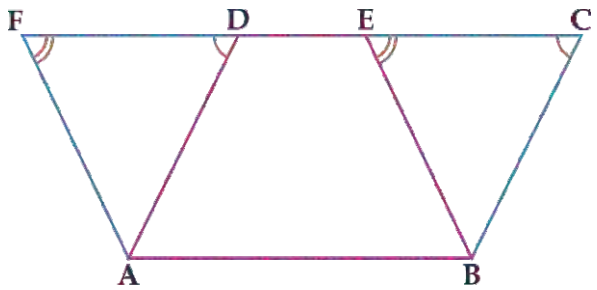
تعارف

اسان ايراضي سان تعلق رکندڙ سڌيا پڙهنداسين.

14.1 ايراضي سان تعلق رکندڙ سڌيان

سڌيان 14.1.1

ساڳي بنياد ۽ بن هڪ جهڙين پورو چوٽ ليڪن جي وچ ۾ ٺهندڙ پورو چوٽ چوڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.



مليل: ABCD ۽ ABEF ٻه پورو چوٽ چوڪنڊا آهن جن جو بنياد $\overline{AB}$ هڪ جهڙو آهي ۽ پورو چوٽ ليڪون $\overline{AB}$ ۽ $\overline{DE}$ ٻه ساڳيون آهن.

گهربل: پورو چوٽ چوڪنڊا ABCD ۽ ABEF ايراضي ۾ برابر آهن يعني ▰ABCD = ▰ABEF

ثابتي:

بيان	دليل
مطابقت ۾ $\Delta ADF \leftrightarrow \Delta BCE$	ABCDجا سامهون پاسا برابر آهن.
$m\overline{BC} = m\overline{AD}$ ... (i)	ABCDجون نسبتي ڪنڊون
$m\angle BCE = m\angle ADF$ ... (ii)	ABEFجون نسبتي ڪنڊون
$\angle E \cong \angle F$ ... (iii)	پ ڪ ڪ = پ ڪ ڪ
$\Delta BCE \cong \Delta ADE$	
▲ADF ≅ ▲BCE	يڪسان شڪليون ايراضي ۾ برابر آهن.
▲ADF + ▰ABED = ▲BCE + ▰ABED	ساڳي ايراضي ٻنهي پاسي جوڙ ڪرڻ.
تنهنڪري ▰ABEF = ▰ABCD	▰ABCD = ▰ABED + ▲BCE ▰ABEF = ▲ADF + ▰ABED

Q.E.D.

شامل نتيجو:

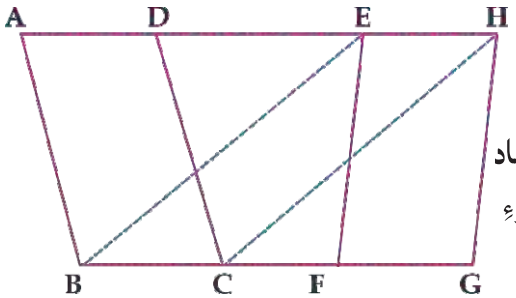
(i) پورو چوٽ چوڪنڊي جي ايراضي مستطيل جي ايراضي جي برابر آهي جيڪو ساڳي بنياد ۽ ساڳي عمود سان آهي.

سڌيان 14.1.2

برابر بنياد ۽ هڪ جهڙي عمود سان ٺهندڙ پورو چوت چوڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.

مليل: ABCD ۽ EFGH ٻه پورو چوت چوڪنڊا آهن.

جن جا بنياد $\overline{BC}$ ۽ $\overline{FG}$ برابر آهن ۽ عمود پٽ برابر آهن.



گهربل: ▰ABCD = ▰EFGH

جوڙجڪ: ABCD ۽ EFGH پورو چوت چوڪنڊا اهڙي طرح ٺاهيو ته جيئن سندن برابر بنياد $\overline{BC}$ ۽ $\overline{FG}$ ساڳي سڌي ليڪ تي هجن پوءِ B کي E سان ۽ C کي H سان ملايو.

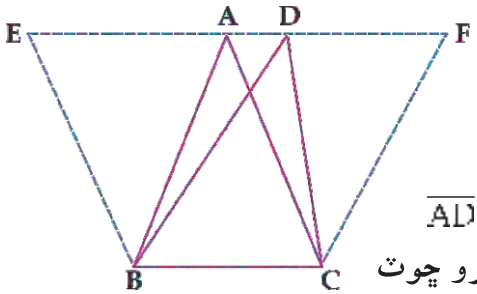
ثابتي:

بيان	دليل
پورو چوت چوڪنڊا ABCD ۽ EFGH پورو چوت ٽڪڙن جي وچ ۾ آهن.	هنن جا عمود برابر آهن.
ته پوءِ A,D,E ۽ H ٽپڪا سڌي ليڪ تي آهن جيڪا $\overline{BC}$. جي پورو چوت آهي.	
$m\overline{BC} = m\overline{FG}$	مليل
$m\overline{BC} = m\overline{EH}$	EFGHهڪ پورو چوت چوڪنڊو آهي.
$m\overline{BC} = m\overline{EH}$ پورو چوت آهن.	پورو چوت ٽڪڙا هڪ ٻي جيپورو چوت هن.
تنهنڪري EBCH هڪ پورو چوت چوڪنڊو آهي.	هڪ چوڪنڊو، ٻن پورو چوت پاسن سان پورو چوت چوڪنڊو آهي.
هاڻ ▰ABCD = ▰EBCH ... (i)	سڌيان 14.1.1
پَرَ ▰EFGH = ▰EBCH... (ii)	سڌيان 14.1.1
ته پوءِ ▰EFGH = ▰ABCD	(i) ۽ (ii) مان

Q.E.D

سڌيان 14.1.3

ساڳي بنياد ۽ ساڳي عمود سان ٺهندڙ ٽڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.



مليل: ٽڪنڊا ABC ۽ DBC، ساڳي بنياد $\overline{BC}$ ۽ پورو چوٽ ليکن $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AD}$. تي آهن.

گهربل:

▲ABC = ▲DBC

جوڙجڪ: $\overline{BE}$ پورو چوٽ $\overline{CD}$ جي ناهيو، جيڪي $\overline{AD}$ تي ملن ۽ انهن‌کي وڌايو E تائين. $\overline{CD}$ پورو چوٽ

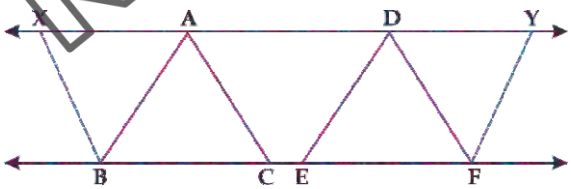
ثابتي: $\overline{BD}$ جي ناهيو جيڪو $\overline{AD}$ تي ملي ۽ F تائين وڌايو.

بيان	دليل
BCAE پورو چوٽ چوڪنڊو	جوڙجڪ
$▲ABC = \frac{1}{2}$ (▰BCAE) ... (i)	اريب $\overline{AD}$ پورو چوٽ چوڪنڊي کي تقسيم ڪري ٿي. BCAE ٻن ٽڪنڊن جي ايراضي جي برابر آهي.
ساڳي طرح BCFD بو هڪ پورو چوٽ چوڪنڊو آهي.	جوڙجڪ
$▲DBC = \frac{1}{2}$ (▰BCFD) ... (ii)	اريب CD پورو چوٽ چوڪنڊي کي تقسيم ڪري ٿي. BCFD ٻن ٽڪنڊي جي ايراضي جي برابر آهي.
$▲DBC = \frac{1}{2}$ (▰BCFD) ... (ii)	سڌيان 14.1.1
تہ پوءِ ▰BCAE = ▰BCFD ... (iii)	

Q.E.D

سڌيان 14.1.4

برابر بنياد ۽ برابر سان ٺهندڙ ٽڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.



مليل: ٽڪنڊا ABC ۽ DEF، جيڪي ترتيبوار $\overline{BC}$ ۽ $\overline{EF}$ برابر بنياد ۽ عمود تي آهن.

گهربل:

$\blacktriangle ABC = \blacktriangle DEF$

جوڙجڪ: $\overleftrightarrow{AD}$ ۽ $\overleftrightarrow{BF}$ ناهيو جنهن ۾ B, C, E, F ٽپڪا هجن.

ٽڪنڊا ABC ۽ DEF برابر بنياد $\overline{BC}$ ۽ $\overline{EF}$ سان سڌي ليڪ تي آهن. $\overline{CA}$ ۽ $\overline{BX}$ ۽ $\overline{FY}$ ۽ $\overline{DE}$ ناهيو تہ جيئن ٽپڪا X ۽ $\overleftrightarrow{AD}$, Y تي هجن.

ثابتي:

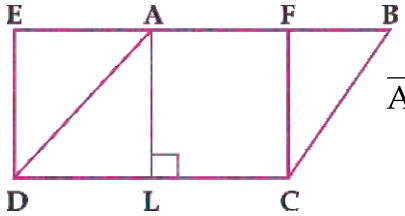
بيان	دليل/سبب
ٽڪنڊا ABC ۽ DEF ساڳين پورو چوٽ ليڪن تي آهن.	مليل (عمود برابر آهن)
BF XY $\therefore \blacksquare BCAX = \blacksquare EFYD$ ... (i)	سڌيان 14.1.2.
$\blacktriangle ABC = \frac{1}{2}(\blacksquare BCAX)$ ... (ii)	پورو چوٽ چوڪنڊي جي اريب ۾ برابر ٽڪنڊن ۾ ورهائي ٿي
$\blacktriangle DEF = \frac{1}{2}(\blacksquare EFYD)$ ... (iii)	ساڳيو سبب
تنهنڪري $\blacktriangle DEF = \blacktriangle ABC$	(i), (ii) ۽ (iii) مان

Q.E.D

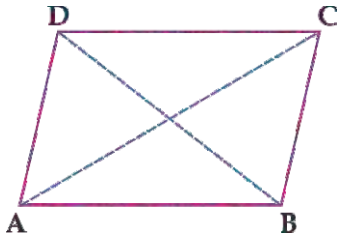
شامل نتيجو:

ساڳي سڌي ليڪ تي ٺهندڙ ٽڪنڊا جن جون ساڳيو چوٽيون ۽ برابر بنياد هجن تہ ايراضي ۾ برابر ٿيندا.

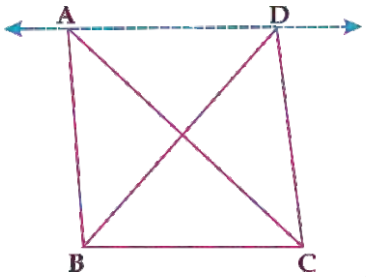
مشق 14.1



1. مليل شڪل، ABCD هڪ پورو چوٽ چوڪنڊو ۽ EFCD هڪ مستطيل آهي جنهن ۾ $\overline{AL} \perp \overline{DC}$ ثابت ڪريو ته
   (i) $▰ABCD = ▰EFCD$
   (ii) $▰ABCD = m\overline{DC} \times m\overline{AL}$



2. مليل شڪل ۾، جيڪڏهن چوڪنڊي جي اريبون ان کي چئن برابر ٽڪنڊن ۾ ورهائين ته ٻڌايو ته اهو پورو چوٽ چوڪنڊو آهي.



3. مليل شڪل ۾ ABC، $\overline{AD}$ ۽ $\overline{BC}$ هڪ گولي ڪنڊ ٽڪنڊو آهي B، چوٽي ڪاڻ جنهن ۾ س م ۽ س م $m\overline{BC} = 7$ آهي.
   $m\overline{AC} = 11$ ۽ ΔABC جي ايراضي معلوم ڪريو.

4. ثابت ڪريو تو ٽڪنڊي جا مڌيان، ان کي ٻن برابر ايراضي وارن ٽڪنڊن ۾ ورهائن ٿا. صورت ٻڌايو ۽ سوال جو نالو استعمال ڪريو.
5. ثابت ڪريو ته مستڀيل جي آمهون سامهون پاسن جي وچين ٽپڪن سان ملائيندڙ ليڪ ٽڪر ان کي ٻن برابر مستطيلن ۾ تقسيم ڪندو.
6. جيڪڏهن ٻه برابر ايراضي وارا پورو چوٽ چوڪنڊا جن جو ساڳيو ۽ برابر بنياد هجي ته انهن جا عمود ٻه برابر ٿيندا.
7. ثابت ڪريو ته ٽپور پاسي ٽڪنڊي جو ڪنڊ جو اڌ ڪندڙ ان کي ٻن برابر ايراضي وارن ٽڪنڊن ۾ تقسيم ڪندو.
8. ثابت ڪريو ته رامبس، ان جي اريبن سان چئن برابر ايراضي وارن ٽڪنڊن ۾ تقسيم ٿيندو.

ورجايل مشق

1. هيٺ مليل لاءِ صحيح جي لاءِ T ۽ غلط لاءِ F ان جي سامهون ٽڪ ڪريو.

(i) بند شڪل جي ايراضي مطلب، اهو حصو جيڪو ليڪن سان شڪل کي بند ڪري. T/F

(ii) مستطيل جي اريب، ان کي ٻن يڪسان ٽڪنڊن ۾ ورهائي ٿي. T/F

(iii) يڪسان شڪلين کي مختلف ايراضي هوندي آهي. T/F

(iv) پورو چوٽ چوڪنڊي جي ايراضي بنياد ۽ اوچائي جي ضرب اپت برابر آهي. T/F

(v) ٽڪنڊي مڙيا جو مطلب انهن جي چوٽي کان، سامهون وري پاسي تي عمود آهي. T/F

(vi) ٻن پورو چوٽ ليڪن جو عمودي مفاصلو ڪنهن وقت مختلف به ٿي سگهي ٿو. T/F

(vii) چوٽي واري ٽبڪي کان ٽاهيل عمود هميشه سامهون پاسي کي اڏو اڏ ڪندو. T/F

(viii) ٻه ٽڪنڊا ايراضي ۾ برابر ٿيندا، جيڪڏهن انهن جو ساڳيو بنياد ۽ برابر عمود هجن. T/F

2. صحيح جواب کي (✓) ٽڪ ڪريو.

(i) جيڪڏهن ٻن ليڪن جي وچ جو عمودي مفاصلو ساڳيو آهي ته اهي ليڪون _____ آهن.

(a) هڪ ٻئي تي عمود (b) هڪ ٻئي سان پورو چوٽ
(c) هڪ ٻئي کي ڪپيندڙ (d) ڪو به نه

(ii) جيڪڏهن ٻن ٽڪنڊن جي ايراضي برابر آهي ته پوءِ _____ يڪسان پڻ ٿيندا.

(a) ضروري نه آهي. (b) ضروري آهي ته
(c) بلڪل (d) ڪو به نه

(iii) ٽڪنڊي جي چوٽيءَ واري ٽبڪي کان، سامهون پاسي تي ٺهندڙ عمود کي _____ چئبو آهي.

(a) مڙيان (b) عمودي اڏ ڪندڙ
(c) عمود (d) ڪنڊ جو اڏ ڪندڙ

(iv) پورو چوٽ چوڪنڊا جن جو ساڳيو بنياد ۽ ساڳيو عمود هجي _____ آهن.

(a) يڪسان (b) ايراضي ۾ برابر

(c) هڪ جهڙا (d) هي سڀ

(v) پورو چوٽ چوڪنڊن جا برابر بنياد هجن تہ انهن جي ساڳي ايراضي ٿيندي جيڪڏهن:

(a) انهن جو عمود برابر آهن (b) انهن جو عمود ساڳيو آهي

(c) اهي ساڳي پورو چوٽ ليڪن جي وچ ۾ هوندا

(d) هي سڀ

(vi) ΔABC ۽ ΔDEF جا برابر بنياد ۽ برابر عمود هجن تہ پوءِ اهي ٽڪنڊا _____ آهن.

(a) ايراضي ۾ برابر (b) يڪسان

(c) هڪ جهڙا (d) هن مان ڪو بہ نہ

خلاصو

- هن يونٽ ۾ اسان ڪجهہ ضروري عملن کي ظاهر ۽ بيان ڪيو آهي ۽ هيٺيان سڌيان انهن جي شامل نتيجن سان گڏ ثابت ڪيا آهن.
- ساڳي بنياد ۽ ٻن پورو چوٽ ليڪن جي وط ۾ لهندڙ پورو چوٽ چوڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.
- برابر بنياد ۽ هڪ جهڙي عمود سان لهندڙ پورو چوٽ چوڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.
- هڪ جهڙي بنياد ۽ هڪ جهڙي عمود سان لهندڙ ٽڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.
- برابر بنياد ۽ هڪ جهڙي عمود سان لهندڙ ٽڪنڊا ايراضي ۾ برابر آهن.
- شڪل جي ايراضي جص مطلب، بند شڪل جو اهو حصو جيڪو حد جي ليڪن سان بند ٿيل هجي.
- مستطيلي حد جو مطلب ٽڪنڊن ۽ انهن جي اندرين جو ميلاپ.
- ٽڪنڊي جي ايراضي جو مطلب، اها ايراضي جيڪا ٽڪنڊي جي حدن تي هجي.
- ٽڪنڊي جي اوچائي يا عمود جو مطلب تہ عمودي مفاصلو جيڪو بنياد کان ان جي سامهون واري چوٽي تائين هجي.

يونٽ 15

ٽڪنڊي جي پاسي جو واڌارو
(Projection of a Side of a Triangle)

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته:

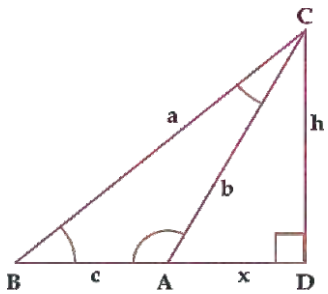
- ڪنهن ويڪري ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ ويڪري ڪنڊ جي سامهون واري پاسي جو چورس، ٻنهي سوڙهين ڪنڊن وارن پاسن جي چورس جي جوڙ سان گڏ مستطيل تي مشتمل هڪ پاسي ۽ ان واڌاري جي ٻيڻ جي برابر آهي.
- ڪنهن ٽڪنڊي ۾ سوڙهي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي جو چورس، سوڙهي ڪنڊ جي انهن گهٽيل پاسن جي چورس جي ڪٽ سان گڏ مستطيل جي هڪ پاسي ۽ ان جي واڌاري جي ٻيڻ جي برابر آهي.
- ڪنهن ٽڪنڊي ۾ ڪن به ٻن پاسن جي چورس جو جوڙ، ٽئي پاسي جي اڌ جي چورس سان گڏ، ان پاسي کي اڌواڌ ڪندڙ مڌيان جي چورس جي ٻيڻ جي برابر آهي.

15.1 تڪنڊي جي پاسي جو واڌارو

هيٺيان سڌيان، شامل ننڍن سان گڏ سمجهي انهن جي استعمال سان لاڳاپيل حساب ڪريو.

سڌيان 15.1.1

ڪنهن ويڪري ڪنڊ تڪنڊي ۾ ويڪري ڪنڊ جي سامهون واري پاسي جو چورس، ٻنهي سوڙهين ڪنڊن وارن پاسن جي چورس جي جوڙ سان گڏ مستطيل تي مشتمل هڪ پاسي ۽ ان جي واڌاري جو ٻيل جي برابر آهي.



مليل: تڪنڊو ΔABC، جنهن جي ويڪري ڪنڊ A چوٽي آهي.

گهربل: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$

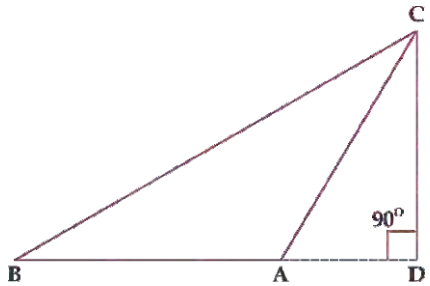
جوڙجڪ: $\overline{BA}$ تي هڪ عمود $\overline{CD}$ ناهيو جنهن ۾ $\overline{AD}$ وڌارو آهي $\overline{BA}$ جو ۽ ان کي $\overline{AC}$ سان ملايو جيئن $m\overline{BC} = a,\ m\overline{CA} = b,\ m\overline{AD} = x$ ۽ $m\overline{CD} = h$ ۽ cx.

ثابتي

بيان	سبب / دليل
گوني ڪنڊ تڪنڈي CDA ۾ $m\angle CDA = 90^0$	جوڙجڪ
تنهنڪري $(m\overline{AC})^2 = (m\overline{AD})^2 + (m\overline{DC})^2$	پيٿاگورس سڌيان مطابق
جيڪو $b^2 = x^2 + h^2$ ... (i) ,	مفروضي طور
گوني ڪنڊ تڪنڈي ΔCDB ۾ $m\angle CDB = 90^0$	جوڙجڪ
تنهنڪري $(m\overline{BC})^2 = (m\overline{BD})^2 + (m\overline{CD})^2$	پيٿاگورس سڌيان مطابق
جيڪو $a^2 = (c + x)^2 + h^2$ ... (i)	
يا $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$ ... (ii)	$m\overline{BD} = m\overline{BA} + m\overline{AD}$
$a^2 = c^2 + 2cx + b^2$	$b^2 = x^2 + h^2$
تہ پوءِ $(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + 2(\overline{AB})(\overline{AD}) + (\overline{AC})^2$	

Q.E.D

مثال: تڪنڊو ΔABC جنهن جي ويڪري ڪنڊ A چوٽي تي آهي. جيڪڏهن $\overline{CD}$ ، D ٽپڪي تائين وڌيل پاسي $\overline{BA}$ تي عمود هجي ۽ $m\overline{AC}=m\overline{AB}$ آهي تہ پوءِ $(m\overline{BC})^2=2(m\overline{AB})(m\overline{BD})$ ٿيندو.



مليل: تڪنڊو ΔABC جنهن ۾ ڪنڊ $m\angle A$ هڪ ويڪري ڪنڊ آهي ۽ $m\overline{AC}=m\overline{AB}$. $\overline{CD}$ عمود آهي $\overline{BA}$ تي جنهن کي D تائين وڌايو.

گهربل:

$$(m\overline{BC})^2=2(m\overline{AB})(m\overline{BD})$$

ثابتي.

Reasons	بيان
	ڪنڊي ΔABC ۾
سڌيان 15.1.1	$(m\overline{BC})^2=(m\overline{AB})^2+2(m\overline{AB})(m\overline{AD})+(m\overline{AC})^2$
مليل $m\overline{AC}=m\overline{AB}$	$(m\overline{BC})^2=(m\overline{AB})^2+2(m\overline{AB})(m\overline{AD})+(m\overline{AB})^2$
$2m\overline{AB}$ کي مشترڪ ڪرڻ سان	$(m\overline{BC})^2=2(m\overline{AB})^2+2(m\overline{AB})(m\overline{AD})$
$m\overline{BD}=m\overline{AD}+m\overline{AB}$	$(m\overline{BC})^2=2m\overline{AB}(m\overline{AB}+m\overline{AD})$
	$(m\overline{BC})^2=2(m\overline{AB})(m\overline{BD})$

Q.E.D

مشق 15.1

.1 $\overline{AB}$ جي ڊيگهہ ۽ ڪنڊي ABC جي ايراضي معلوم ڪريو جڏهن

(i) $m\overline{AC}=3cm,\ m\overline{BC}=6cm$ and $m\angle C=120^0$

(ii) $m\overline{CD}=m\overline{BC}\ \cos(180^0-m\angle C)$

$$\left(m\overline{BC}\right)^2=\left(m\overline{AC}\right)^2+\left(m\overline{AB}\right)^2+2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$$

.2 تڪنڊي ΔABC ۾ $m\overline{AC}$ جي ڊيگهه معلوم ڪريو، جڏهن $m\overline{BC}=6cm$, س.م ۽ $m\overline{AB}=4\sqrt{2}\ cm$ آهي. $m\angle ABC=135^0$ جيڪڏهن ممڪن هجي تہ تڪنڊي ΔABC جي ايراضي معلوم ڪريو.

.3 تڪنڊي ΔABC ۾ $m\overline{AC}$ جي ڊيگهه معلوم ڪريو جڏهن ممڪن هجي تہ تڪنڊي ABC جي $m\overline{BC}=6\sqrt{2}\ cm$, ايراضي معلوم ڪريو.

سڌيان 15.1.2

ڪنهن تڪنڊي ۾ سوڙهي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي جو چورس سوڙهي ڪنڊ جي، انهن گهٽيل

پاس جي چورس جي ڪٽ سان گڏ مستطيل جي هڪ پاسي ان جي واڌاري جي ٻيڻ جي برابر آهي،

مليل: تڪنڊو ABC

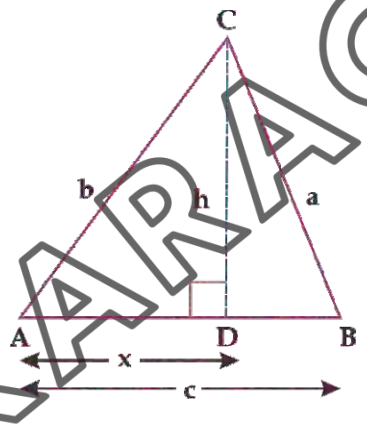
$\angle CAB$ سوڙهي ڪنڊ آهي A چوٽي تي ΔABC

جنهن ۾ $m\overline{AB}=c$ ۽ $m\overline{BC}=a,\ m\overline{AC}=b$

گهربل:

$$\left(m\overline{BC}\right)^2=\left(m\overline{AC}\right)^2+\left(m\overline{AB}\right)^2-2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$$

جيڪو i.e. $a^2=b^2+c^2-2cx$



جوڙجڪ: $\overline{AC}$ تي عمود $\overline{CD}$ ناهيو، تہ جيئن $\overline{AB}$ واڌارو آهي $\overline{AC}$ جو $\overline{AB}$ تي،

۽ $m\overline{CD}=h\ m\overline{AD}=x$

ثابتي:

بيان	سبب / دليل
گوني ڪنڊ تڪنڊي ΔCDA ۾ $m\angle CDA = 90^0$,	جوڙجڪ
تنهنڪري $\left(m\overline{AC}\right)^2 = \left(m\overline{AD}\right)^2 + \left(m\overline{CD}\right)^2$	پيٿاگورس سڌيان مطابق
جيڪو $b^2 = x^2 + h^2 \quad \ldots (i)$	مفروضي طور
گوني ڪنڊ تڪنڊي ΔCDA ۾ $m\angle CDB = 90^0$	جوڙجڪ
$\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{BD}\right)^2 + \left(m\overline{CD}\right)^2$	پيٿاگورس سڌيان مطابق شڪل مان
جيڪو $\therefore m\overline{BD} = m\overline{AB} - m\overline{AD}$	
$a^2 = (c - x)^2 + h^2$	مساوات استعمال ڪرڻ سان
$a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$	
يا $a^2 = c^2 - 2cx + b^2$	
$a^2 = c^2 + b^2 - 2cx$	
تنهنڪري $\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 + \left(m\overline{AB}\right)^2 - 2\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AD}\right)$	

Q.E.D

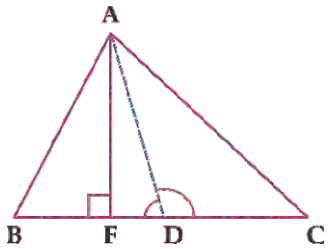
اپولونيس ۽ اپولونيس جا سڌيان

اپولونيس هڪ عظيم جاميٽري ۽ فلڪيات جو ماهر هو.

اسان هن جو مشهور سڌيان بيان ڪري ثابت ڪريون ٿا.

سڌيان 15.1.3 (اپولونيس سڌيان)

ڪنهن تڪنڊي ۾ ڪن به ٻن پاسن جي چورس جو جوڙ، ٽئي پاسي جي اڌ جي چورس سان گڏ ان پاسي کي اڌواڌ ڪندڙ مڌيان جي چورس جي ٻيڻ جي برابر آهي.



مليل: تڪندو ΔABC جنهن ۾ $\overline{AD}$ سڌيان $\overline{BC}$ کي D تپڪي تي اڏواڻ ڪري ٿو.

اهڙي طرح جو $m\overline{BD} = m\overline{CD}$.

گهربل:

$$\left(m\overline{AB}\right)^2 + \left(m\overline{AC}\right)^2 = 2\left(m\overline{BD}\right)^2 + 2\left(m\overline{AD}\right)^2$$

جوڙجڪ: ٺاهيو $\overline{AF} \perp \overline{BC}$

ثابتي:

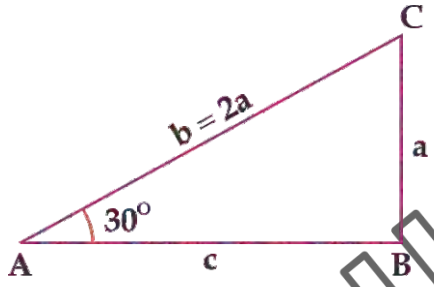
بيان	سبب / دليل
تڪندي ΔADB ۾ جڏهن $\angle ADB$ سوڙهي آهي.	ΔADF گوني ڪنڊ تڪندو آهي جنهن جي F گوني ڪنڊ آهي.
تنهنڪري $\left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{BD}\right)^2 + \left(m\overline{AD}\right)^2 - 2\left(m\overline{BD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$...(i)	جوڙجڪ. سڌيان 15.1.2 کي استعمال ڪري.
هان تڪندي ΔADC ۾ جنهن ۾ $\angle ADC$ ويڪري ڪنڊ آهي D تي	سپليمنيٽ $\angle ADB$ جي
تنهنڪري $\left(m\overline{AC}\right)^2 = \left(m\overline{CD}\right)^2 + \left(m\overline{AD}\right)^2 + 2\left(m\overline{CD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$	سڌيان 15.1.1
$\left(m\overline{AC}\right)^2 = \left(m\overline{BD}\right)^2 + \left(m\overline{AD}\right)^2 + 2\left(m\overline{BD}\right)\left(m\overline{FD}\right)$...(ii)	$m\overline{CD} = m\overline{BD}$
تنهنڪري $\left(m\overline{AB}\right)^2 + \left(m\overline{AC}\right)^2 = 2\left(m\overline{BD}\right)^2 + 2\left(m\overline{AD}\right)^2$	(i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪرڻ سان eqs. (i) and (ii)

Q.E.D

مشق 15.2

1. تڪنڊي ΔABC ۾ $m\angle A = 30^0$ m ، ته ثابت ڪريو ته

$$\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 + \left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 + \left(m\overline{AB}\right)^2 - \sqrt{3}\left(m\overline{AB}\right)\left(m\overline{AC}\right).$$



2. تڪنڊي ΔABC ۾ حل ڪريو جڏهن س.م $m\overline{BC} = 6cm$ ، س.م $m\overline{AC} = 5cm$ ۽ $m\angle A=30^0$

3. تڪنڊي ΔABC ۾ حل ڪريو جڏهن س.م 6 = 9 ، س.م b = 8 ته معلوم ڪريو

4. تڪنڊي جي مليل پاسن 3 س.م، 4 س.م ۽ 5 س.م سان تڪنڊو سوڙهي ڪنڊ، ويڪري ڪنڊ يا گوني ڪنڊ ٿيندو معلوم ڪريو.

5. تڪنڊي جي مليل پاسن 4 س.م، 7 س.م ۽ 8 س.م سان تڪنڊو ويڪري ڪنڊ، سوڙهي ڪنڊ يا گوني ڪنڊ ٿيندو معلوم ڪريو.

ورجايل مشق 15

1. خال ڀريو.

(i) گوني ڪنڊ تڪنڊي ΔABC ۾ $\left(m\overline{AC}\right)^2$ _____ + $\left(m\overline{AB}\right)^2$

(ii) تڪنڊي ΔABC ۾، ٻه پاسا 4 س.م جي برابر آهي ان کي چئبو _____ تڪنڊو.

(iii) تڪنڊي ΔABC ۾ $m\angle B=90^0$ $m\angle B=90^0$ ته _____ $=\left(m\overline{BC}\right)^2 + \left(m\overline{AB}\right)^2$

(iv) 8 س.م، 15 س.م ۽ 17 س.م _____ جا پاسا آهن.

.2 تڪنڊي ΔABC ۾ $\overline{AC} = 3$ س.م $\overline{BC} = 6$ س.م ۽ $\angle C = 120^0$ تہ معلوم ڪريو.

خلاصو

- ڪنهن ويڪري ڪنڊ تڪنڊي ۾ ويڪري ڪنڊ جي سامهون واري پاسي جو چورس، ٻنهي سوڙهين ڪنڊن وارن پاسن جي چورس جي جوڙ سان گڏ مستطيل تي مشتمل هڪ پاسي ۽ ان واڌاري جي ٻيڻ جي برابر آهي.
- ڪنهن تڪنڊي ۾ سوڙهي ڪنڊ جي سامعون واري پاسي جو چورس، سوڙهي ڪنڊ جي انهن گهٽيل پاسن جي چورس جي ڪٽ سان گڏ مستطيل جي هڪ پاسي ۽ ان جي واڌاري جي ٻيڻ جي برابر آهي.
- ڪنهن تڪنڊي ۾ ڪن بہ ٻن پاسن جي چورس جو جوڙ، ٽئي پاسي جي اڌ جي چورس سان گڏ، ان پاسي کي اڌواڌ ڪندڙ مڌيان جي چورس جي ٻيڻ جي برابر آهي.

يونٽ 16

تجزياتي / محددي، جاميٽري جو تعارف
Introduction to Coordinate Geometry / Analytical Geometry

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هن يونٽ جي پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- تجزياتي جاميٽري جي تعرف ۽ وضاحت ڪرڻ.
- مفاصلي جي فارمولا کي حلڪري، ڪارتيسي مٿاڇري ۾ مليل ٻن ٽپڪن جي وچ ۾ مفاصلو معلوم ڪندا.
- فاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ٻن ٽپڪن جي وچ ۾ مفاصلو معلوم ڪري سگهن.
- هم ليڪ ٽپڪن جي تعريف ڪري، هم ليڪ ۽ غير هم ليڪ ٽپڪن ۾ فرق ڪري سگهن.
- مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ٿي يا وڌيڪ ٽپڪا هم ليڪ ٽپڪا آهن.
- مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ثابت ڪن تہ ٿي غير هم ليڪ ٽپڪا ناهين ٿا.
  - ٽپور پاسو ٽڪندو
  - ٻپور پاسو ٽڪندو
  - گوني ڪنڊ ٽڪندو
  - اٽپور پاسو ٽڪندو
- مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ثابت ڪندا تہ، چار غير هم ليڪ ٽپڪا ناهين ٿا.
  - هڪ چورس
  - مستطيل
  - پوروچوٽ چوڪندو
- ٻن قليل ٽپڪن کي ملائيندڙ جو وچ وارو ٽپڪو معلوم ڪرڻ لاءِ فارمولا جي سڃاڻپ ڪري سگهندا.
- مفاصلي جو فارمولا ۽ وچ واري ٽپڪي معلوم ڪرڻ جو فارمولا استعمال ڪري جاميٽري سان تعلق رکندڙ مختلف نتيجن کي حل ڪري چڪاس ڪندا.

تعارف

ڪارتيسي محدد (Coordenate) 17 صدي ۾ (بيني ديڪارٽ لاطينگي نالو ڪارتيسيوس) ايجاد ڪيو هن آلجبرا جي وچ ۾ پهريون ڀيرو منظم ڳانڍاپو مهيا ڪيو، جنهن رياضي جي ميدان ۾ انقلاب آڻي ڇڏيو ڪارتيسي محددي نظام استعمال ڪري اسان جاميٽري جون شڪليون (جهڙوڪ ليڪون ۽ موڙ) مساواتن سان بيان ڪري سگهون ٿا.

16.1 مفاصلي جو فارمولا

16.1.1 محددي جاميٽري جي وصف ۽ وضاحت ڪريو.

محددي جاميٽري رياضي جي اهم ۽ دلچسپ شاخن مان هڪ آهي. خاص طور تي اسڪول ۾ رياضي جي لاءِ ان جي مرڪزي حيثيت آهي اها آلجبرا ۽ جاميٽري ۾ گراف، ليڪن ۽ موڙن تعلق کي مهيا ڪري ٿي.

محددي نظام جي مدد سان، جاميٽري جي آلجبري مطالعي کي محددي جاميٽري / تجرباتي جاميٽري چئبو آهي.

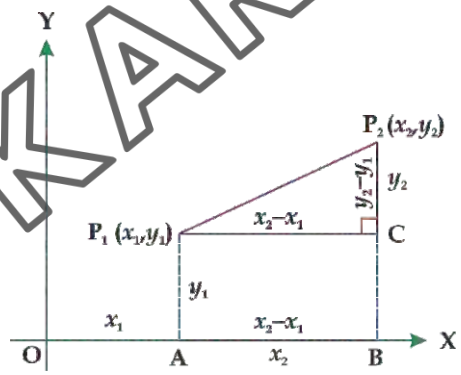
هي جاميٽري جي حسابن کي آلجبري صورت ۾ حل ڪرڻ ۾ مدد ڏي ٿو ۽ آلجبرا ۾ جاميٽري جو سچائپ ڏي ٿو. اهو جاميٽري جو حصو آهي جنهن ۾ عددن جا ترتيب ڏنل جوڙا مٿاڇري تي ٽپڪي کي جڳهه کي بيان ڪن ٿا. هتي محددي جاميٽري جو تصور (ڪارتيسي جاميٽري) ۽ ان جون مساواتون، فارمولا واضح ڪيا ويندا.

16.1.2 ڪارتيسي مٿاڇري ۾ ٻن ٽپڪن جي وچ ۾ مفاصلو ڪڍڻ لاءِ مفاصلي جو فارمولا حاصل ڪريو.

بيان:

ٻن ٽپڪن جي وچ ۾ مفاصلو $P_1(x_1, y_1)$ ۽ $P_2(x_2, y_2)$ کي $|\overline{P_1P_2}|$ سان ظاهر ڪيو ويندو آهي جنهن جي هن طرح تعريف آهي.

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



مفاصلي جي فارمولا جو حل:

فرض ڪريو تہ $P_1(x_1, y_1)$ ۽ $P_2(x_2, y_2)$

بہ مٿاڇري تي ٽپڪا آهن.

P_1 ۽ P_2 وٽان، $x-$ محور تي $\overline{P_1A}$ ۽ $\overline{P_2A}$ عمود ناهيو ۽ $x-$ محور جي پوروڇوٽ $\overline{P_1C}$ پڻ ناهيو.

$$\left|\overline{P_1C}\right| = \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{OB}\right| - \left|\overline{OA}\right| = \left|x_2 - x_1\right|$$

$$\left|\overline{P_2C}\right| = \left|\overline{P_2B}\right| - \left|\overline{BC}\right| = \left|y_2 - y_1\right|$$ ۽

ΔP_1C_2P کي گوني ڪنڊ ٽڪنڊو سمجهيو. ۽ پيٿاگورس سڌيان استعمال ڪريو.

$$\therefore \quad \left|\overline{P_2C}\right|^2 = \left|\overline{P_1C}\right|^2 + \left|\overline{P_2C}\right|^2$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{P_1P_2}\right|^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_2\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{P_1P_2}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_2\right)^2}$$

نوٽ: مفاصلي جو فارمولا اصل نقطي $P(x, y)$ جو آهي

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

16.1.3 بن مليل ٽپڪن جو مفاصلو معلوم ڪرڻ لاءِ مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪريو.

هيٺيان مثال مفاصلي واري فارمولا جي استعمال ڪرڻ کي سمجهڻ ۾ مدد ڪندا.

مثال 01 بن ٽپڪن $P(2,3)$ ۽ $Q(-4,5)$ جي وچ ۾ مفاصلو معلوم ڪريو.

حل: مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪري $\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$ هتي

$$\left(x_1, y_1\right) = (2,3), \left(x_2, y_2\right) = (-4,5)$$

$$\therefore \quad \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-4-2)^2 + (5-3)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2} = \sqrt{36+4}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

مثال 02 هڪ گول 5 ايڪي رداس جو مرڪز $C(3,2)$ سان ٺاهيو ويو جنهن تي $L(6,6)$، $M(0,-1)$ ۽ $N(-2,-3)$ ٽپڪا مليل آهن معلوم ڪريو ته ڪهڙو ٽپڪو گول تي نه آهي (سبب ڏيو).

حل: $C(3,2)$ گول جو مرڪز 5 ايڪا رداس سان آهي

$L(6,6)$، $M(0,-1)$ ۽ $N(-2,-3)$ تي مليل ٽپڪا آهن

اسان کي خبر آهي ته

اسان کي C کان L، M ۽ N تائين ترتيبوار مفاصلو معلوم ڪرڻو آهي، جنهن لاءِ مفاصلي جو فرمولا استعمال ڪريو.

$$\therefore \quad |\overline{CL}| = \sqrt{(6-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ units,}$$

$$|\overline{CM}| = \sqrt{(0-3)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ units,}$$

$$|\overline{CN}| = \sqrt{(-2-3)^2+(-3-2)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ units,}$$

$$|\overline{CL}| = 5 \text{ units i.e, radius of the circle}$$

$$|\overline{CM}| = 3\sqrt{2} \text{ units} < 5 \text{ units}$$

$$|\overline{CN}| = 5\sqrt{2} \text{ units} > 5 \text{ units}$$

تنهنڪري $N(-2,-3)$ ٽپڪو گول تي نه آهي.

مشق 16.1

1. مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري هيٺين ٽپڪن جي جوڙن جي وچ ۾ مفاصلو معلوم ڪريو.

(i) $(6,6)$ ۽ $(-4,5)$ (ii) $(2,3)$ ۽ $(2,2)$

(iii) $(2,3)$ ۽ $(0,1)$ (iv) $(2,3)$ ۽ $(0,1)$

2. $A(a,0)$ ۽ $B(0,b)$ ٽپڪا $x-$ محور تي آهن، A ۽ B جي وچ ۾ مفاصلو معلوم ڪريو جڏهن

(i) $a=-3,\ b=-4$ (ii) $a=-9,\ b=6$

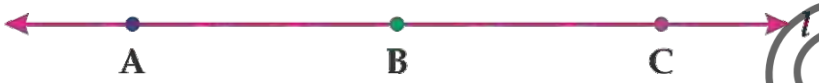
(iii) $a=3,\ b=4$ (iv) $a=\sqrt{2},\ b=-2\sqrt{2}$

3. تڪنڊي جو گهيراءُ معلوم ڪريو جيڪو ٽڻڪن A(0,0)، B(4,0) ۽ $C\left(2,2\sqrt{3}\right)$. جو ٺهيل آهي.

16.2 هم ليڪ ٽڻڪا

16.2.1 هم ليڪ ٽڻڪن جي وصف ڏيو. هم ليڪ ٽڻڪن ۽ غير هم ليڪ ٽڻڪن ۾ فرق معلوم ڪريو.

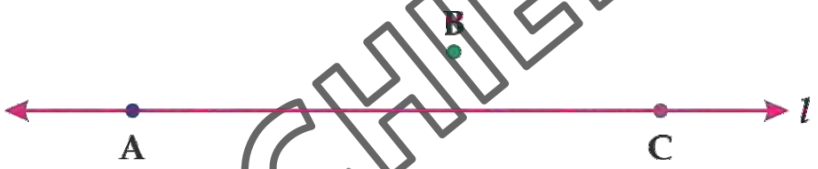
اهڙا ٽڻڪا جيڪي هڪ ئي ليڪ تي هجن تن کي هم ليڪ (Collinear Point) چئبو آهي. هيٺ شڪل ۾



A، B ۽ C هم ليڪ ٽڻڪا آهن جيئن $|\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$

غير هم ليڪ ٽڻڪا

تي يا وڌيڪ ٽڻڪا غير هم ليڪ ٽڻڪا چئبا جيڪڏهن اهي ساڳيءَ ليڪ تي نه هجي. شڪل ۾



A، B ۽ C غير هم ليڪ ٽڻڪا آهن.

نوٽ: تي غير هم ليڪ ٽڻڪا ٽڪنڊو ناهيندا، چار غير هم ليڪ ٽڻڪا چوڪنڊو ناهيندا.

16.2.2 مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ثابت ڪريو ته تي (يا وڌيڪ) مليڪ ٽڻڪا هم ليڪ آهن.

مثال 01 واضح ڪريو ته A(3, –2)، B(1, 4) ۽ C(–3, 16) هم ليڪ ٽڻڪا آهن.

حل: A(3, –2)، B(1, 4) ۽ C(–3, 16) تي مليل ٽڻڪا آهن.

هاڻ اسان $|\overline{AB}|$، $|\overline{BC}|$ ۽ $|\overline{AC}|$ جو مفاصلو، مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪري معلوم ڪنداسين.

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(1-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ units},$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-3-1)^2 + (16-4)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \text{ units},$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-3-3)^2 + (16-2)^2} = \sqrt{36+324} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10} \text{ units},$$

هتي $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 2\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = 6\sqrt{10} = |\overline{AC}| = d_3,$

تنهنڪري A، B ۽ C هم ليڪ ٽپڪا آهن. (واضح ٿيو)

مثال 02 مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ظاهر ڪريو تہ A(−2, −3)، B(4, 7) ۽ C(9, −5)

حل: A(−2, −3)، B(4, 7) ۽ C(9, −5) تي مليل ٽپڪا آهن.

هاڻ اسان |AB|، |BC| ۽ |AC| جو مفاصلو، مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪري معلوم ڪنداسين.

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(4+2)^2 + (7+3)^2} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34} \text{ units},$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{BC}| = \sqrt{(9-4)^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \text{ units},$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{AC}| = \sqrt{(9+2)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ units},$$

تنهنڪري $|\overline{AC}| \neq |\overline{AB}| + |\overline{AC}|$

تہ پوءِ مليل ٽپڪا A، B ۽ C غير هم ليڪ ٽپڪا آهن.

16.2.3 مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪري ثابت ڪريو تہ ڏنل ٽي غير هم ليڪ ٽپڪا ناهين ٿا.

(i) ٽپور پاسو ٽڪندو

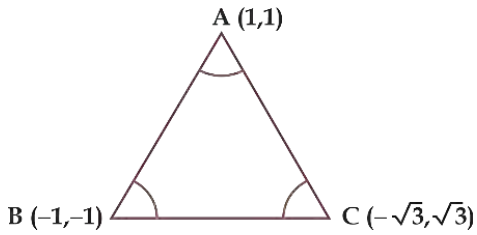
(ii) بپور پاسو ٽڪندو

(iii) گوني ڪنڊ ٽڪندو

(iv) اڻپور پاسو ٽنڪندو

مثال 01 ظاهر ڪريو تہ ٽي ٽپڪا A(1, 1)، B(−1, −1) ۽ $C(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$، ٽپور پاسو ٽڪندو ناهين ٿا.

حل: $A(1, 1)$، $B(-1, -1)$ ۽ $C(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$، مليل ٽڀڪا آهن.



هاڻ اسان $|AB|$، $|BC|$ ۽ $|AC|$ ٽڪنڊي جي پاسن جو مفاصلو معلوم ڪنداسين.

مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-1)^2 + {}^2(-1-1)} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ units,}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-\sqrt{3}+1)^2 + {}^2(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{8} \text{ units,}$$

and $$|\overline{AC}| = \sqrt{(-\sqrt{3}-1)^2 + {}^2(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \text{ units,}$$

Since, $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = 2\sqrt{2}$ units, and the points are non-collinear.

ThereforeABCis an equilateral triangle.

جيئن تہ $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = 2\sqrt{2}$ ايڪا آهن ۽ ٽڀڪا غير هم ليڪ تنهنڪري ABC هڪ ٽپور پاسو ٽڪنڊو آهي.

مثال 02 ظاهر ڪريو تہ ٽڀڪا $A(3, 2)$، $B(9, 10)$ ۽ $C(1, 16)$ ٻپور پاسو ٽڪنڊو ناهين ٿا.

حل: فرض ڪريو تہ $A(3, 2)$، $B(9, 10)$ ۽ $C(1, 16)$ مليل ٽڀڪا هن مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(9-3)^2+(10-2)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \text{ units},$$

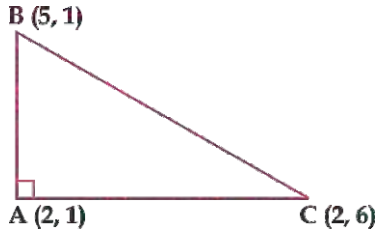
$$|\overline{AC}| = \sqrt{(1-3)^2+(16-2)^2} = \sqrt{4+196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \text{ units},$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(1-9)^2+(16-10)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \text{ units},$$

جيئن تہ $|AC| = |BC| = 10$ ايڪا ۽ ٽپڪا غير هم ليڪ آهن

مثال 03 جيئن تہ ٻہ پاسا ڊيگهہ ۾ برابر آهن تنهنڪري ABC هڪ ٻپور پاسو ٽڪنڊو آهي.

حل: سمجهو تہ A(2, 1)، B(5, 1) ۽ C(2, 6)، ٽنڪڊي ABC جون چوٽيون آهن تہ پوءِ مفاصلي جو فارمولا استعملا ڪري.



$$|\overline{AB}|^2 = (5-2)^2 + (1-1)^2 = 9+0 = 9$$

$$|\overline{BC}|^2 = (2-5)^2 + (6-1)^2 = 9+25 = 34$$

and $$|\overline{AC}|^2 = (2-2)^2 + (6-1)^2 = 0+25 = 25$$

هتي

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 9+25 = 34$$

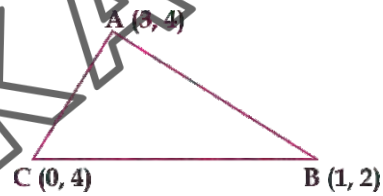
$$\Rightarrow \quad |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2$$

پيٿاگورس سڌيان مطابق مليل چوٽيون گوني ڪنڊ ٽڪنڊي مان آهن.

مثال 04 ظاهر ڪريو تہ ٽپڪا A(3, 4)، B(1, 2) ۽ C(0, 4) اٽپور پاسو ٽڪنڊو ناهيندا.

حل: فرض ڪريو تہ ٽپڪا A(3, 4)، B(1, 2) ۽ C(0, 4) مليل ٽپڪا آهن.

هاڻ هرهڪ پاسي جو مفاصلو معلوم



ڪرڻ لاءِ مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪريو.

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(1-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \text{ units,}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(0-3)^2+(4-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ units,}$$

$$\text{and} \quad |\overline{AC}| = \sqrt{(0-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \text{ units,}$$

جيئن تہ $|\overline{AB}| \neq |\overline{BC}| \neq |\overline{AB}|$ ۽ تڀڪا غير هم ليڪ آهن.

جيئن تہ تنهي پاسن جي ڊيگهہ پاڻ ۾ برابر نہ آهي ان ڪري ABC اٽپور پاسو ٽڪنڊو آهي.

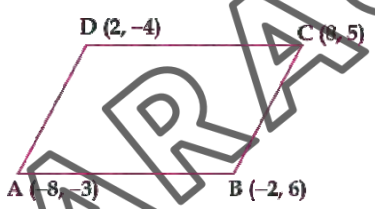
16.4.6 مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ظاهر ڪريو تہ چار غير هم ليڪ تڀڪا ناهين تا.

(i) پوروچوٽ چوڪنڊو

(ii) مستطيل

(iii) چورس

مثال 01 ظاهر ڪريو تہ A(−8, −3)، B(−2, 6) ۽ C(8, 5) ۽ D(2, −4) تڀڪا لاڳيتون، پوروچوٽ چوڪنڊي جون چوٽيون آهن.



حل: فرض ڪريو تہ A(−8, −3)، B(−2,6)، C(8, 5) ۽ D(2, −4)، پوروچوٽ چوڪنڊي جون لاڳيتيون چوٽيون آهن.

مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-2+8)^2+(6+3)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} \text{ units,}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(8+2)^2+(5-6)^2} = \sqrt{100+1} = \sqrt{111} \text{ units,}$$

$$|\overline{DC}| = \sqrt{(2-8)^2+(-4-5)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} \text{ units,}$$

and $$|\overline{AD}| = \sqrt{(2+8)^2+(-4+3)^2} = \sqrt{100+1} = \sqrt{101} \text{ units,}$$

هاڻ $$|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = \sqrt{117}$$

۽ $$|\overline{BC}| = |\overline{AD}| = \sqrt{101}$$

A، B، C ۽ D پوروچوٽ چوڪنڊي جو چوٽيون آهن.

مثال 02 ظاهر ڪريو تہ A(0, –1)، B(4, –3) ۽ C(8, 5) ۽ D(4, 7) مستطيل جون لاڳيتيون چوٽيون آهن.

حل: فرض ڪريو تہ (، B(4, –3) ۽ C(8, 5) ۽ D(4, 7) چوڪنڊي جا لاڳيتا ٽپڪا آهن.

مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري

$$d = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \text{ unit}$$

هاڻ اسين

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(4-0)^2+(-3+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \text{ units,}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(8-4)^2+(5+3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} \text{ units,}$$

$$|\overline{DC}| = \sqrt{(4-8)^2+(7-5)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \text{ units,}$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{(4-0)^2+(7+1)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} \text{ units,}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(8-0)^2+(5+1)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} \text{ units,}$$

$$|\overline{BD}| = \sqrt{(4-4)^2+(7+3)^2} = \sqrt{0+100} = \sqrt{100} \text{ units,}$$

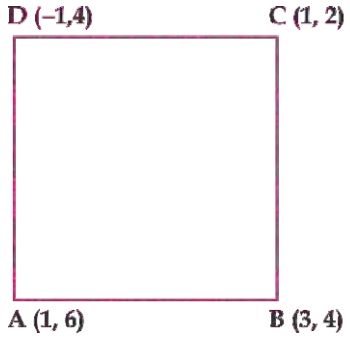
$$\therefore \quad |\overline{AB}| = |\overline{CD}| = \sqrt{20}$$

$$|\overline{BC}| = |\overline{AD}| = \sqrt{80}$$

$$|\overline{AC}| = |\overline{BD}| \quad \text{(Diagonals are equal)}$$

اريبون برابر آهن

مثال 03 ظاهر ڪريو تہ لاڳيتا چار ٽپڪا A(3, 4)، B(1, 2)، C(0, 4) ۽ D(–1, 4) چورس ناهين ٿا.



حل: مليل A(3, 4)، B(1, 2)، C(0, 4) ۽ D(–1, 4)، چار لاڳيتا جوڪندي ABCD جا ٽپڪا آهن.

مفاصلي وارو فارمولا استعمال ڪري

$$\therefore \quad |\overline{AB}| = \sqrt{(3-1)^2+(4-6)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ units,}$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(1-3)^2+(2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ units,}$$

$$|\overline{DC}| = \sqrt{(1+1)^2+(2-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ units,}$$

$$\text{and} \quad |\overline{AD}| = \sqrt{(-1-1)^2+(4-6)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ units,}$$

جيئن تہ $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{DC}| = |\overline{AD}| = 2\sqrt{2}$

چار پاسا ڊيگهہ ۾ برابر آهن.

هاڻ اريبن جي ڊيگهہ معلوم ڪرڻ سان

$$\therefore |\overline{AC}| = \sqrt{(1-1)^2+(2-6)^2} = \sqrt{0+16} = 4 \text{ units,}$$

$$\text{۽} \quad |\overline{BD}| = \sqrt{(-1-3)^2+(4-4)^2} = \sqrt{16-0} = 4 \text{ units,}$$

جيئن تہ $|\overline{AB}| = |\overline{BD}| = 4$ تہ اريبن جي ڊيگهہ ۾

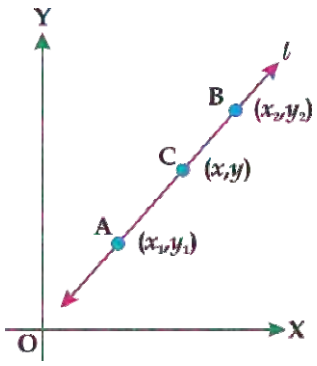
پاڻ ۾ برابر آهن، تنهنڪري ABCD هڪ چورس آهي.

مشق 16.2

1. ظاهر ڪريو تہ P (-3, -4) ، Q (2, 6) ، ۽ R (0, 2) ٽپڪا هم ليڪ آهن.
2. ظاهر ڪريو تہ A (-1, 0) ، B (1, 0 ، N (0, $\sqrt{3}$) ٽپڪا غير هم ليڪ آهن.
3. ظاهر ڪريو تہ L (0, $\sqrt{3}$) ، (-1, 0) ، N (1, 0) هڪ ٽپور پاسو ٽڪندو ناهين ٿا.
4. ظاهر ڪريو تہ A(2, 3) ، B(8, 11) ۽ C(0, 17) ٽپڪا ٻپور پاسو ٽڪندو ناهين ٿا يا نہ.
5. ڇا ٽپڪا A(–1, 2) ، B(7, 5) ۽ C(2, –6) گوني ڪنڊ ٽڪندو ناهين ٿا.
6. جيڪڏهن A(3, 1) ، B(9, 1) ۽ C(6, k)، کي هڪ ٽپور پاسو ٽڪندو ظاهر ڪرڻ لاءِ k جو ملهہ معلوم ڪريو.
7. ظاهر ڪريو تہ P(1, 2) ، Q(3, 4)، R(0, –1) اٽپور پاسي ٽڪندي جون چوٽيون آهن.
8. ظاهر ڪريوتہ A(2, 3) ، B(8, 11) ، C(0, 17) ۽ D(–6, 9)، چوس جو چوٽيون آهن.
9. ظاهر ڪريوتہ A(-2, 0) ، B(0, 3) ، C(2, 0) ۽ D(0, 3)، هڪ چورسي معلوم ڪنديون.
10. ظاهر ڪريوتہ A(3, 2) ، B(4, 1) ، C(5, 4) ۽ D(6, 3)، هڪ مستطيل جون چوٽيون آهن.
11. مفاصلي جو فارمولا استعمال ڪري ظاهري ڪريو تہ O(0, 0) ، A(3, 0) ، B(5, 2) ۽ C(2, 2) پوروچوٽ چوڪندي جون چوٽيون ناهين ٿيون.

16.3 وچين ٽپڪي جو فارمولا

16.3.1 ٻن مليل ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ جي وچ وارو ٽپڪو معلوم ڪرڻ لاءِ فارمولا جي سڃاڻپ ڪرڻ.



فرض ڪريو $A(x_1, y_1)$ ۽ $B(x_2, y_2)$ مٿاڇري تي مليل ليڪ $\overline{AB}$ جا ٻه ٽپڪا آهن ۽ $C(x, y)$، $\overline{AB}$ جو ڳچ ۾ وارو ٽپڪو آهي تہ پوءِ

$C(x,y)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ $\overline{AB}$ کي جو وچ وارو ٽپڪو چئبو آهي.

مثال 01 ٽپڪن $A(2, 1)$ ، $B(3, 4)$ کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر جو ڳچ ۾ وارو ٽپڪو معلوم ڪريو.

حل: $A(2, 1)$ ۽ $B(3, 4)$ ، ليڪ ٽڪر جا ٽپڪا آهن.

وچ وارو ٽپڪو = ؟

وچين ٽپڪي کي معلوم ڪرڻ جا فارمولا استعمال ڪري

$$\therefore \quad \overline{AB} = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

مثال 02 جيڪڏهن $A(2, 1)$، $B(5, 2)$، $C(3, 4)$ ، ΔABC جون چوٽيون آهن تہ ترتيبوار پاسن $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ جي وچ وارا ٽپڪا P، Q ۽ R معلوم ڪريو.

حل:

$$C(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$\therefore$ $\overline{AC}$ وچ وارو ٽپڪو $= P = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$,

$\overline{AB}$ وچ وارو ٽپڪو $= Q = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$,

$\overline{BC}$ وچ وارو ٽپڪو $= R = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (4, 3)$,

تہ ٽڪنڊي ΔABC جي پاسن جا گهريل وچ وارا ٽپڪا آهن.

Thus, the required mid-points of the sides of a ΔABC are $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ۽ $(4, 3)$.

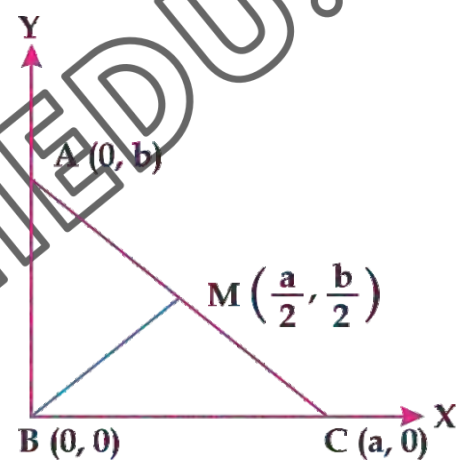
16.4 مفاصلي معلوم ڪرڻ جو فارمولا ۽ وچين ٽڪن جو فارمولا استعمال ڪري جاميٽري مان تعلق رکندڙ مختلف نتيجن کي حل ڪري چڪاس ڪريو.

مثال 01 تجزياتي طريقي سان ثابت ڪريو ته گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي هئپاٽينيوز کان مڊيان جي ڊيگهه هئپاٽينيوز جي ڊيگهه جي اڌ برابر آهي.

حل: فرض ڪري ته ABC ٽڪنڊي جي B ٽڪي تي گوني ڪنڊ آهي. B کي $\overline{BC}$ جو اصل ٽڪو ڪٽي، جيئن $x-$ محور ۽ $y-$ محور ترتيبوار شڪل ۾ ڏنل آهي.

فرض ڪريو ته $|AB| = c$ ۽ $|AB| = b$ ته پوءِ B(0, 0) ، $(a, 0)$ ۽ $(0, b)$ آهن تنهنڪري $\overline{AC}$ جو وچ وارو ٽڪو ٿيندو $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$ ، $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

هاڻ



Now $|\overline{AM}| = |\overline{CM}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|\overline{}| \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2}$$

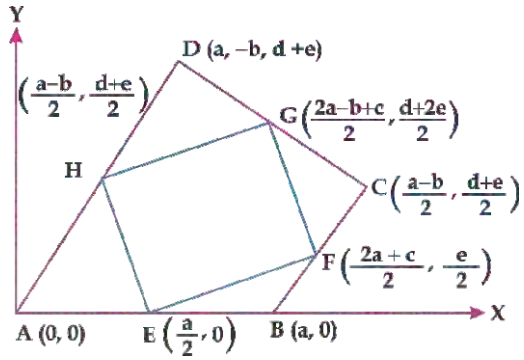
$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Therefore

$$|\overline{BM}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|$$

هاڻ تنهنڪري ۽ ته پوءِ مڊيان $|\overline{BM}|$ جي ڊيگهه هئپاٽينيوز $|\overline{AC}|$ جي ڊيگهه جي اڌ برابر آهي.

مثال 02 ڪنهن چوڪنڊي جي پاسن جي وچين ٽڪن کي ترتيبوار هلائڻ سان حاصل ٿيندڙ شڪل پوروچوٽ چوڪنڊو آهي ثابت ڪريو.



حل: فرض ڪري ته ABCD هڪ چوڪنڊو ۽ E، F، G، H، ترتيبوار پاسن $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$ ۽ $\overline{DA}$ جا وچ وارا ٽپڪا آهن.

جيڪڏهن A کي اصل ٽپڪو تصور ڪجي ته A ٿيندو (0, 0)، B ٿيندو $(a, 0)$، C ٿيندو $(a + c, e)$ ۽ D ٿيندو $(a - b, d + e)$

هاڻ وچ وارا ٽپڪا E، F، G ۽ H ترتيبوار ٿيندا.

$$\left(\frac{a}{2},0\right),\left(\frac{2a+c}{2},\frac{e}{2}\right),\left(\frac{2a-b+c}{2},\frac{d+2e}{2}\right) \text{ and } \left(\frac{a-b}{2},\frac{d+e}{2}\right).$$

تنهنڪري مفاصلي واري فارمولا سان

$$|\overline{EF}|^2 = \left(\frac{2a+c}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}-0\right)^2$$

$$= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(a+c)^2+e^2\right\} \qquad \text{(i)}$$

$$|\overline{GH}|^2 = \left(\frac{2a-b+c}{2}-\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{d+2e}{2}-\frac{d+e}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(a+c)^2+e^2\right\} \qquad \text{(ii)}$$

From (i) and (ii) , we have

$|\overline{EF}| = |\overline{GH}|$

ساڳي طرح $|\overline{GF}| = |\overline{EH}|$

جيئن ته سامهون وارا پاسا برابر آهن ته پوءِ EFGH هڪ پوروچوٽ چوڪنڊو اهي.

مشق 16.3

1. هيٺ ڏنل نقطن جي جوڙي جو وچ وارو نقطو معلوم ڪريو.

(i) $B(4,8)$ ۽ $A(2,6)$ (ii) $P(-3,-1)$ ۽ $Q(5,2)$

(iii) $L(0,6)$ ۽ $M(-8,0)$ (iv) $C(0,0)$ ۽ $D(2\sqrt{3},4\sqrt{3})$

2. گول جو وچ وارو نقطو معلوم ڪريو جڏهن تہ قطر جا آخري نقطا $A(-5,6)$ ۽ $B(3,-4)$ آهن.
3. گول جو وچ وارو نقطو $(3,4)$آهي ۽ قطر جا آخري نقطن مان هڪ نقطو $(4,6)$ آهي، ٻيو نقطومعلوم ڪريو.
4. گول جي قطر جا آخري نقطا $A(-3,4)$ ۽ $B(11,6)$آهي.گول جو وچ وارو نقطو ۽ نيم قطر معلوم ڪريو.
5. ثابت ڪريو تہ ڪو ٽڪنڊو ٻپور ٽڪنڊو آهي جيڪڏهن هن وٽ ٻہ برابر ميڊيان هجن.
6. ثابت ڪريو تہ پورو چوٽ چوڪنڊي جا اديب هميشہ هڪٻئي کي اڌ ڪن ٿا.

ورجايل مشق

1. هيٺين جملن کي غور سان پڙهو، صحيح بيان لاءِ "T" ۽ غلط بڳان جي لاءِ "F" تي گولو لڳايو.

(i) R ٽبڪو PQ وچيون ٽبڪو آهي، جيڪڏهن R موجود آهي. P ۽ Q جي وچ ۾. T/F

(ii) اٽپور پاسي ٽڪنڊي ۾ سڀ پاسا برابر آهن. T/F

(iii) عمودي ليڪون 135 جي ڪنڊ تي ملنديون آهن. T/F

(iv) هم ليڪ ٽبڪا ٽڪنڊو ناهي سگهن ٿا. T/F

(v) غير هم ليڪ ٽبڪا ٽڪنڊو ناهيندا آهن. T/F

(vi) ٻپور پاسي ٽڪنڊي ۾ ٻہ پاسا، ڪنڊون برابر آهن. T/F

(vii) سيئي ٽبڪا جيڪي y- محور تي هجن، هم ليڪ هوندا آهن. T/F

(viii) x- محور ۽ y- محور تي ڪاٽ (0, 0) آهي. T/F

(ix) اصل نقطي کان (6, 0) جو مفاصلو 36 ايڪا آهن. T/F

2. خال ڀريو.

(i) جيڪڏهن $A(x_1, y_1$ ۽ $B(x_2, y_2$ هڪ ليڪ جا ٻہ ٽبڪا آهن تہ پوءِ $|\overline{AB}|$ = _____

(ii) هم ليڪ ٽبڪا هوندا ساڳي _____ تي.

(iii) چوٿين چوٿي (quadrant) ۾ $x>0$ ۽ y _____.

3. صحيح جواب تي (✓) ٽڪ لڳايو.

(i) بہ عمودي ليڪون پاڻ ۾ _____ ڪنڊ تي ملنديون.

(a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 180°

(ii) $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ کي چئبو آهي.

(a) وچين ٽپڪن جو فارمولا (b) مفاصلي وارو فارمولا (c) ورهاست وارو فارمولا (d) نسبت وارو فارمولا

(iii) مٿاڇري تي A (3, 0) ۽ B (0, 3)، کي بہ بہ ٽپڪا آهن تہ پوءِ |AB| = _____

(a) 6 ايڪا (b) $6\sqrt{2}$

(c) $3\sqrt{2}$ (d) $3\sqrt{2}$

(iv) ڪنڊ جي سيني تن اندرين اڌ ڪنڊ جي ڪاٽ جو ٽپڪو چئبو آهي.

(a) ميلاپ جو ٽپڪو (b) اندريون مرڪز

(c) عمودي مرڪز (d) گهيرندڙ مرڪز

خلاصو

- بن ٽپڪن $A(x_1, y_1)$ جي وچ وارو مفاصلو مليل هوندو آهي (يونٽ) ايڪا. $d = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- $\overline{AB}$ليڪ ٽڪر جو وچيون ٽپڪو مليل آهي، $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
- هم ليڪ ٽپڪا سڌي ليڪ ناهيندا آهن.
- تن ٽپڪن A, B ۽ C جي جي هم ليڪ لاءِ $|\overline{AC}| = |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$ آهي.
- تي غير هم ليڪ ٽپڪا A, B ۽ C ٽڪنڊو ناهيندا، جيڪڏهن بن پاسن جي ماپ جو جوڙ تي پاسي جي ماپ کان وڌيڪ هجي.
- جيڪڏهن $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| < |\overline{AC}|$، تہ پوءِ A, B ۽ C ٽپڪن سان ڪو بہ ٽڪنڊو نٿو ناهي سگهجي.

Answers

Exercise 1.1

.1

i. ناطق عدد
ii. غیر ناطق عدد
iii. غیر ناطق عدد
iv. ناطق عدد
v. غیر ناطق عدد
vi. غیر ناطق عدد
vii. غیر ناطق عدد
viii. غیر ناطق عدد
ix. ناطق عدد
x. ناطق عدد
xi. غیر ناطق عدد
xii. غیر ناطق عدد

.2

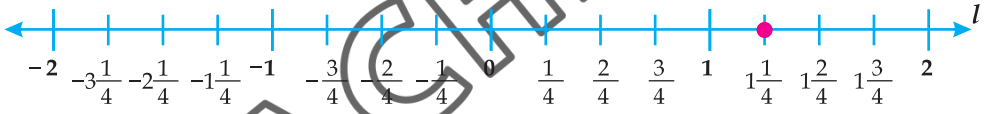
i. ختم ٹیندڑ
ii. نہ ختم ٹیندڑ
iii. نہ ختم ٹیندڑ
iv. ختم ٹیندڑ
v. ختم ٹیندڑ
vi. نہ ختم ٹیندڑ

.3

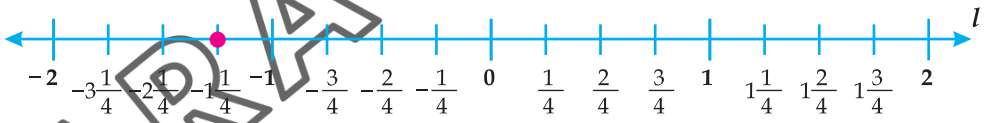
i.

ii.

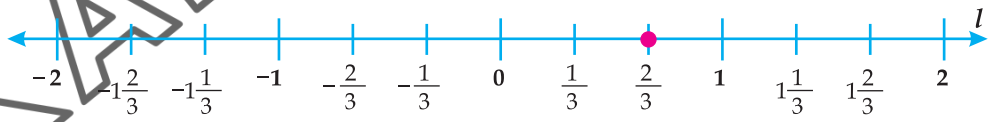
iii.



iv.



v.



vi.

.4 $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{7}{4}$

.5 π هڪ غير ناطق عدد آهي، ڇاڪاڻ ته ان کي نہ ختم ٿيندڙ ڏهائي اڻپور آهي

.6 i. T ii. T iii. T iv. F v. T vi. F

صحيح بيان آهن (i, ii, iii, v)

Exercise 1.2

.1
i. جوڙ جي مٽا واري خاصيت
ii. جوڙ جي سنگت واري خاصيت
iii. ڪاپي ڪان ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت
iv. ساڄي ڪان ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت
v. ساڄي ڪان ضرب جي جوڙ تي ورهائجڻ واري خاصيت
vi. جوڙ جي مٽا واري خاصيت
vii. جوڙ جي سنگت واري خاصيت
viii. ضربي ابتڙ
ix. جمعي ابتڙ
x. ضربي ابتڙ
xi. ڪاپي ڪان ضرب جي ڪٽ تي ورهائجڻ واري خاصيت
xii. ضربي ابتڙ

.2
i. $\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\boxed{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{\boxed{5}}$
ii. $\frac{7}{10}+\left(\frac{70}{\boxed{10}}+\frac{16}{33}\right)=\frac{7}{\boxed{10}}+\left(\frac{\boxed{70}}{10}+\frac{16}{\boxed{33}}\right)$
iii. $\frac{99}{50}\times\frac{50}{99}=\boxed{1}$
iv. $\frac{59}{95}\times\frac{95}{59}=\boxed{1}$
v. $(-21)+(\boxed{21})=0$
vi. $\frac{5}{8}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{5}{8}\times\frac{\boxed{5}}{\boxed{7}}\right)$

.3
i. $5<10$ ii. $10>5$ iii. $3+9<6+9$
iv. $4+8<6+8$ v. $8+8>6+8$

.4
i. 7×12 ii. 5×12 iii. $<$ iv. $>$

5. i. جمعي ابتڙ $3+(-3)=0$

ضربي ابتڙ $3\times\frac{1}{3}=1$

ii. جمعي ابتڙ $-7+(7)=0$

ضربي ابتڙ $-7\times\frac{1}{-7}=1$

iii. جمعي ابتڙ $0.3+(-0.3)=0$

ضربي ابتڙ $0.3\times\frac{1}{0.3}=1$

iv. جمعي ابتڙ $\left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right)\times\frac{\sqrt{5}}{5}=0$

ضربي ابتڙ $\frac{-\sqrt{5}}{5}\times-\frac{5}{\sqrt{5}}=1$

v. جمعي ابتڙ $\frac{9}{12}\times\left(-\frac{9}{12}\right)=0$

ضربي ابتڙ $\frac{9}{12}\times\frac{12}{9}=1$

vi. جمعي ابتڙ $0+0=0$

ضربي ابتڙ $0\times\frac{1}{0}=0$

Exercise 1.3

1. i. بنياد $=3$ سگهه نما $=4$

ii. بنياد $=\frac{1}{2}$ سگهه نما $=3$

iii. بنياد -30 سگهه نما $=20$

2. i. مول جي ڏسڻي $=3$, مول جو پايو $=5$

ii. مول جي ڏسڻي $=4$, مول جو پايو $=\frac{x}{y}$

iii. مول جي ڏسڻي $=5$, مول جو پايو x^2yz

3. i. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ ii. $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{5}{2}}$ iii. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{5}{3}}$ iv. $(xy)^{\frac{7}{3}}$ v. $(27)^{\frac{1}{9}}$

vi. $(-64)^{\frac{2}{3}}$ vii. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{3}}$ viii. $(xy)^{\frac{3}{5}}$ ix. $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$

4. i. $\sqrt[7]{(5)^3}$ ii. $\sqrt[3]{(ab)^{-2}}$ iii. $\sqrt[7]{\left(\frac{5}{7}\right)^{15}}$ iv. $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{m}}$ v. $\sqrt[5]{\left(\frac{11}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)}$

Exercise 1.4

1. i. 27 ii. 20 iii. $(a+b)(c+d)$

2. i. $\left(\frac{1}{3}\right)^{9}$ ii. $\left(\frac{3}{4}\right)^{7}$ iii. $\left(-\frac{4}{5}\right)^{8}$ iv. $-3^3\times 5^6$ v. $3^3\times 16^3$

vi. $\left(\frac{-a}{bc}\right)^{9}$ vii. $\left(\frac{-c}{d}\right)^{10}$ viii. $m^6n^5t^n$ ix. $a^9b^6c^8$ x. $10x^6y^4z^2$

xi. $\frac{3}{5}r^{10}s^4t^2$ xii. $\left(\frac{l}{m}\right)^{12}$

3. i. 5^6 ii. $x^{15}y^{15}$ iii. $(-4)^{10}$ iv. $(-3)^9\times(-4)^6$ v. $\frac{b^6}{5^3}$

vi. $\frac{(-4)^6}{9^6}$ vii. z^{24} viii. m^{100} ix. $(0.1)^{18}$

Exercise 1.5

1. i. $1+2i$ ii. $2+2i$ iii. $3+4i$
iv. $-1+i$ v. $-2+2i$ vi. $-3+4i$

2. i. $\text{Re}(z)=1,\ \text{Im}(z)=2$ ii. $\text{Re}(z)=1,\ \text{Im}(z)=2$

iii. $\text{Re}(z)=-5,\ \text{Im}(z)=6$ iv. $\text{Re}(z)=-1,\ \text{Im}(z)=-1$

v. $\text{Re}(z)=\frac{-3}{4},\ \text{Im}(z)=\frac{4}{5}$ vi. $\text{Re}(z)=-1,\ \text{Im}(z)=2$

3. i. $\bar{z}=3-2i$ ii. $\bar{z}=4-9i$ iii. $\bar{z}=-1-i$

iv. $\bar{z}=1+i$ v. $\bar{z}=\frac{-3}{4}+\frac{4}{5}i$ vi. $\bar{z}=1-3i$

5. i. $x=-5, y=5$ ii. $x=\frac{4}{3}, y=\frac{3}{5}$

iii. $x=\frac{-27}{5}, y=11$ iv. $x=\frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, y=\frac{4}{27}$

Exercise 1.6

1. i. $(12,5)$ ii. $\left(\frac{13}{6},\frac{13}{6}\right)$ iii. $\left(\frac{3xy}{2},-y^2\right)$

iv. $(5,21)$ v. $\left(0,-\frac{1}{15}\right)$ vi. $(5,0)$

vii. $(0,-41)$ viii. $\left(\frac{3-6\sqrt{2}}{4},\frac{3+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$ ix. $\left(\frac{-5}{13},\frac{-27}{13}\right)$

x. $\left(\frac{-7}{13},\frac{22}{13}\right)$

2. i. $\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i$ ii. $0-4i$ iii. $\frac{-1}{10}-\frac{3}{2}i$ iv. $\frac{-1}{26}-\frac{5}{26}i$

Review Exercise 1

1. i. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ii. حقیقی عدد iii. 0
   iv. 7 v. 0 vi. غیر ناطق عدد
   vii. غیر ناطق عدد viii. $-3-5i$ ix. $2[\ 2i(3-i)=6i+2]$
   x. $(ac-bd, ab+bc)$

2. i. T ii. T iii. T iv. F v. T

3. i. a ii. b iii. c iv. b

Exercise 2.1

1. i. 9.7×10^{3} ii. 4.98×10^{6} iii. 9.6×10^{7} iv. 4.169×10^{3}
   v. 8.4×10^{4} vi. 6.43×10^{-3} vii. 7.4×10^{-3} viii. 2.75×10^{5}
2. i. 70000 ii. 0.0000000008072 iii. 6018000 iv. 786500000
   v. 0.000205 vi. 72500000000 vii. 4502000 viii. 0.00000002865
   ix. 3056000

Exercise 2.2

1. i. $\log_7 343=3$ ii. $\log_3\frac{1}{81}=-4$ iii. $\log_{10}(0.001)$ iv. $\log_m(1)=\frac{2}{3}$
2. i. $(27)^{\frac{4}{3}}=81$ ii. $(2)^{-3}=\frac{1}{8}$ iii. $10^{0}=1$ iv. $(10)^{-2}=0.01$
3. i. $x=4\sqrt{2}$ ii. $a=9$ iii. $y=4$ iv. $x=8$
   v. $y=2$ vi. $a=4$ vii. $a^{0}=1$ viii. $y=1$
   ix. $x=1$

Exercise 2.3

1. i. گٹ : 0 ، مئنتیسا : 0.9031
   ii. گٹ : 3 ، مئنتیسا : 0.7036
   iii. گٹ : 0 ، مئنتیسا : 0.9997
   iv. گٹ : 2 ، مئنتیسا : 0.8839
   v. گٹ : –3 ، مئنتیسا : 0.5172
   vi. گٹ : –5 ، مئنتیسا : 0.4771
2. i. 0.9542 ii. 1.7448 iii. 1.4711 iv. 2.6078
   v. –3.6712 vi. –5.8808
3. i. –1.4926 ii. 1.4926 iii. –4.4926 iv. 2.4926
   v. 1.4926 vi. 4.4926

Exercise 2.4

1. i. 3692 ii. 0.5530 iii. 2278
2. i. 2.954242509 ii. 1.658393026 iii. 4.563267445
   iv. 2.917137753 v. –2.07007044 vi. –4.013228266
3. i. 56.2989 ii. 4.6659 iii. 163.38
   iv. 79.5976 v. 1.002027 vi. 7087.6
   vii. 0.024367 viii. 0.001668 ix. 0.00450
   x. 0.00001427 xi. 0.0000001646 xii. 0.000000000205
   xiii. 3019.95 xiv. 0.0000000991 xv. 0.000000000205

Exercise 2.5

1. i. $3\log_a x+\log_a y-2\log_a z$ ii. $\frac{1}{2}\log_a x+\log_a y-\frac{1}{2}\log_a z$
   iii. $-\frac{7}{2}\log_a(x)+\log_a y$ iv. $-5\log_a(z)$
   v. $\frac{1}{3}\log_a x+\frac{1}{6}\log_a y-\frac{1}{6}\log_a z$ vi. $\frac{8}{3}\log_a x+\frac{3}{2}\log_a y-\frac{2}{3}\log_a z$
2. i. $\log_a\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{9}{2}\right)$ ii. $\log_a\left(x^2-1\right)$
   iii. $\log\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

3. i. 1.1761 ii. 1.8062 iii. 0.5 iv. 1.6812
v. 0.6276 vi. 1.4771 vii. 0.4260 viii. 0.4604

Exercise 2.6

1. i. $x = 253.688$ ii. $x = 6750$ iii. $x = 3147$ iv. $x = 930.80$
v. $x = 3147$ vi. $x = 15.20$ vii. $x = 7.56641$ viii. $x = 64998$
ix. $x = 1.84077 \times 10^{13}$ x. $x = 6298$
2. i. 8 ii. 22 iii. 15 iv. 3 v. 4

Review Exercise 2

1. i. F ii. F iii. T iv. F v. T
2. i. عام لاگرٿم ii. 0 iii. مثنيسا
iv. 2.7093 v. $\log_a n$ vi. $a^x = y$
vii. $\log_a y = 10$ viii. 1 ix. $\log m = \log n$
x. $\log 10 + \log 10$ or 2
3. i. d ii. b iii. b iv. b v. a
vi. c vii. c viii. b ix. b

Exercise 3.1

1. i. گهڻ رقمي نه آهي ii. گهڻ رقمي نه آهي iii. گهڻ رقمي آهي
iv. گهڻ رقمي نه آهي v. گهڻ رقمي نه آهي vi. گهڻ رقمي نه آهي
2. i. ناطق ii. ناطق نه آهي iii. ناطق نه آهي
iv. ناطق نه آهي v. ناطق vi. ناطق نه آهي
3. i. $1 - \frac{110}{p^2 + 10}$ ii. $\frac{b-a}{a+2b+b^2}$ iii. $\frac{a}{2(a+b)}$
iv. $x + y - z$ v. $\frac{3m(m+5)}{2}$ vi. $\frac{4}{t}$

4. i. $\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$ ii. $\dfrac{3x+7}{(x+2)(x+3)}$ iii. $\dfrac{5y^2+21y-25}{5y(y-1)}$

iv. $\dfrac{2(xy)^2+xy+1}{(xy+1)(xy-1)}$ v. $\dfrac{9z-13}{2(z^2-1)(z-5)}$ vi. $\dfrac{2}{a+b}$

vii. $\dfrac{2(y+1)}{y-1}$ viii. $\dfrac{4x+1}{(2x+y)(2x-y)}$ ix. $\dfrac{x^2-11x+18}{2(x+3)^2(x-3)}$

x. $\dfrac{4a^3-20a}{(a^2-1)(a^2-9)}$

5. i. $\dfrac{8y^3}{(4y^2-x^2)(2y-x)}$ ii. $-\dfrac{2x+3y}{y}$ iii. 1

iv. $\dfrac{5}{3}$ v. $\dfrac{(q-5)(q+3)}{q^2}$ vi. $\dfrac{8(z-1)}{z-5}$

6. i. $\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x+y)(x-y)}$

7. i. $\dfrac{1}{6}$ ii. $9\dfrac{9}{55}$ iii. $-\dfrac{17}{73}$

iv. $-\dfrac{40}{9}$ v. $\dfrac{12}{11}$

Exercise 3.2

1. $a-b=1$ 2. $a-b=7$ 3. $a^2+b^2=50,\ ab=7$

4. $a^2+b^2=50,\ ab=7$ 5. $a^2+b^2+c^2=55$ 6. $a^2+b^2+c^2=\dfrac{5}{9}$

7. $a+b+c=7$ 8. $a+b+c=\sqrt{2.5}$ 9. $ab+bc+ca=40$

10. $a^3+b^3=28$ 11. $ab=-8$ 12. $ab=-4$

13. $a^3+b^3=230$ 14. $125x^3+y^3=247$ 15. $216a^3-343b^3=12419$

16. $x^3+\dfrac{1}{x^3}=322$ 17. $x^3-\dfrac{1}{x^3}=1364$

18. i. $8x^6+27y^6$ ii. x^8-y^8

iii. $(x^3-y^3)(x^3+y^3)(x^6+y^6)=x^{12}-y^{12}$ iv. $256x^8+6561y^8$

19. i. $\frac{27b^3}{8}+\frac{8}{27b^3}$ ii. $\frac{343y^6}{729}+\frac{729}{343y^6}$

iii. $\frac{x^{12}}{8}-\frac{1728}{x^{12}}$ iv. $c^6+\frac{1}{c^6}$

Exercise 3.3

1. i. $\frac{3z}{x^2}$ ii. $4\sqrt[3]{4}a^2b^4c^3$ iii. 2 iv. $36\sqrt{6}$

v. $\frac{25}{32}$ vi. $\frac{14\sqrt{3}}{11}$ vii. 1.79441 viii. 2

2. i. $8+4\sqrt{3}$ ii. $6\sqrt{6}-2\sqrt{3}$ iii. $8\sqrt{12}-\sqrt{8}$ iv. $2\sqrt{3}$

3. i. $6\sqrt{30}+60\sqrt{2}$ ii. $\frac{\sqrt{2}}{10}+2\sqrt{2}$ iii. $20+9\sqrt{3}$ iv. $15\sqrt{10}$

v. $4\sqrt{5}+25$ vi. $\sqrt{11}$ vii. 136 viii. $3\sqrt{2}$

ix. $\frac{1}{3}$ x. 2 xi. $134-24\sqrt{30}$ xii. $30+12\sqrt{6}$

4. i. $2\sqrt{2}$ ii. $66\sqrt{3}$ iii. $-\frac{9\sqrt{2}}{2}$ iv. 170

v. $5\sqrt{2}$ vi. $8\sqrt{3}$

Exercise 3.4

1. i. $\sqrt{6}+2$ ii. $10-\sqrt{10}$ iii. $3+2\sqrt{2}$ iv. $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

v. $5\sqrt{10}-3$ vi. $4\sqrt{5}+11$ vii. $\sqrt{11}-\sqrt{7}$ viii. $9+3\sqrt{7}$

2. i. $\dfrac{10-\sqrt{2}}{98}$ ii. $\dfrac{2\sqrt{5}-3}{11}$ iii. $\dfrac{-4\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{6}$ iv. $16\left(2\sqrt{3}-11\right)$

v. $\dfrac{83-18\sqrt{2}}{79}$ vi. $\dfrac{11+3\sqrt{3}}{2}$ vii. $\dfrac{15\left(7+2\sqrt{5}\right)}{29}$ viii. $\dfrac{123-22\sqrt{2}}{119}$

ix. $\sqrt{17}-4$ x. $\sqrt{17}+4$

3. i. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=256$ ii. $x=\dfrac{1}{2\sqrt{28}-11}$

iii. $x+\dfrac{1}{x}=6, x-\dfrac{1}{x}=-4\sqrt{2}, x^2+\dfrac{1}{x^2}=34, x^2-\dfrac{1}{x^2}=-24\sqrt{2}, x^4+\dfrac{1}{x^4}=1154$

4. i. $\dfrac{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}\right)^2}{6}$ ii. $\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-y\right)^2}{5}$ iii. $-\dfrac{10\left(6+\sqrt{y^2+36}\right)^2}{y^2}$

iv. $-\dfrac{5\left(6-\sqrt{y^2+36}\right)^2}{y^2}$ v. $30+40\sqrt{2}$ vi. $\dfrac{3\left(4-\sqrt{6}\right)}{46}$

Review Exercise 3

1. i. b ii. b iii. a iv. a v. a vi. a
vii. b viii. a ix. a x. a xi. a xii. b

2. i. Non-negative ii. $2+\sqrt{3}$ iii. 4
iv. Irrational expression v. x^4+y^4

Exercise 4.1

1. i. $4(x+4y+6z)$ ii. $x^2\left(1+3y+4y^2z\right)$
iii. $3pq(r+2t+5)$ iv. $9qr\left(s^2+t^2\right)(1+2qr)$
v. $\dfrac{xz}{4}\left(\dfrac{z}{4}-\dfrac{xz}{2}+\dfrac{xz^2}{3}\right)$ vi. $a(x-y)\left(1-ab+ab^2\right)$

2. i. $(7+z)(x+z)$ ii. $(9ab-6c)(a+2b)$
iii. $(t-2p)(6+4q)$ iv. $(r+9s)(r-7s)$

v. $\frac{1}{4}\left(y^2-4^2z\right)-\frac{z^2t}{9}(1+z)$

vi. $\frac{5x}{11}(2y+z)-\frac{7y}{11}(2z+x)$

3. i. $(2a+3b)^3$

ii. $\left(6x^2+1\right)^2$

iii. $\frac{1}{4x^2}\left(2x^2+1\right)^2$

iv. $(9y+8z)^2$

v. $\left(a^2b+25\right)^2$

vi. $(a+0.2)^2$

4. i. $\left(b^2-2c^2\right)^2$

ii. $\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{2}{3x^2}\right)^2$

iii. $2ab^3(a-4b)^2$

iv. $[3(p+q)-r^2]^2$

v. $(xy-0.05)^2$

vi. $[(a-b)-9]^2$

5. i. $(2a+3b)(2a-3b)$

ii. $(4x+5y)(4x-5y)$

iii. $\left(10xz+y^2\right)\left(10xz-y^2\right)$

iv. $\left(\frac{x^2}{10}+10y^2\right)\left(\frac{x^2}{10}-10y^2\right)$

v. $\left(\frac{8f}{9}+\frac{9g^2}{8}\right)\left(\frac{8f}{9}-\frac{9g^2}{8}\right)$

vi. $\left(\frac{x^2}{11}+11y\right)\left(\frac{x^2}{11}-11y\right)$

6. i. $[(2x+z)+(2x-z)][(2x+z)+(2x-z)]$

ii. $[(4a-9b)+(2a+5b)][(4a-9b)+(2a+5b)]$

iii. $\left[\left(13x^2\right)+(3t+4)\right]\left[\left(13x^2\right)-(3t+4)\right]$

iv. $\left[\left(9x^2-4y^2\right)+\left(4x^2-y^2\right)\right]\left[\left(9x^2-4y^2\right)-\left(4x^2-y^2\right)\right]$

v. $\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b-\frac{1}{b}\right)\right]\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(b-\frac{1}{b}\right)\right]$

vi. $\left[\left(3x+\frac{1}{3x}\right)+\left(2y-\frac{1}{2y}\right)\right]\left[\left(3x+\frac{1}{3x}\right)+\left(2y-\frac{1}{2y}\right)\right]$

7. i. $\left((x+y)+3z^2\right)\left((x+y)-3z^2\right)$

ii. $\left(\left(2a+2b^2\right)+3c\right)\left(\left(2a+2b^2\right)-3c\right)$

iii. $\left(4d^2+\left(c^2-d\right)\right)\left(4d^2-\left(c^2-d\right)\right)$

iv. $\left(2\left(x+y^2\right)+3y^3\right)\left(2\left(x+y^2\right)-3y^2\right)$

v. $\left(\frac{8f}{9}+\frac{9g^2}{8}\right)\left(\frac{8f}{9}-\frac{9g^2}{8}\right)$ vi. $\left(\frac{x^2}{11}+11y\right)\left(\frac{x^2}{11}-11y\right)$

8. i. $\left(\sqrt{ab}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{c}\right)$ ii. $\left(\sqrt{4x}+\sqrt{9y}\right)\left(\sqrt{4x}-\sqrt{9y}\right)$

iii. $\left(\sqrt{yz}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)\left(\sqrt{yz}-\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)$ iv. $\left(\sqrt{xzt}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{xzt}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

Exercise 4.2

1. i. $\left(a^2+x^2+ax\right)\left(a^2+x^2-ax\right)$ ii. $\left(b^2-b+1\right)\left(b^2+b+1\right)$

iii. $\left(a^4+x^4+a^2x\right)\left(a^4+x^4-a^2x\right)$ iv. $\left(z^2+z+1\right)\left(z^2-z+1\right)\left(z^4-z^2+1\right)$

2. i. $2(7x+1)(3x-1)$ ii. $\left(b^2-b+1\right)\left(b^2+b+1\right)$

iii. $y\left(y+21z^4\right)$ iv. $3(8a-3)(a-3)$

3. i. $(x+2y)^2-4xy$ ii. $9\left(4x^4z^4+y^4\right)$

iii. $\left(2t^2+10t+25\right)\left(2t^2-10t+25\right)$ iv. $\left(2t^2+2t+1\right)\left(2t^2-2t+1\right)$

4. i. $(x-2)(x+5)$ ii. $(ab+2)(ab-5)$

iii. $(y-7)(y+14)$ iv. $(xyz-4)(xyz+6)$

5. i. No factors ii. $2\left(21z^2+4\right)\left(z^2+1\right)$

iii. $(2x+1)(2x+5)$ iv. $(3x+y)(x-13y)$

6. i. $\left(9x^2+4y^2+6xy\right)\left(9x^2+4y^2-6xy\right)$ ii. $\left(x^2+5+3x\right)\left(x^2+5-3x\right)$

iii. $\left(y^2+1\right)\left(y^2-8\right)$ iv. $(a+b)(a-b)(4a+9b)(4a-9b)$

Exercise 4.3

1. i. $\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-4x-21\right)$ ii. $\left(x^2+5x+3\right)\left(x^2+5x+7\right)$

iii. $\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2-2x+10\right)$ iv. $\left(x^2-8x+1\right)\left(x^2-8x-1\right)$

v. $\left(x^2+9x-2\right)\left(x^2+9x+6\right)$ vi. $\left(x^2-5x-6\right)\left(x^2-5x+16\right)$

2. i. $(x^2+5x-2)(x^2+5x+12)$ ii.

iii. $(x-5x-5)(x-5x+15)$ iv. $(x^2-12x+30)(x^2-12x+32)$

v. $(x^2-5x-10)(x^2-5x+20)$ vi. $(x^2-7x+27)(x^2-7x-5)$

3. i. $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$

ii. $(x+1)(x-1)(x+\sqrt{14})(x-\sqrt{14})$ iii. $(x^2-3)^2$

iv. $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+4\sqrt{2})(x-4\sqrt{2})$

v. $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+2\sqrt{5})(x-2\sqrt{5})$ vi. $(x^2-12)(x^2-2x-12)$

Exercise 4.4

1. i. $(b+c)^3$ ii. $(2x+y)^3$ iii. $\left(4x+\frac{1}{4}\right)^3$

iv. $(2x+3)^3$ v. $\left(\frac{1}{3}+y^2\right)^3$ vi. $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y\right)^3$

vii. $\left(\frac{4}{3}+x\right)^3$ viii. $\left(\frac{z}{2}+\frac{y}{3}\right)^3$

2. i. $(d-2c)^3$ ii. $\left(x^2-\frac{4}{3}\right)^3$ iii. $\left(\frac{x}{5}-y\right)^3$

iv. $(5z-y^2)^3$ v. $\left(\frac{z}{3}-6\right)^3$ vi. $\left(\frac{b^2}{3}-\frac{c^2}{2}\right)^3$

vii. $\left(6-\frac{z}{2}\right)^3$ viii. $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y\right)^3$

Exercise 4.5

1. i. $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$ ii. $a^2(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^6-a^3b^3+b)$

iii. $(a^2+1)(a^4-a^2+1)$ iv. $(ab+8)(a^2b^2-8ab+64)$

v. $b^3(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$ vi. $\left(\frac{x}{5}+\frac{5}{x}\right)\left(\frac{x^2}{25}+\frac{25}{x^2}-1\right)$

vii. $(x^3+xy^2z^3)(x^6-x^4y^2z^3+x^2y^4z^6)$

viii. $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{x^4}{9}-\frac{2x}{3}+\frac{4}{x^2}\right)$

2. i. $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ ii. $(x^3+2y^3)(x^6+2x^3y^3+4y^6)$

iii. $\left(10-\frac{xy}{5}\right)\left(100+2xy+\frac{x^2y^2}{25}\right)$

iv. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

v. $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{4}{x^4}\right)\left(\frac{x^4}{16}+\frac{1}{x^2}+\frac{16}{x^8}\right)$ vi. $(x^4-y^4)(x^8+x^4y^4+y^8)$

vii. $\left(\frac{3}{x}-2y^2\right)\left(\frac{9}{x^2}+\frac{6y^2}{x}+4y^2\right)$ viii. $\left(2x^2-\frac{1}{9}\right)\left(4x^4+\frac{2x^2}{9}+\frac{1}{81}\right)$

Exercise 4.6

1. i. $R=-2$ ii. $R=2$ iii. $R=18$ iv. $R=-42$ v. $R=-11$

vi. $R=\frac{3}{2}$ vii. $R=-8$ viii. $R=3y^4$

2. $m=-1$ 3. $k=-24$ 4. $r=1,\ r=-3$

Exercise 4.7

1. i. $R=0,\ q(x)=x^2+1$ ii. $R=-2,\ q(x)=x^2-2x+1$

iii. $R=-60,\ q(x)=x^2-8x+27$ iv. $R=4,\ q(x)=x^2+8x+5$

v. $R=29,\ q(x)=x^3-3x^2+7x-15$ vi. $R=1,\ q(x)=x^3+2x^2+x+2$

vii. $R=29,\ q(x)=x^4-3x^3+10x^2-32x+96$

viii. $R=174,\ q(x)=x^4+2x^3+7x^2+18x+60$

ix. $R=175,\ q(x)=2x^3+2x^2+104x+40$

x. $R = -300,\ q(x) = 6x^3 - 42x^2 + 90x - 114$

2. $k = 24$ 3. $m = 4$ 4. $m = -24$ 5. $m = -1$

Exercise 4.8

1. i. $(x-1)(x^2+1)$ ii. $(x+1)(x+1)(x-1)$
   iii. $(x-1)(x-2)(x-3)$ iv. $(x+2)(x-2)(x+3)$
   v. $(x+1)^2(x-1)$ vi. $(x-2)(x+3)(x-3)$
   vii. $(x+1)(2x-1)(3x+2)$ viii. $(x+1)(x+3)(x+4)$
   ix. $(x+1)(2x-1)(x+3)$ x. $(x+1)(x+2)(x+4)$
   xi. $(x+2)(x+3)(x+4)$ xii. $(x+2)(x+4)(x+6)$

Review Exercise 4

1. i. True ii. True iii. True iv. False
   v. False vi. True
2. i. $4x + y^2$ ii. $x^2 + 4xy + 16y^2$ iii. $x + 3$
   iv. $2xy$ v. $a^2 - 3ab + 9b^2$
3. i. b ii. c iii. d iv. a v. b vi. c

Exercise 5.1

1. i. و.ع.پ.و $= 1$ ii. و.ع.پ.و $= 6r^3s^3t^3$
   iii. و.ع.پ.و $= (x+3)$ iv. و.ع.پ.و $= (2x-3)$
   v. و.ع.پ.و $= 2(a+2b)$ vi. و.ع.پ.و $= (x+3)(x+4)$
2. i. و.ع.پ.و $= (x+1)$ ii. و.ع.پ.و $= (x+3)(x+4)$
   iii. و.ع.پ.و $= 1$ iv.
3. i. ا.پ.ع.ن $= 81a^4b^5c^8$ ii. $7800p^5q^4r^8$
   iii. $(x-1)(3x-2)$ iv. $(x+4)(x+7)(x-3)$
   v. $(3x+1)(2x+3)(2x^2-5x-11)(x-4)$

vi. $(x^3+y^3)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4)$

4. i. $(x-20)(x-5)(x+4)$ ii. $(3x+2)(x+4)(2x-1)$

iii. $(x^2-y^2-z^2-2yz)(y^2-z^2-x^2-2xz)$ iv. $12x^2(x-4)(x+7)(x-2)$

5. $(x-8)(x-3)(x^2-6x+6)$

6. x^2+2x-3

7. $9x^4+15x^3-12x-14x^2+8$

8.

9. 6 س.م

10. 48 منٹ

Exercise 5.2

1. i. $\dfrac{7x+3}{(x+1)^2}$ ii. $\dfrac{12x^2+29x+16}{3x(2x+1)(x+1)}$

iii. $\dfrac{-4x^3+x^2+9x-4}{(x+1)^2(x-3)}$ iv. $\dfrac{2(x^2+3x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

v. $2x+6$ vi. $\dfrac{x+3}{x+9}$

vii. $\dfrac{-(x+3)(4x+7)}{(-x-1)^2(x+2)}$ viii. $\dfrac{-2x-7}{(x-2)(x-3)}$

ix. $\dfrac{x^2-5x-42}{(x^2-9)(x+4)(x+5)}$ x. $\dfrac{2(x^2+5)}{4x^2+x+2}$

Exercise 5.3

1. i. $6x-5y$ ii. $3x+\dfrac{1}{x}$ iii. $2x^2y^2-\dfrac{3xy}{z^2}$

iv. $2\sqrt{9(2x-3)^2+2y(24+10x-15)}$ v. $\sqrt{\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-4\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2}$

vi. $x-1+\dfrac{1}{x}$ vii. $x^2-4+\dfrac{1}{x^2}$ viii. $x^3-2+\dfrac{1}{x^3}$

2. i. x^2+x+1 ii. $(x-1)(x-3)$ iii. $(x+3)(x+5)(x+2)$

iv. $\left(\frac{x}{y}+7-\frac{y}{x}\right)$ v. $x-1+\frac{1}{x}$ vi. $x+\frac{y}{3}+3z$

vii. $x^2-4+\frac{1}{x^2}$ viii. $x^3-2+\frac{1}{x^3}$

3. -7 4. $-\left(24x^2-9\right)$ 5. $m=20$ 6. $p=-56,\ q=-49$

Review Exercise 5

1. i. True ii. False iii. False iv. False v. True

2. i. 2 ii. $p(x)xq(x)$ iii. y

iv. $(y+1)(y+2)(y+3)$ v. $y+\frac{1}{y}$

3. i. d ii. d iii. b iv. c v. b vi. d

vii. c viii. b ix. b x. c

Exercise 6.1

1. i. $x=20$ ii. $x=-12$ iii. $x=30$ iv. $x=40$

v. $y=\frac{1}{15}$ vi. $y=\frac{11}{20}$ vii. $x=\frac{44}{17}$ viii. $x=105$

ix. $\frac{105}{13}$ x. $x=1$ xi. $x=-\frac{20}{7}$ xii. $x=12$

xiii. $x=-\frac{5}{4}$ xiv. $x=-4$ xv. $m=\frac{-11}{6}$

2. $x=\frac{25}{2}$ 3. $x=7$ 4. بلال = 18 سال
علي = 12 سال

5. i. $x=1$ ii. $x=10$ iii. $y=100$

iv. $x=-12$ v. $y=143$ vi. $x=4$

vii. viii. $x=81$ ix. $x=80$

Exercise 6.2

1. i. $\left\{-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ ii. $\left\{1, \frac{19}{5}\right\}$ iii. $\{-42, 42\}$ iv. $\left\{-\frac{25}{2}, \frac{23}{2}\right\}$

   v. $\left\{-\frac{9}{5}, 3\right\}$ vi. $\left\{-\frac{78}{5}, \frac{76}{5}\right\}$ vii. $\left\{-\frac{23}{2}, \frac{17}{2}\right\}$ viii. $\{-10, 6\}$

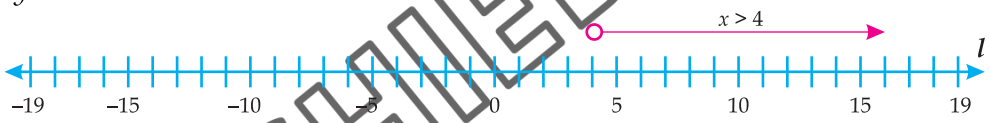
   ix. $\left\{\frac{-19}{14}, \frac{-13}{14}\right\}$ x. $\{-41, 44\}$

2. $x \geq 87$ 3. $\frac{-8}{3}, \frac{-4}{3}$

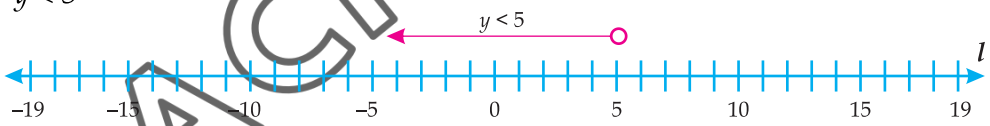
Exercise 6.3

1. i. $x > 13$

ii. $y < 5$



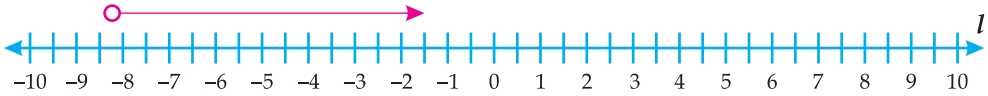
iii. $y < 5$



iv. $-\frac{5}{3} < x$ یا $x < -1$

v. $-\frac{19}{2} < y$ یا $y < \frac{3}{2}$

vi. $y > -\frac{33}{4}$

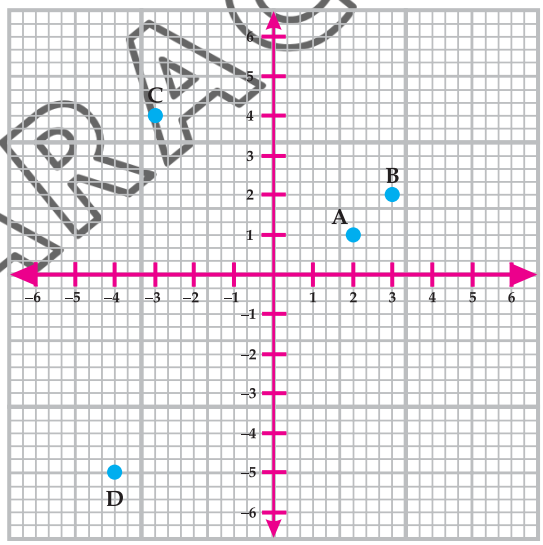


Review Exercise 6

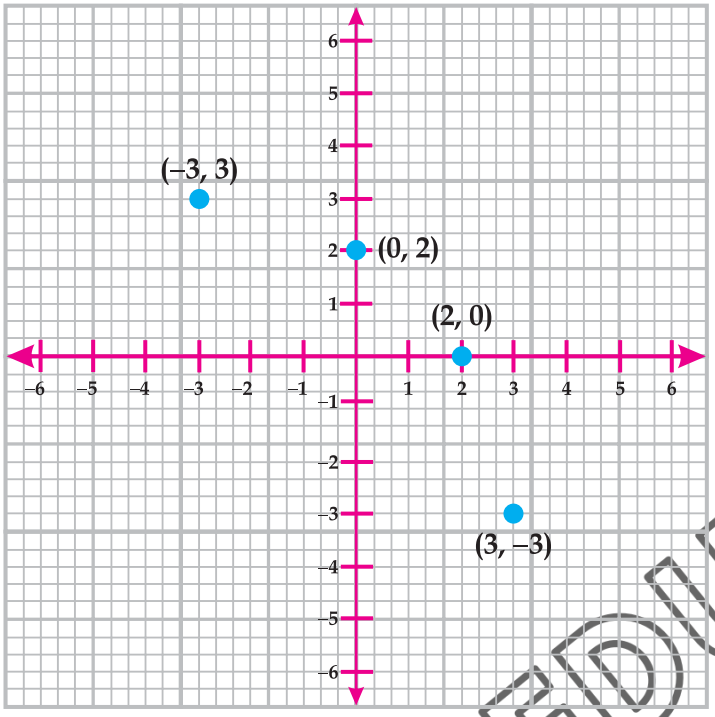
1. i. T ii. F iii. F iv. F v. T
2. i. 2 ii. $p(x)xq(x)$ iii. y
   iv. $(y+1)(y+2)(y+3)$ v. $y+\frac{1}{y}$
3. i. a ii. a c a iii. b iv. c
   v. c vi. c c a

Exercise 7.1

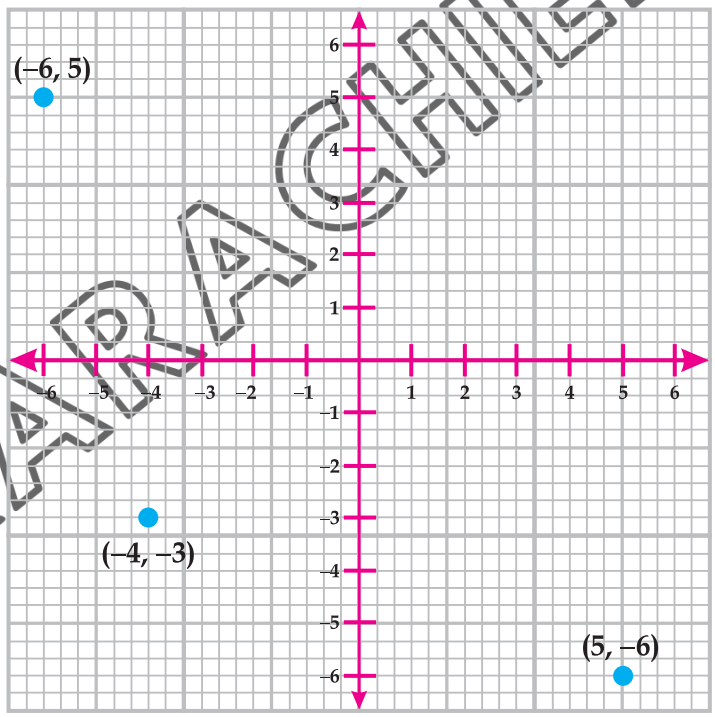
1. i. $x=-2,\ y=2$ ii. $x=5,\ y=-1$ iii. $x=4,\ y=0$
   iv. $x=4,\ y=0$ v. $x=3,\ y=4$ vi. $x=-\sqrt{8},\ y=\sqrt{8}$
2. i. چوٿائيءِ موجود آهي - IV ii. چوٿائيءِ موجود آهي - II
   iii. چوٿائيءِ موجود آهي - IV iv. چوٿائيءِ موجود آهي – III
   v. چوٿائيءِ موجود آهي - I vi. چوٿائيءِ موجود آهي - I
3. i.



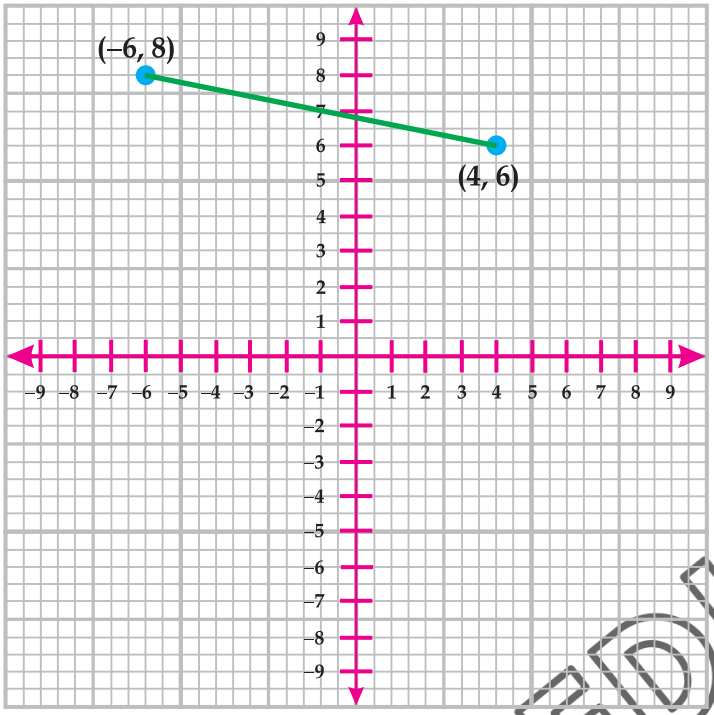
ii.



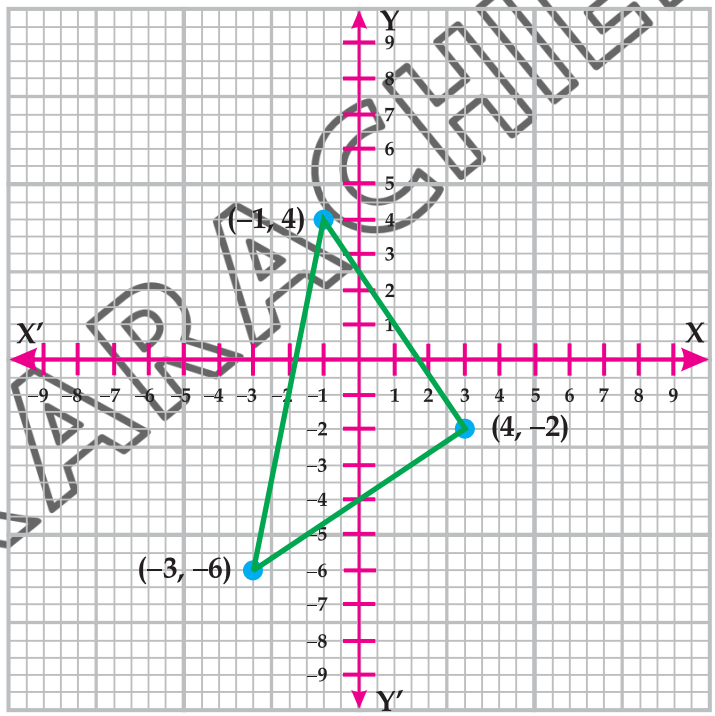
iii.



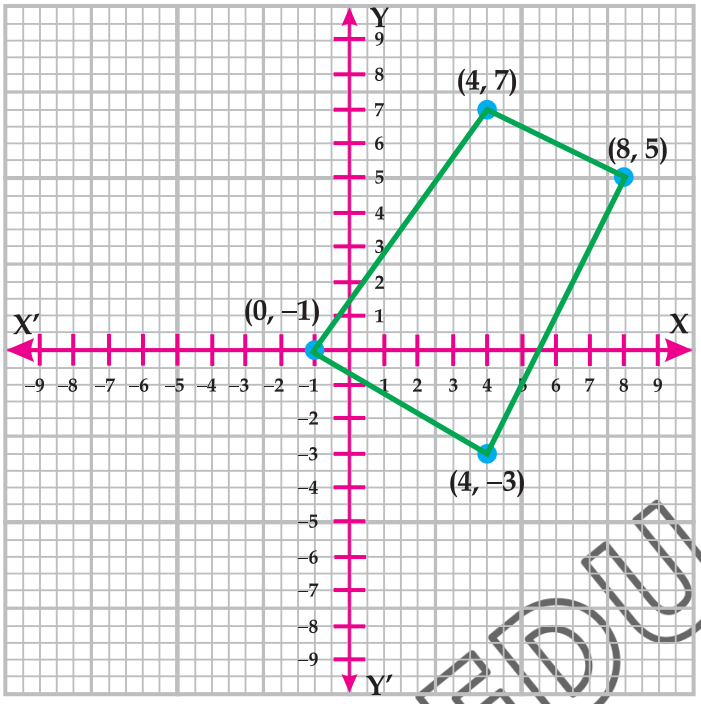
4.



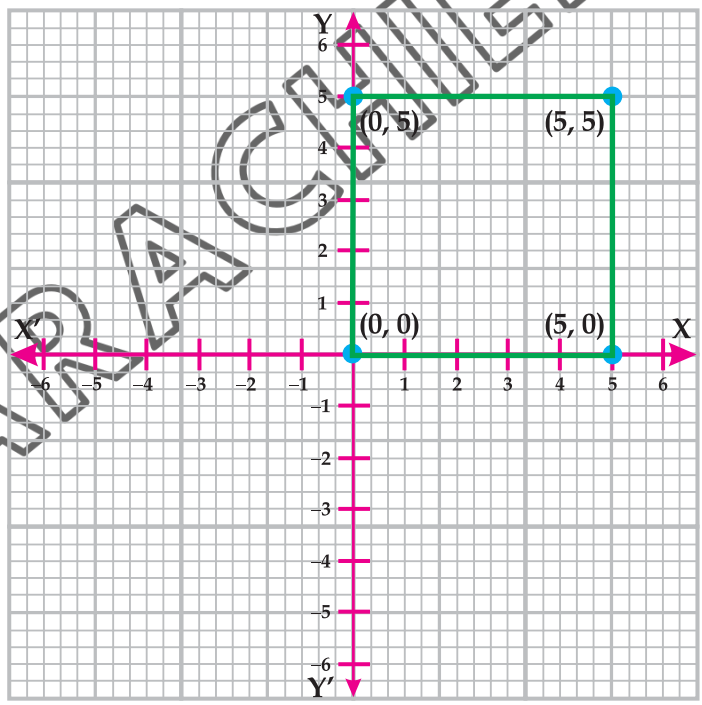
5.



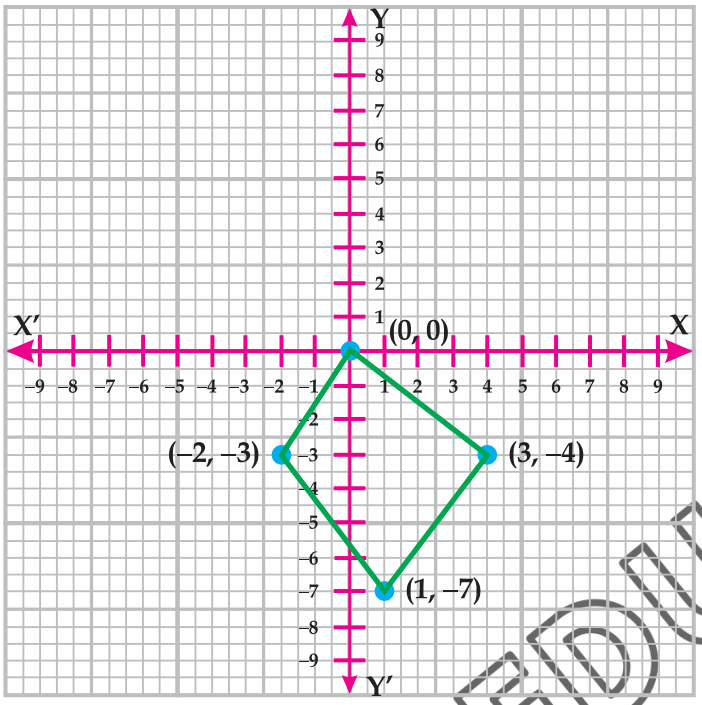
6.



7.



8.



9. i. $y = 2 - x$

X	–3	–2	–1	0	1	2	3
Y	5	4	3	2	1	0	–1

ii. $y = 2x - 6$

X	–3	–2	–1	0	1	2	3
Y	–12	–10	–8	–6	–4	–2	0

iii. $x = 12 - 2y$

Y	–3	–2	–1	0	1	2	3
X	18	16	14	12	10	8	6

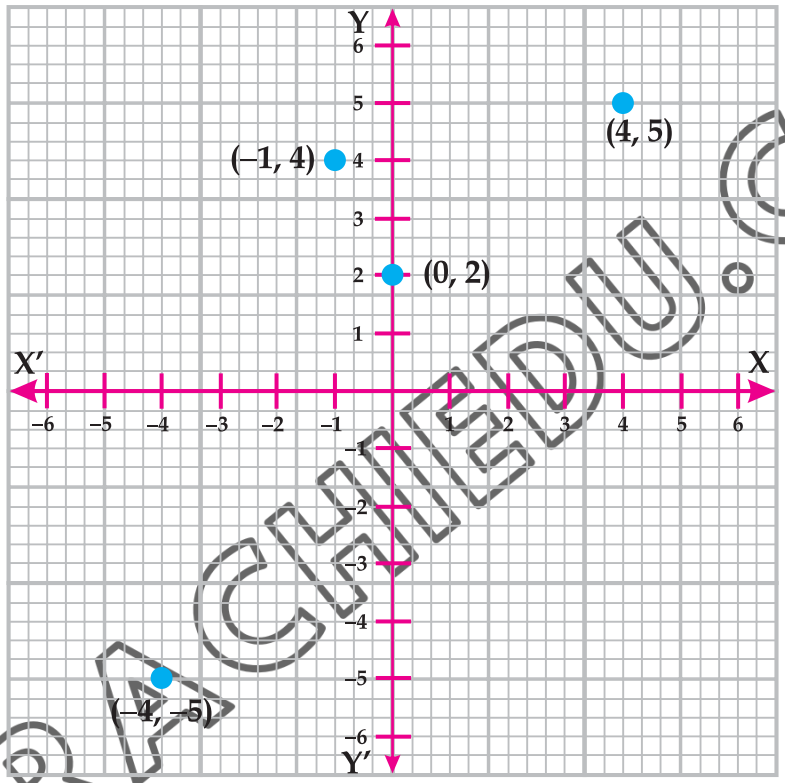
iv. $x = 2y - 3$

Y	–3	–2	–1	0	1	2	3
X	–9	–7	–5	–3	–1	1	3

Exercise 7.2

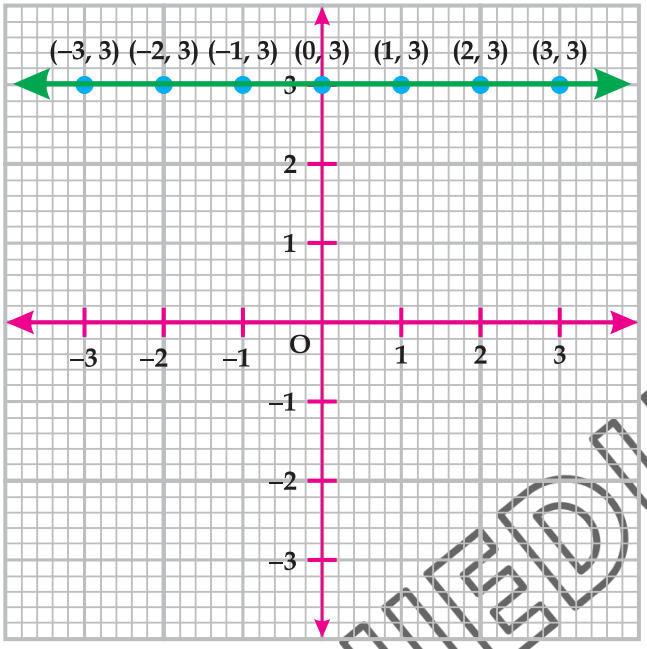
1. $y = 6 - x$

X	–3	–2	–1	0	1	2	3
Y	9	8	7	6	5	4	3



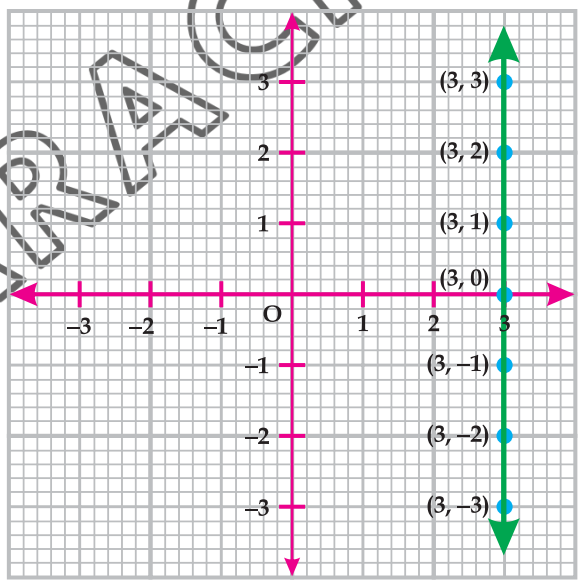
3. **i.**

X	–3	–2	–1	0	1	2	3
Y	3	3	3	3	3	3	3



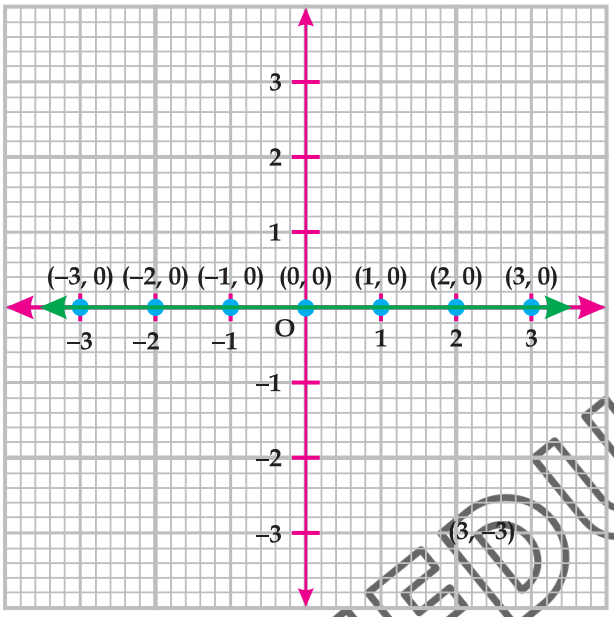
ii.

X	3	3	3	3	3	3	3
Y	–3	–2	–1	0	1	2	3



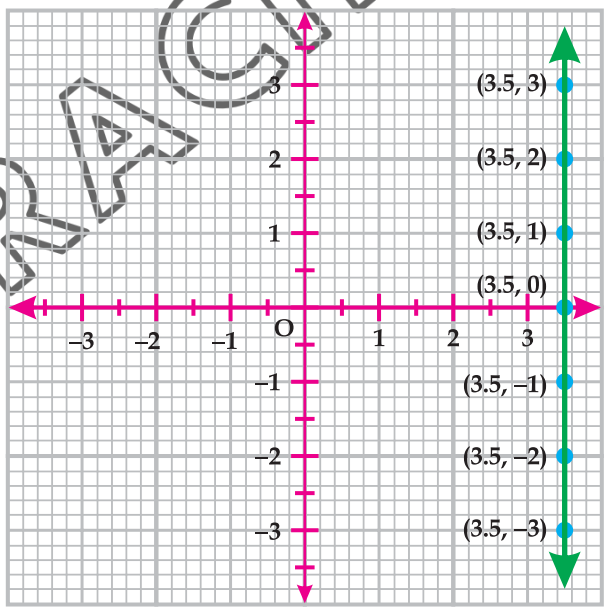
iii.

X	–3	–2	–1	0	1	2	3
Y	0	0	0	0	0	0	0



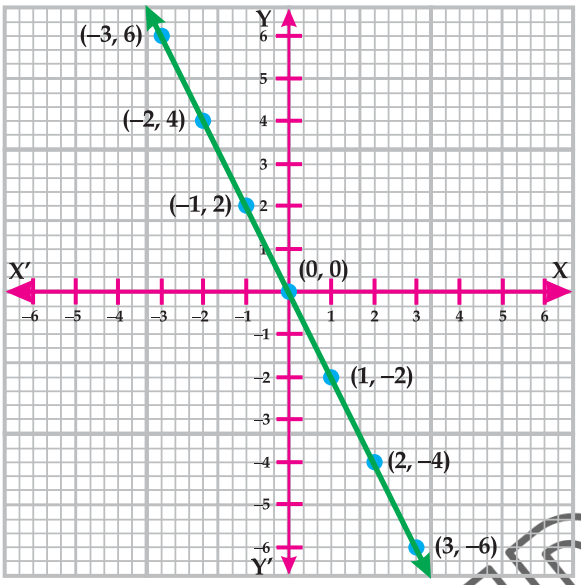
v.

X	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
Y	–3	–2	–1	0	1	2	3



vi.

X	–3	–2	–1	0	1	2	3
Y	6	4	2	0	–2	–4	–6



4. i.

مساوات	X - محدد	Y - محدد
$y = \frac{1}{2}x$	0	0
	4	2

ii.

مساوات	X - محدد	Y - محدد
$y = \frac{2}{3}y$	1	$\frac{3}{2}$
	1	$\frac{3}{2}$

iii.

مساوات	X - محدد	Y - محدد
$2x + 4y = 8$	0	2
	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$

iv.

مساوات	X - محدد	Y - محدد
$2x + y = 6$	1	4
	3	0

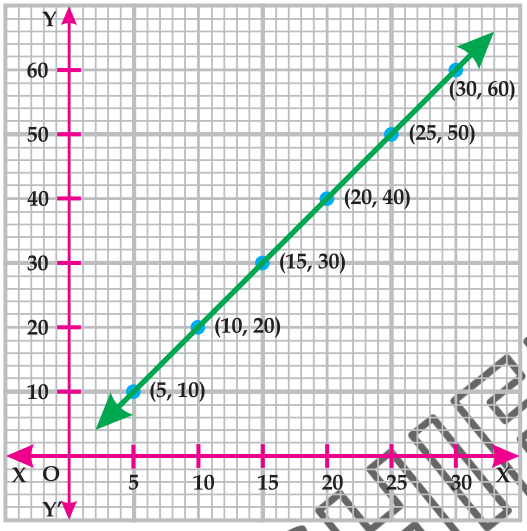
v.

مساوات	X - محدد	Y - محدد
$x-y=2$	2	0
	1	–1

vi.

مساوات	X - محدد	Y - محدد
$x-3y=6$	3	–1
	3	–1

5.



6. a. 100ڪلوميٽرسواري ڪرڻ لاءِ عائشہ کي گهربل وقت 5 ڪلاڪ آهي
b. توٿل3 ڪلاڪن ۾عائشہ جو طئ ڪيل مفاصلو60 ڪلوميٽرآهي

Exercise 7.3

ڪلوميٽر

1. i. 1.6ڪلوميٽر ii. 4.8ڪلوميٽر iii. 1.2 ميل iv. 4.9ميل ۽ 5 ميل
2. i. 5 acres ii. 12 acres iii. 2 hectares iv. 6 hectares
3. i. 35.6°F ii. 35.24°F iii. 0°C iv. 2.44°C
4. i. 131.8روپيہ ii. 228.47 روپيہ iii. 3.41 ريال iv. 1.78 ريال
5. i. $\{3,-2\}$ ii. $\{3,1\}$ iii. $\{3,1\}$ iv. $\{4,7\}$ v. $\{1,1\}$
vi. $\{-3,-4\}$ vii. $\{-3,2\}$ viii. $\{1,1\}$ ix. $\{8,4\}$ x. $\{5,1\}$

Review Exercise 7

1. i. T ii. F iii. F iv. F
3. i. *c* ii. *b* iii. *a* iv. *b* v. *c* vi. *a* vii. *a*

Exercise 8.1

1. i. $\{-2,-3\}$ ii. $\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\}$ iii. $\{6,5\}$ iv. $\{2,0\}$

   v. $\{5,-3\}$ vi. $\left\{\frac{8}{3},\frac{3}{4}\right\}$ vii. $\{8,2\}$ viii. $\left\{0,-\frac{8}{3}\right\}$

2. i. $\{2\sqrt{2}-3, 2\sqrt{2}-3\}$ ii. $\left\{0,-\frac{10}{3}\right\}$ iii. $\left\{\frac{4+\sqrt{3}}{3},\frac{4-\sqrt{3}}{3}\right\}$

   iv. $\left\{\frac{3}{4},-\frac{7}{6}\right\}$ v. $\left\{4,-\frac{3}{2}\right\}$ vi. $\left\{\frac{-1+\sqrt{6}}{2},\frac{-1-\sqrt{6}}{2}\right\}$

3. i. $b=-2$ ii. $\frac{-b-6}{3}$

Exercise 8.2

1. i. $\{5,-3\}$ ii. $\left\{\frac{3}{5},\frac{5}{2}\right\}$

   iii. $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ iv. $\left\{\frac{-1+2\sqrt{7}}{3},\frac{-1-2\sqrt{7}}{3}\right\}$

   v. $\left\{\frac{2+3i\sqrt{5}}{3},\frac{2-3i\sqrt{5}}{3}\right\}$ vi. $\left\{\frac{-3+\sqrt{41}}{4},\frac{-3-\sqrt{41}}{4}\right\}$

   vii. $\left\{\frac{1+i\sqrt{5}}{3},\frac{1-i\sqrt{5}}{3}\right\}$ viii. $\left\{\frac{1}{2},\frac{-1}{3}\right\}$

   ix. $\left\{\frac{5}{2},0\right\}$ x. $\{1,-1\}$

   xi. $\{3,3\}$ xii. $\{\sqrt{14},-\sqrt{14}\}$

Exercise 8.3

1. i. $\{\pm 3, \pm i\}$ ii. $\{\pm 2, \pm i\}$

iii. $\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$ iv. $\left\{-\frac{3}{4}, -2\right\}$

v. $\left\{\frac{\pm\sqrt{\left(6+2\sqrt{14}\right)3}}{3}\right\}$ vi. $\{-1, 2\}$

vii. viii. $\{1\}$

ix. $\{1+i, 1-i\}$ x. $\{-2\}$

xi. حل نہ آھي xii. $\left\{\frac{-7\pm\sqrt{45+4\sqrt{81}}}{2}, \frac{-7\pm\sqrt{45-4\sqrt{81}}}{2}\right\}$

xiii. xiv. $\{-1, 1\}$

xv. $\left\{1, \frac{1\pm i\sqrt{55}}{2}\right\}$ xvi.

Exercise 8.4

2. i. $x=4$ ii. $x=6$ iii. $x=1$

iv. $x=2$ v. $\{3, 0\}$ vi. $\{1, -4\}$

1. i. 2 ii. $ax^2+bx+c=0$ iii. سگھ واري صورت

iv. $x=2$ v. $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. i. b ii. a iii. c iv. a v. a

vi. c vii. b viii. a ix. c x. a

3. i. F ii. T iii. F iv. F

v. F vi. T vii. T

Review Exercise 9

1. 30°

2. i. T ii. F iii. T iv. F v. F

3. i. $\overline{DF}$ ii. $\angle PQR$ iii. 65°
iv. ٽپور پاسو v. هئپاٽينيوز vi. 180°

4. i. *b* ii. *c* iii. *b* iv. *c*

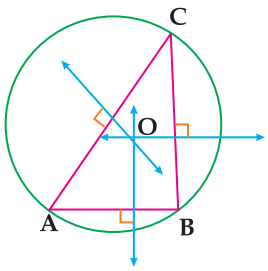
Review Exercise 10

1. i. يڪسان ii. يڪسان iii. يڪسان iv. اڏڪندڙ
v. برابر vi. يڪسان vii. 180°

2. i. *d* ii. *a* iii. *d* iv. *a* v. *c*
vi. *b* vii. *b* viii. *a*

Exercise 11.1

3. گول جو مرڪز ليڪ جي عمودي اڏڪندڙ جي ميلاپ سان حاصل ٿيندوآهي ڇاڪاڻ ته هي ڪپندڙ ٽپڪو هر هڪ ليڪ کان هڪ جيتري مفاصلي تي هوندوآهي



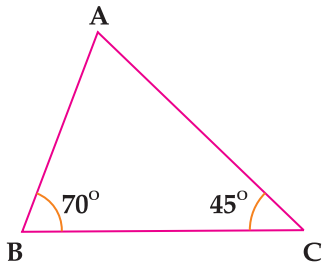
Review Exercise 11

3. i. T ii. F iii. T

4. i. *c* ii. *a* iii. *b* iv. *a*

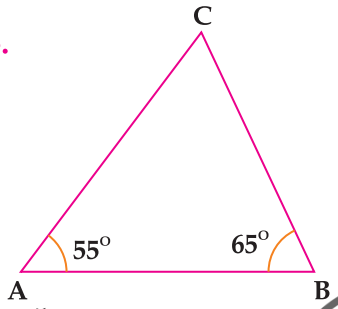
Exercise 12.1

2.



AC پاسو وڏي ۾ وڏو آهي

3.



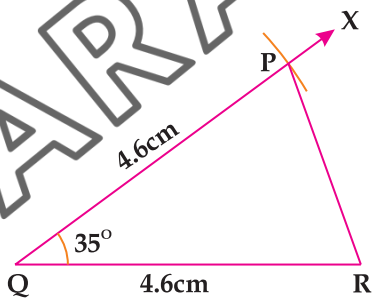
BC پاسو نندي ۾ نندو آهي

Review Exercise 12

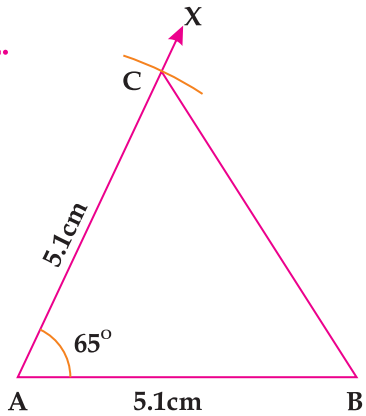
1. i. T ii. F iii. T iv. F v. True
2. i. عمود ii. وڏو آهي iii. BC
3. i. a ii. b

Exercise 13.1

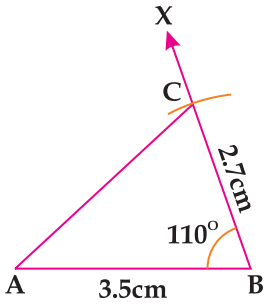
1.



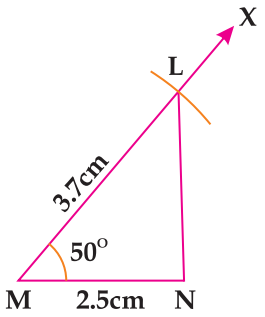
2.



3.

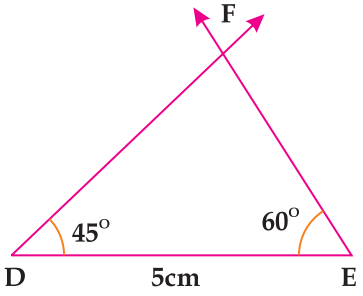


4.

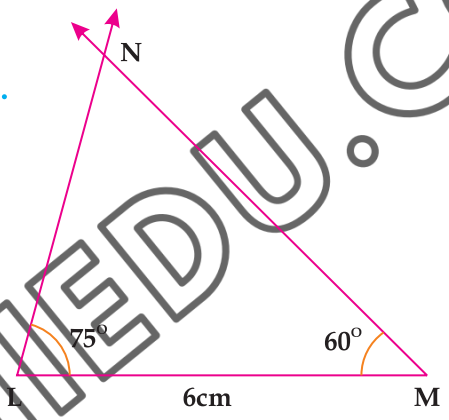


6.

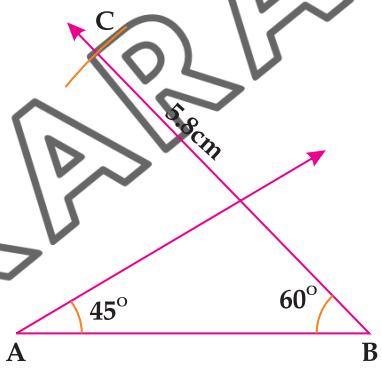
i.



ii.

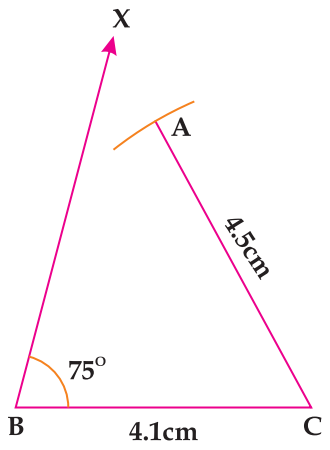


iii.

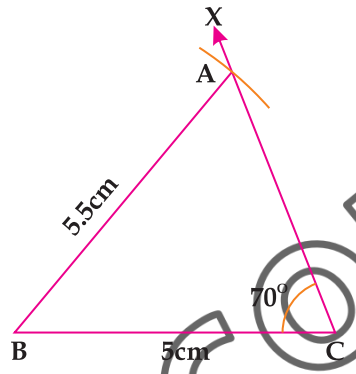


7.

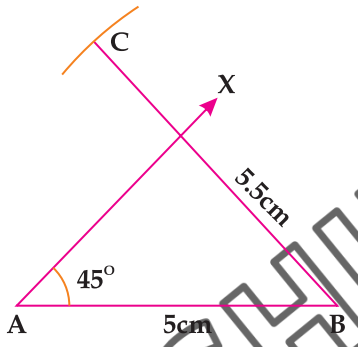
i.



ii.

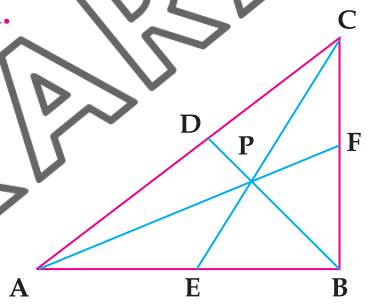


iii.

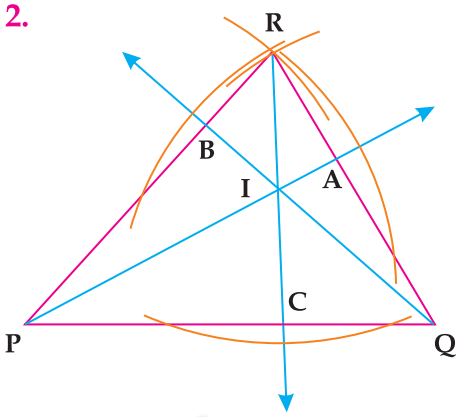


Exercise 13.2

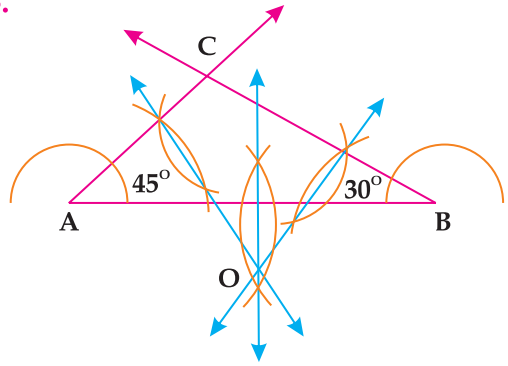
1.



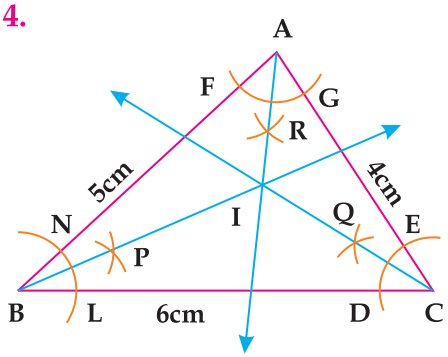
2.



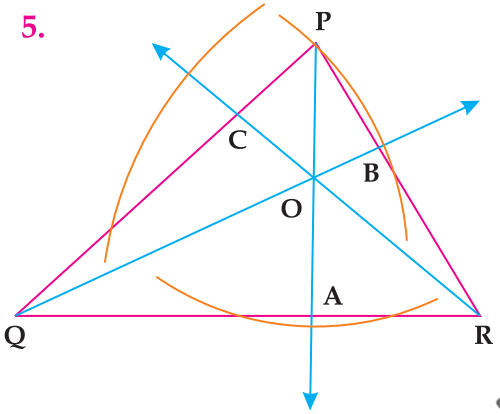
3.



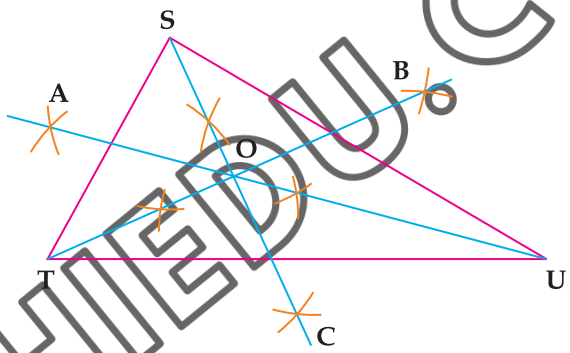
4.



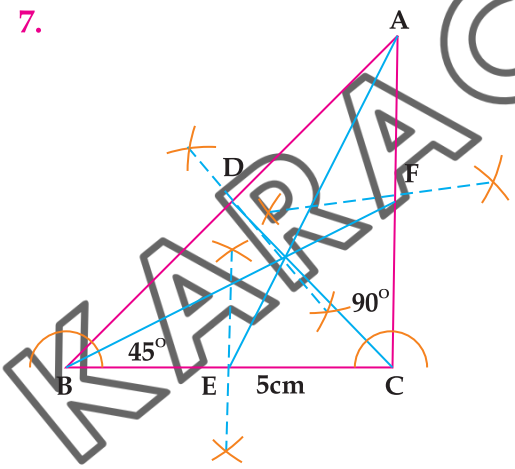
5.



6.

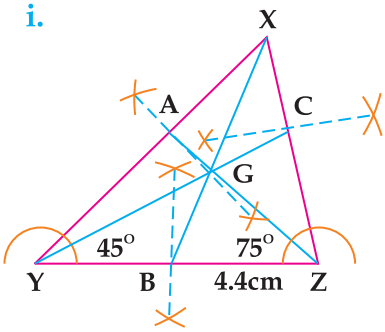


7.

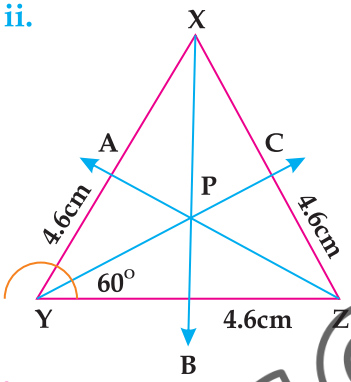


8.

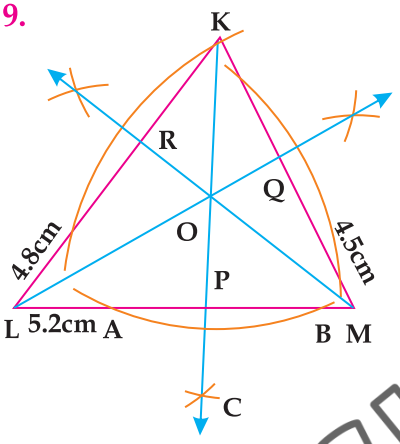
i.



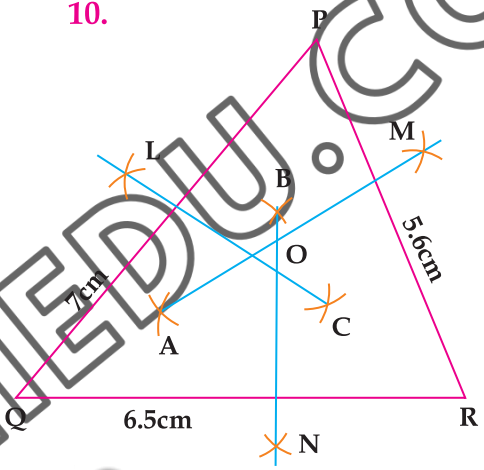
ii.



9.

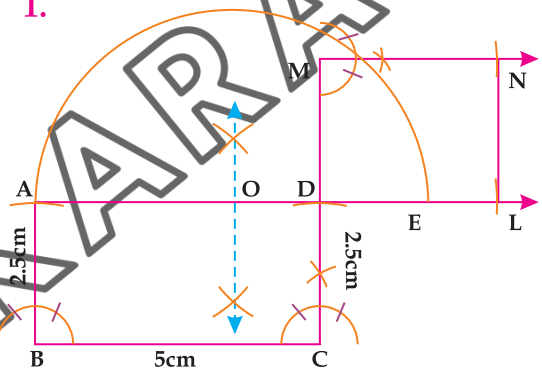


10.

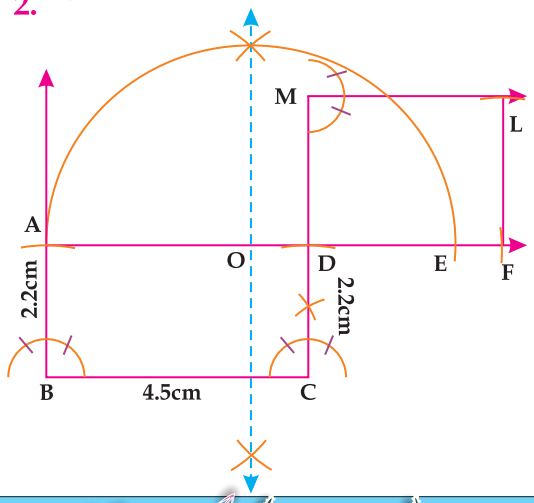


Exercise 13.3

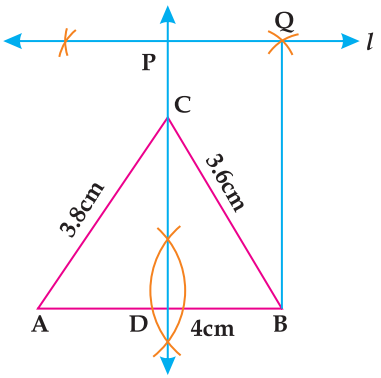
1.



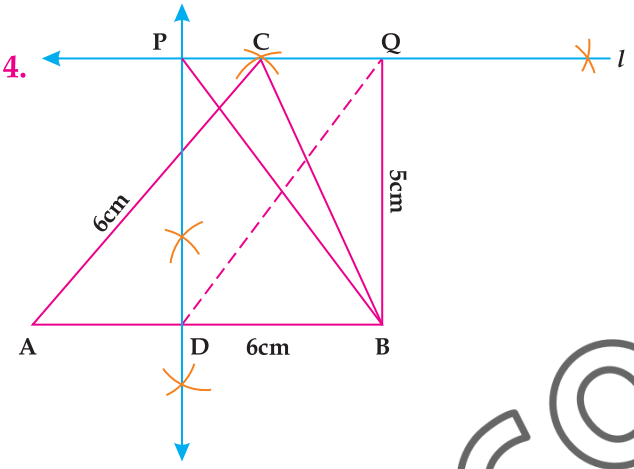
2.



3.



4.



Review Exercise 13

1. i. هئپاٹینیوز ii. ٹکندي جوعمود iii. Median
   iv. هک جیتري مفاصلي تي v. برابر

2. i. *c* ii. *b* iii. *c* iv. *b* v. *a*
   vi. *d* vii. *c* viii. *b* ix. *d*

Exercise 14.1

3. $\Delta BCD = 25.7cm$
4. ٹکندي جي ایراضي $\Delta ACD =$ ٹکندي جي ایراضي ΔBCD.
6. ٹکندي جا عمود
8. ایراضي $\Delta COD =$ ایراضي ΔDOA, ایراضي $\Delta AOB =$ ایراضي ΔBOC.

Review Exercise 14

1. i. T ii. T iii. F iv. T v. F
   vi. F vii. T viii. T

2. i. *c* ii. *b* iii. *c* iv. *b* v. *d* vi. *b*

Exercise 15.1

1. i. پاسو $AB = 3\sqrt{7}cm$, ايراضي $=8cm$
   ii. پاسي جي ڊيگهه $AB = 4\sqrt{7}cm$, ايراضي $=14cm$
2. پاسي جي ڊيگهه $AC = 2cm$, ايراضي $=6cm$
3. پاسي جي ڊيگهه $AC = 4cm$, ايراضي $=17cm$

Exercise 15.2

1. i. $m\overline{AB} = 10cm$ ii. $x = 6$ iii. $x = 1$
   iv. $x = 2$ v. $\{3, 0\}$ vi. $\{1, -4\}$
2. $m\overline{AB} = 10cm$
3. $m\angle A = 37°$
4. اٽپور پاسو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو
5. اٽپور پاسو سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊو

Review Exercise 15

1. i. $(mBC)^2$ ii. ٽپور پاسو iii. iv. ٽڪنڊو
2. $m\overline{AB} = 8cm$

Exercise 16.1

1. i. $\sqrt{101}$ ii. 1 iii. $2\sqrt{2}$ iv. $2\sqrt{2}$
2. i. $4\sqrt{2}$ ii. $\sqrt{117}$ 1 iii. 5 iv. $\sqrt{6}$
3. $P = 12$

Exercise 16.2

4. ٽبڪا A, B ۽ C پيورپاسو ٽڪنڊو ٺاهيندا
5. ٽبڪا A, B ۽ C گوني ڪنڊٽڪنڊوٺاهيندا
6. $K = 4, K = -2$ يا $\{4, -2\}$
9. چا ڪاڻ تہ چورسن جا پاسا برابر هوندو آهن ۽ هي ٽبڪا برابر آهن

Exercise 16.3

1. i. $(-1,7)$ ii. $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ iii. $(-4,3)$ iv. $\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$

2. $(-1,1)$ 3. $B=(2,2)$ 4. $(4,5)$

Review Exercise 16

1. i. T ii. F iii. F iv. F v. T
vi. T vii. F viii. T ix. T

2. i. $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ii. لیک iii. $y<0$

3. i. c ii. a iii. d iv. d