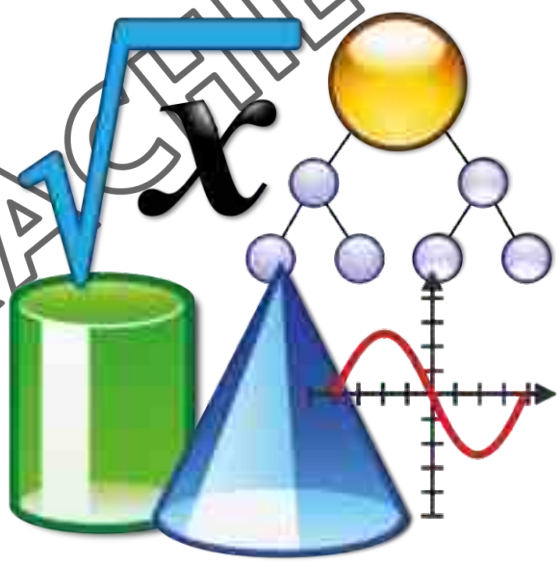
آزمائشي چاپو



درسي ڪتاب

رياضي

10 ڪلاس لاءِ



KARACHIEDU.COM

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ، جام شورو

سڀ حق ۽ واسطا **سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ جامشورو** وٽ محفوظ آهن.

پاران **سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ جامشورو**

ڊائريڪٽوريٽ آف ڪريڪيولم ۽ ريسرچ سنڌ جامشور جي صوبائي ريويو ڪميٽي پاران نظرثاني ڪيل. **بورڊ آف انٽرميڊيئيٽ اينڊ سيڪنڊري ايجوڪيشن، حيدرآباد، ڪراچي، سکر، لاڙڪاڻو، ميرپورخاص ۽ شهيد بينظيرآباد** پاران سيڪنڊري ڪلاسن لاءِ درسي ڪتاب طور منظور ٿيل.

اسڪول ايجوڪيشن اينڊ لٽريسي ڊپارٽمينٽ حڪومت سنڌ کان

نوٽيفڪيشن نمبر No. SELD/CA/CW/396/2021 موجب منظور شده.

نگران اعلىٰ

پرويز احمد بلوچ

چيئرمين سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

داريوش ڪاڦي

سپروائيزر

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

يوسف احمد شيخ

چيف سپروائيزر

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ

ليکڪ:

- مسٽر عبدل سليم ميمڻ
- مسٽر اعجاز علي سبهپوٽو
- ڊاڪٽر ڪاشف علي ابڙو
- ڊاڪٽر محمد مجتبيٰ شيخ
- پروفيسر محمد فاروق خان
- ڊاڪٽر حفيظ الله مهر

نظرثاني:

- پروفيسر ڊاڪٽر زين العابدين کهرو
- پروفيسر محمد فاروق خان
- مسٽر محمد صغير شيخ
- مسٽر اعجاز علي سبهپوٽو
- مسٽر محمد وسيم
- مسٽر زوهيب حسيب
- مسٽر رياض حسين
- مسٽر آفتاب علي
- مسٽر مير سرفراز خليل ساند

سنڌيڪار

- مسٽر اعجاز علي سبهپوٽو

ايڊيٽر

- ڊاڪٽر زبير احمد ڪلهوڙو
- مسٽر مير سرفراز خليل ساند

ڊيزائننگ ۽ لي آئوٽ

- مسٽرمحمد ارسلان شفاعت گدي

KARACHIEDU.COM

چيپندڙ:

مهاڳ

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ هڪ اهڙو تعليمي ادارو آهي، جنهن جو ڪم درسي ڪتابن جي تيار ۽ اشاعت ڪرڻ آهي. هن جو اهم مقصد اهڙن درسي ڪتابن جي تيار ۽ فراهمي آهي، جيڪي نئين نسل کي جاڻ ، هنر سان گڏوگڏ منجهن اهڙي صلاحيت پيدا ڪن، جنهن جي ذريعي اهي آفاقي نظرين، پائيچاري، بزرگن جي ڪارنامن، پنهنجي ثقافتي ورثي، روايت جي حفاظت ڪندي، نئين دور جي سائنسي، ٽيڪنيڪي ۽ سماجي تقاضائن کي پورو ڪري ڪامياب زندگي گذاري سگهن.

درسي ڪتاب رياضي ڪلاس X جو توهان جي هٿ ۾ آهي، جيڪو صوبائي نصاب 2017 مطابق رياضي جي تسلسل ۾ تيار ڪيو ويو آهي. نصاب 30 يونٽن تي مشتمل آهي، انهن مان پهرين 16 يونٽن کي رياضي ڪلاس IX ۾ شامل ڪيو ويو. تنهن ڪري، باقي 14 يونٽ (17 کان 30 تائين) رياضي جي هن درسي ڪتاب ۾ شامل آهن.

سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ هن ڪتاب جي اشاعت لاءِ تمام تر تڪليفن محدود وسائل جي باوجود ڪتاب تي خاصو خرچ ڪيو آهي.

ڪوبہ ڪتاب يقيناً حرف آخر نہ هوندو آهي، ۽ ان ۾ هر وقت بهتري جي گنجائش هوندي آهي، جڏهن تہ ليڪڪ، پنهجي پوري صلاحيتن کي استعمال ڪندي مڪمل تصورن ۽ وضاحتن کي چٽي نموني پيش ڪيو آهي. هن ۾ اجا بہ ڪيترين ئي خاميون ٿي سگهن ٿيون تنهن لاءِ ماهر استادن ۽ شاگردن کي عرض رکجي ٿو تہ اٽپوري لکائي، يا اٽپورين شڪلين بابت نشاندهي ڪن ۽ پنهنجيون تجويزون ۽ رايا ڏين تہ جيئن ڪتابن کي ايندڙ چاپي ۾ سڌاريو وڃي.

آخر ۾ آئون ائسوسيئيشن فار اڪيبدمڪ ڪوالٽي (آفاق)، اسان جي ماهر ليکڪ، ايڊيٽرن ۽ بورڊ جي ماهر عملي جو سندن تعليم جي لاءِ اڻ ٽڪ محنت ۽ ڪوششن لاءِ شڪر گذار آهيان.

چيئرمين
سنڌ ٽيڪسٽ بڪ بورڊ، جامشورو

KARACHIEDU.COM

بِسۡمِ اللّٰہِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِیۡمِ

فهرست

يونٽ نمبر	عنوان	صفحو
يونٽ 17	سيٽ ۽ عمل	01 - 35
يونٽ 18	قيرقار يا متجڙ	36 - 56
يونٽ 19	قالب ۽ قطعي مُلهه	57 - 82
يونٽ 20	۾ درجي مساواتن جو نظريو	83 - 113
يونٽ 21	جزوي پاڳا	114 - 126
يونٽ 22	بنيادي شماريات	127 - 174
يونٽ 23	فيثا غورث سڌيان	175 - 181
يونٽ 24	نسبت ۽ تناسب	182 - 193
يونٽ 25	گول جا زهه	194 - 207
يونٽ 26	گول جون ڇهڻي ليڪون	208 - 222
يونٽ 27	زهه ۽ قوس	223 - 231
يونٽ 28	گول جي سيگمينٽ ۽ ڪندون	232 - 241
يونٽ 29	عملي جاميٽري گول	242 - 264
يونٽ 30	ٽرگنا ميٽري جو تعارف	265 - 294
	جواب	295 - 312

سيٽ ۽ عمل
SETS AND FUNCTIONS

17 يونٽ

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- سيٽن کي $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{E}$، $\mathbb{O}$، $\mathbb{P}$، $\mathbb{Q}$ ۽ $\mathbb{R}$ سان ظاهر ڪرڻ جو ڏڙڪن
- سيٽن جا قسم ۽ ظاهر ڪرڻ جا نمونا
  - سيٽن تي عمل
  - ميلاپ
  - ڪاٽ
  - فرق
  - ڪامپليمينٽ
- ٻن سيٽن جو همشڪلي فرق
- ٻن يا ٽن سيٽن جي ميلاپ ۽ ڪاٽ وارين هيٺين بنيادي خاصيتن جون رسمي ثابتيون ڏين
  - ميلاپ جي مٽا واري خاصيت
  - ڪاٽ جي مٽا واري خاصيت
  - ميلاپ جي سنگت واري خاصيت
  - ڪاٽا جي سنگت واري خاصيت
  - ميلاپ جي ڪاٽ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت
  - ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت
- ڊي مارگن جا قانون
- ڏنل سيٽن جي بنيادي خاصيتن جي چڪاس ڪن
- وين شڪلين وسيلي هيٺيان ڏيکارڻ
  - سيٽن جو ميلاپ ۽ ڪاٽا
  - سيٽ جو ڪامپليمينٽ
  - ٻن سيٽن جو همشڪلي فرق
- وين شڪل وسيلي هيٺين جي چڪاس ڪريو
  - ميلاپ ۽ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت
  - سنگت وارا قانون
  - ورهاست وارا قانون
  - ڊي مارگن جا قانون
- ترتيت ڏنل جوڙن جي سڃاڻپ ڪن
- ڪارتيسي ضرب اپت ناهين
- جوڙي واري تعلق کي بيان ڪن ۽ ان جي ڊومين ۽ رينج جي سڃاڻپ ڪن
- عمل کي بيان ڪن ۽ ڊومين ، کو ڊومين ۽ رينج جي سڃاڻپ ڪن
- هيٺين جي وضاحت ڪري سمجهن
  - انٽو ۽ ون - ون عمل (انجيڪٽو عمل)
  - آنٽو عمل (سرجيڪٽو عمل)
  - ون - ون ۽ آنٽو عمل (بائيجيڪٽو عمل)
- جاچ ڪري سگهن ته ڇا ڏنل تعلق هڪ عمل آهي يا نه
- ون - ون عمل ۽ ون - ون مطابقت جي وچ ۾ فرق ڪري سگهن

17.1 سيٽن تي عمل (Operations on Sets):

17.1(i) سيٽن کي $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{E}, \mathbb{O}, \mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ سان ظاهر ڪرڻ جو دؤر :

حقيقت ۾ سيٽ، رياضي جي بنيادي تصورن مان هڪ آهي جيڪو رياضي جي ڪيترن ئي نظرين جي ناهڻ ۽ انهن جو تجزيو ڪرڻ ۾ ڪارائتو آهي. سيٽ جي تصور تي هينئن ڪلاسن ۾ اڳيئي تفصيل سان بحث ٿي چڪو آهي. اچو تہ ڪجهہ اهم سيٽن جو دؤر ڪريون.

قدرتي عددن جو سيٽ: $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$

مڪمل يا پورن عددن جو سيٽ: $\mathbb{W} = \{0,1,2,3,...\}$

سڄن عددن جو سيٽ: $\mathbb{Z} = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\}$

ٻڌي عددن جو سيٽ: $\mathbb{E} = \{0,\pm2,\pm4,\pm6,...\}$

اڪي عددن جو سيٽ: $\mathbb{O} = \{\pm1,\pm3,\pm5,...\}$

مفرد عددن جو سيٽ: $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,...\}$

ناطق عددن جو سيٽ: $\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q};\ p,q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$

غير ناطق عددن جو سيٽ: $\mathbb{Q}' = \left\{x \mid x \neq \frac{p}{q};\ p,q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$

حقيقي عددن جو سيٽ: $\mathbb{R} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q} \vee x \neq \frac{p}{q};\ p,q \in Z \wedge q \neq 0\right\}$

يعني تہ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

نوٽ:

- $\mathbb{R}^+$ ۽ $\mathbb{R}^-$ ترتيبوار مثبت ۽ منفي حقيقي عددن جي سيٽ کي ظاهر ڪن ٿا.
- ناطق، غير ناطق ۽ حقيقي عددن جي سيٽن کي جدولي نموني ۾ نٿو لکجي سگهجي.
- مٿي ڏنل سيٽن کي هينئن ريت بہ ظاهر ڪري سگهجي ٿو. R ۽ Q', Q, P, O, E, Z, W, N

17.1 (ii) سيٽن جا قسم ۽ ظاهر ڪرڻ جا نمونا (Types of sets and representation of sets):

سڀ کان اڳ ۾ اسين سيٽن کي ظاهر ڪرڻ بابت غور ڪنداسين. اسين اڳيئي سيٽ کي ظاهر ڪرڻ وارن ٽن طريقن يا نمونن سان واقف آهيون جيڪي اسان هينئن ڪلاسن ۾ پڙهي چڪا آهيون. اهي آهن.

1. بياني نمونو (Descriptive form) 2. جدولي نمونو (Tabular form) 3. علامتي نمونو (Set-builder form)

اسانکي خبر آهي تہ، بياني طريقي ۾، هڪ سيٽ کي ان جي رکنن جي هڪجهڙي خاصيت جي مدد سان ڪنهن عام زبان ۾ بيان ڪيو ويندو آهي، جهڙوڪ:

$A =$ 5 ۽ 10 جي وچ وارن قدرتي عددن جو سيٽ

جدولي نموني ۾ هڪ سيٽ جي رُکنن کي وچين ڏنگيءَ جي اندر لکي يا داخل ڪري ، سيٽ کي بيان ڪيو ويندو آهي. مٿي ڏنل سيٽ کي جدولي نموني ۾ هيئن لکبو: $A = \{6,7,8,9\}$ جڏهن تہ علامتي نموني ۾ هڪ سيٽ جي رُکنن جي هڪجهڙي خاصيت لاءِ علامتن جو استعمال ڪندي، سيٽ کي بيان ڪبو آهي.

ڏنل سيٽ A کي علامتي نموني ۾ هيئن لکبو: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 5 < x < 10\}$

KARACHIEDU.COM

مثال 1: سيٽ $A=\{6,8,10,12\}$ کي بياني ۽ علامتي نموني ۾ لکو-

حل:

بياني نمونو: 5 ۽ 13 جي وچ وارن ٻڌي عددن جو سيٽ = A

علامتي نمونو: $A=\{x \mid x\in \mathbb{E} \wedge 5<x<13\}$

مثال 2: سيٽ $B=\{y \mid y\in \mathbb{P} \wedge y<10\}$ کي جدولي ۽ بياني نموني ۾ لکو:

حل:

جدولي نمونو: $B=\{2,3,5,7\}$

بياني نمونو: پهرين چئن مفرد عددن جو سيٽ = B

هاڻي اسين سيٽن جا ڪجهه قسم سکون ٿا.

خالي سيٽ (Empty set or Null set):

اهڙو سيٽ جنهن ۾ ڪو به رُڪن نه هجي، ان کي خالي سيٽ چئبو آهي. ان کي $\varnothing$ يا $\{\ \}$ سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور:

(i) A = 5 ۽ 6 جي وچ وارن ٻڌي عددن جو سيٽ

(ii) $B=\{x \mid x\in \mathbb{N} \wedge x<1\}$

محدود سيٽ (Finite Set):

هڪ سيٽ جنهن جي رُڪنن جو تعداد محدود هجي، ان کي محدود سيٽ چئبو آهي.

مثال طور:

(i) $A=\{10,12,14,...,50\}$

(ii) B = دنيا جي سڀني ملڪن جو سيٽ

ياد رکجي ته خالي سيٽ هڪ محدود سيٽ تصور ڪبو آهي.

لامحدود سيٽ (Infinite Set):

هڪ سيٽ جنهن جي رُڪنن جو تعداد محدود نه هجي، ان کي لامحدود سيٽ چئبو آهي.

مثال طور:

(i) $P=\{10,20,30,...\}$

(ii) $Q=\{x \mid x\in \mathbb{Q} \wedge 1\le x\le 2\}$

ماتحت سيٽ (Subset):

جيڪڏهن سيٽ A جو هر هڪ رُڪن يا ميمبر، سيٽ B جو به رُڪن هجي ته پوءِ A کي B جو ماتحت سيٽ چئبو. علامت ۾ ان کي هيئن لکبو: $A\subseteq B$

مثال طور: $A=\{2,3,5,7\}$ ، $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ۽ $C=\{6,7,8,9\}$

ته پوءِ $A\subseteq B$ پر $A\not\subseteq C$ (A ماتحت سيٽ نه آهي C جو)

نوٽ:

(i) هر هڪ سيٽ پنهنجي پاڻ جو ماتحت سيٽ هوندو آهي.

(ii) خالي سيٽ، هر هڪ سيٽ جو ماتحت سيٽ هوندو آهي.

(iii) هر هڪ غير خالي سيٽ جا گهٽ ۾ گهٽ به ماتحت سيٽ هوندا آهن.

(iv) n رُڪنن واري سيٽ جي ماتحت سيٽن جو تعداد 2^n آهي.

بالا سيٽ (Superset):

جيڪڏهن سيٽ A ماتحت سيٽ آهي سيٽ B جو ته پوءِ B کي A جو بالا سيٽ چئبو.

نشاني طور هيئن لکبو: $B\supseteq A$

مثال طور:

جيڪڏهن $X=\{a,e,i,o,u\}$ ۽ $Y=\{a,b,c,...,z\}$ ته پوءِ $Y\supseteq X$

SARACHIEDU.COM

برابر سيٽ (Equal Sets):

ٻہ ساڳي تعداد وارا سيٽ A ۽ B برابر سيٽ ڪوٺبا جيڪڏهن ٻنهي سيٽن جا سي رُڪن ساڳيا هجن.

علامتن ۾ هن ريت لکبو: $A = B$

اهڙيءَ طرح $A = B$ فقط ان صورت ۾ ئي ٿيندو جڏهن $A \subseteq B$ ۽ $B \subseteq A$

ساڳي ريت $A = B$ فقط ان صورت ۾ ئي ٿيندو جڏهن $A \supseteq B$ ۽ $B \supseteq A$

مثال: فرض ڪريو ته $A = \{1,2,3,6\}$، $B = \{x \mid x \in N \wedge x \leq 6\}$ ۽ 6 جي جزن جو سيٽ $C =$ هتي $A = C$ پر $A \neq B$

نوٽ: سيٽ A جي ترتيب(order of set A) جو مطلب A جي رُڪنن جو تعداد آهي. ان کي نشاني طور O(A) يا n(A) يا |A| لکبو.

هڪجهڙا سيٽ (Equivalent Sets):

ٻہ سيٽ A ۽ B هڪجهڙا سيٽ ڪوٺبا جيڪڏهن انهن جي رُڪنن جو تعداد برابر هجي.

علامتن ۾ هيئن لکبو: $A \sim B$ يعني $A \sim B$ ان صورت ۾ ئي ٿيندو جڏهن $O(A) = O(B)$

اهڙيءَ طرح جيڪڏهن $A \sim B$ ته پوءِ ٻنهي سيٽن جي رُڪنن جي وچ ۾ 1-1 مطابقت قائم ٿي سگهجي ٿي.

مثال طور: فرض ڪريو ته $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 64\}$ ۽ 5 کان گهٽ مفرد عددن جو سيٽ $B =$ هتي $A \sim B$ ڇاڪاڻ جو $O(A) = O(B) = 2$

واجب ماتحت سيٽ (Proper Subset):

فرض ڪريو ته سيٽ A ماتحت سيٽ آهي سيٽ B جو ته سيٽ A کي B جو واجب ماتحت سيٽ چئبو جيڪڏهن $A \neq B$ نشاني طور: اسين هن ريت لکنداسين: $A \subset B$

مثال طور: جيڪڏهن $A = \{2,4,6\}$ ۽ $B = \{2,4,6,8\}$ ته پوءِ $A \subset B$ ڇاڪاڻ جو A ماتحت سيٽ آهي B جو ۽ $A \neq B$

غير واجب ماتحت سيٽ (Improper Subset):

فرض ڪريو ته سيٽ A ماتحت سيٽ آهي سيٽ B جو ته سيٽ A کي B جو غير واجب ماتحت سيٽ چئبو جيڪڏهن $A = B$

مثال طور: جيڪڏهن $A = \{a,b,c\}$ ۽ انگريزي الف بي جي پهرين ٽن اکرن جو سيٽ $B =$ ته پوءِ A غير واجب ماتحت سيٽ آهي B جو يعني $A = B$

سگهه سيٽ (Power Set):

سيٽ A جي سڀني ماتحت سيٽن جي سيٽ کي A جو سگهه سيٽ چئبو آهي. اهو علامتن ۾ P(A) لکبو آهي

مثال طور: جيڪڏهن $A = \{x,y,z\}$ ته پوءِ $P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{y,z\}, \{x,z\}, \{x,y,z\}\}$

نوٽ: خالي سيٽ جو سگهه سيٽ غير خالي هوندو آهي.

واحد سيٽ (Singleton or Unit Set):

اهڙو سيٽ جنهن ۾ فقط هڪڙو رُڪن هجي، ان کي واحد سيٽ چئبو آهي.

مثال طور: $A = \{x \mid x \in W \wedge x < 1\}$ واحد سيٽ آهي.

ڪائناتي سيٽ (Universal Set):

زير غور سمورن سيٽن جي بالا سيٽ کي ڪائناتي سيٽ چئبو آهي. ان کي U يا X سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور: جيڪڏهن $A = \{1,2,3,4\}$ ۽ $B = \{2,4,6\}$ ته پوءِ $U = \{1,2,3,4,5,6\}$

نوٽ: سيٽن جي وڌيڪ قسمن تي سيڪشن 17.1(iv) ۾ بحث ڪنداسين.

KARACHIEDU.COM

مشق 17.1

1. هيٺ ڏنل سيٽن کي جدولي نموني ۾ لکو.

(i) A= سيٽ جو سڃن عددن سمورن وارن جي وچ ۾ 3 ۽ −3

(ii) B = سيٽ جو مرکب عددن گھٽ کان 11

(iii) $C=\{x \mid x \in \mathbb{P} \wedge 5<x \leq 13\}$

(iv) $D=\{y \mid y \in \mathbb{O} \wedge 7<y<17\}$

(v) $E=\{z \mid z \in \mathbb{R} \wedge z^2=121\}$

(vi) $F=\{p \mid p \in \mathbb{Q} \wedge p^2=-1\}$

2. هيٺ ڏنل سيٽن کي علامتي نموني ۾ لکو.

(i) A = سيٽ جو سمورن ناطق عددن جي وچ ۾ 5 ۽ 6 (ii) $B=\{1,2,3,4,6,12\}$

(iii) $C=\{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 40\}$ (iv) $D=\{-4,-2,0,2,4\}$

(v) $E=\{1,4,9,16,25\}$ (vi) $F=\{-1,-3,-5,-7, \ldots\}$

3. خالي سيٽ جا کي ٻہ پنج مثال لکو.

4. هيٺين مان محدود ۽ لامحدود سيٽ ڌار ڌار کريو.

(i) ايشيائي ملڪن جو سيٽ

(ii) دنيا جي سڀني ميڊيڪل يونيورسٽين جو سيٽ.

(iii) 6 ۽ 9 جي وچ ۾ سمورن حقيقي عددن جو سيٽ

(iv) سمورن ٻڌي مفرد عددن جو سيٽ

(v) 5 کان گھٽ سمورن اڪي عددن جي سيٽ

5. هيٺين سيٽن مان هر هڪ جوهڪ هڪجيترو سيٽ، هڪ غير واجب ماتحت سيٽ ۽ ٽي واجب ماتحت سيٽ لکو.

(i) $P=\{a, e, i, o, u\}$

(ii) $Q=\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge-2 \leq x \leq 2\}$

6. علامتي نموني ۾ واحد سيٽ جا کي ٻہ ٻہ مثال لکو.

7. هيٺين سيٽن جا سڳھ سيٽ لھو.

(i) $A=\{5,10,15\}$

(ii) $B=\{x \mid x \in Z \wedge-1<x<4\}$

8. هڪ سيٽ لکو.

(i) جنھن جا فقط ٻہ واجب ماتحت سيٽ ھجن

(ii) جنھن جو فقط هڪ واجب ماتحت سيٽ ھجي

(iii) جنھن جو ڪو ٻہ واجب سيٽ ماتحت نہ ھجي

17.1 (iii) سيٽن تي عمل (Operations on sets):

- ميلاپ (Union)
- ڪاٽ (Intersection)
- فرق (Difference)
- ڪامپليمينٽ (Complement)

ٻن سيٽن جو ميلاپ (Union of two sets):

ٻن سيٽن X ۽ Y جو ميلاپ، هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا رُڪن X سان يا Y سان يا ٻنهي X ۽ Y سان تعلق رکن ٿا. X ۽ Y جو ميلاپ، علامتي طور $X \cup Y$ سان ظاهر ڪبو آهي.

يعني $X \cup Y = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$

مثال طور: جيڪڏهن $X = \{1,3,5\}$ ۽ $Y = \{1,2,3,4\}$ تہ پوءِ $X \cup Y = \{1,2,3,4,5\}$

ٻن سيٽن جي ڪاٽ (Intersection of two sets):

ٻن سيٽن X ۽ Y جي ڪاٽ، هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا رڪن ٻنهي X ۽ Y سان تعلق رکن ٿا. X ۽ Y جي ڪاٽ کي علامتي طور $X \cap Y$ سان ظاهر ڪبو آهي.

يعني $X \cap Y = \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$

مثال طور:

جيڪڏهن $X = \{2,4,6,8\}$ ۽ $Y = \{1,2,3,6\}$ تہ پوءِ $X \cap Y = \{2,6\}$

ٻن سيٽن جو فرق (Difference of two sets):

ڪن بہ ٻن سيٽن X ۽ Y لاءِ ، فرق $X-Y$ هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا سڀ رُڪن X سان تعلق رکن ٿا پر Y سان تعلق نٿا رکن ان کي $X \setminus Y$ سان بہ ظاهر ڪبو آهي. يعني تہ $X - Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$

ساڳي ريت، فرق $Y-X$ هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا سڀ رُڪن Y سان تعلق رکن ٿا پر X سان تعلق نٿا رکن ان کي Y/X سان بہ ظاهر ڪبو آهي. يعني تہ $Y - X = \{y \mid y \in Y \wedge y \notin X\}$

مثال طور:

جيڪڏهن $X = \{4,6,8,9,10\}$ ۽ $Y = \{2,4,6,8\}$

تہ پوءِ $X - Y = \{9,10\}$

۽ $Y - X = \{2\}$

سيٽ جو ڪامپليمينٽ (Complement of a set):

جيڪڏهن سيٽ A ماتحت سيٽ آهي ڪائناتي سيٽ U جو تہ پوءِ A جو ڪامپليمينٽ U جي ان سمورن رڪنن جو سيٽ آهي جيڪي A ۾ نہ هجن ان کي A' يا A^c سان ظاهر ڪبو آهي.

اهڙيءَ طرح $A' = U - A$

يعني تہ $A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$

مثال طور:

جيڪڏهن $U = \{1,2,3,...,20\}$ ۽ $A = \{1,3,5,...,19\}$ تہ پوءِ $A' = \{2,4,6,...,20\}$

17.1 (iv) ٻن سيٽن جو همشڪلي فرق (Symmetric difference of two sets):

ٻن سيٽن A ۽ B جو همشڪلي فرق هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا رُڪن A يا B ۾ هوندا پر ٻنهي سيٽن ۾ مشترڪ نہ هوندا A ۽ B جي همشڪلي فرق کي $A \Delta B$ سان ظاهر ڪبو آهي.

يعني تہ $A \Delta B = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$ يا $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

KARACHIEDU.COM

مثال طور: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4,5\}$ ۽ $B=\{1,3,5,7\}$ تہ پوءِ $A\Delta B=\{2,4,7\}$
سيڪشن 17.1(ii) جي تسلسل ۾ سيٽن جا وڌيڪ قسم هيٺ ڏجن ٿا.

منفرد سيٽ (Disjoint Sets):
بن سيٽن A ۽ B کي منفرد سيٽ کوڻبو جيڪڏهن انهن ۾ کو بہ رکن مشترڪ نہ هجي.
يعني تہ بہ سيٽ A ۽ B منفرد سيٽ آهن جيڪڏهن $A\cap B=\varnothing$
مثال طور: سيٽ $A=\{1,3,5\}$ ۽ $B=\{2,4,6\}$ منفرد سيٽ آهن.

لاڳاپيل سيٽ (Overlapping Sets):
بہ سيٽ A ۽ B لاڳاپيل سيٽ کوڻبا جيڪڏهن بنهي سيٽن ۾ گهٽ ۾ گهٽ هڪ رکن مشترڪ هجي.
ٿنهن کانسواءِ بنهي مان کو بہ ٻئي جو ماتحت سيٽ نہ هجي يعني تہ بہ سيٽ A ۽ B لاڳاپيل سيٽ آهن
جيڪڏهن $A\cap B\neq\varnothing$ ۽ $A\not\subseteq B$ يا $B\not\subseteq A$
مثال طور: سيٽ $A=\{1,2,3,4\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8\}$ لاڳاپيل سيٽ آهن

مڪمل سيٽ (Exhaustive Sets):
جيڪڏهن بہ سيٽ A ۽ B ماتحت سيٽ آهن ڪائناتي سيٽ U جا تہ پوءِ A ۽ B مڪمل سيٽ کوڻبا
جيڪڏهن $A\cup B=U$
مثال طور: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4\}$، $B=\{1,3,5\}$ ۽ $U=\{1,2,3,4,5\}$ تہ پوءِ A ۽ B مڪمل سيٽ آهن
ڇاڪاڻ جو $A\cup B=U$

جُزا (Cells):
جيڪڏهن A ۽ B بہ غير خيالي ماتحت سيٽ آهن ڪائناتي سيٽ U جا تہ پوءِ A ۽ B جُزا کوڻبا جيڪڏهن
اُهي منفرد سان گڏوگڏ مڪمل سيٽ پڻ هجن.
يعني تہ A ۽ B جُزا کوڻبا جيڪڏهن A ۽ B غير خالي ماتحت سيٽ آهن U جا، $A\cap B=\varnothing$ ۽ $A\cup B=U$
مثال طور: جيڪڏهن $A=\{1,3,5,7,9\}$ ، $B=\{2,4,6,8,10\}$ ۽ $U=\{1,2,3,\ldots,10\}$ تہ پوءِ A ۽ B جُزا آهن.
سيٽن تي عمل(Operations on sets) سان لاڳاپو رکندڙ ڪجهہ مکيہ قانون هيٺيان آهن

ذاتي عنصر وارا قانون (Identity Laws):
ڪنهن بہ سيٽ A لاءِ
(i) $A\cup\varnothing=A$ (ii) $A\cup U=U$ (iii) $A\cap U=A$ (iv) $A\cap\varnothing=\varnothing$

هڪجهڙائي وارا قانون (Idempotent Laws):
ڪنهن بہ سيٽ A لاءِ
(i) $A\cup A=A$ (ii) $A\cap A=A$

ڪامپليمينٽ وارا قانون (Laws of the Complement):
ڪنهن بہ سيٽ A لاءِ
(i) $A\cup A'=U$ (ii) $A\cap A'=\varnothing$
(iii) $(A')'=A$ (iv) $\varnothing'=U$ ۽ $U'=\varnothing$

ڊي مارگن جا قانون (De Morgan's Laws):
ڪن بہ بن سيٽن A ۽ B لاءِ
(i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

KARACHIEDU.COM

مشق 17.2

1. هيٺين مان ڪهڙا منفرد سيٽ، لاڳاپيل سيٽ، مڪمل سيٽ يا جُڙا آهن.

(i) $\{1,2,3,5,7\}$ ۽ $\{4,6,8,9,10\}$

(ii) $\{1,2,3,6\}$ ۽ $\{1,2,4,8\}$

(iii) E ۽ O جڏهن ته $U=Z$

(iv) N ۽ W جڏهن ته $U=\{x\mid x\in Z\wedge x\geq 0\}$

(v) Q ۽ Q' جڏهن ته $U=\mathbb{R}$

2. جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8,10\}$ ته پوءِ هيٺيان لهو:

(i) $A\cup B$ (ii) $B\cap A$ (iii) $A-B$

(iv) $B-A$ (v) $A\Delta B$

3. جيڪڏهن $U=\{1,2,3,...,10\}$، $A=\{1,2,3,4,5\}$ ۽ $B=\{1,3,5,7,9\}$ ته پوءِ هيٺيان لهو

(i) A' (ii) B' (iii) $A'\cup B'$ (iv) $A'\cap B'$

(v) $(A\cup B)'$ (vi) $(A\cap B)'$ (vii) $A'\Delta B'$ (viii) $(A\Delta B)'$

(ix) $A-B'$ (x) $A'-B$

4. جيڪڏهن $U=\{x\mid x\in Z\wedge -4<x<6\}$، $P=\{p\mid p\in E\wedge -4<p<8\}$ ۽ $Q=\{q\mid q\in P\wedge q<6\}$ ته پوءِ تصديق ڪريو ته

(i) $P-Q=P\cap Q'$ (ii) $Q-P=Q\cap P'$

(iii) $(P\cup Q)'=P'\cap Q'$ (iv) $(P\cap Q)'=P'\cup Q'$

5. جيڪڏهن $A=\{2n\mid n\in N\}$، $B=\{3n\mid n\in N\}$ ۽ $C=\{4n\mid n\in N\}$ ته پوءِ هيٺيان لهو

(i) $A\cap B$ (ii) $A\cup C$ (iii) $B\cap C$

17.1.2(i) ميلاپ ۽ ڪاٽ جون خاصيتون (Properties of Union and Intersection):

بن يا ٽن سيٽن جي ميلاپ ۽ ڪاٽ وارين هيٺين بنيادي خاصيتن جون رسمي ثابتيون ڏيڻ:

➢ ميلاپ جي مٽا واري خاصيت (Commutative Property of Union):

اسان کي خبر آهي ته ڪن به بن سيٽن A ۽ B لاءِ $\boxed{A\cup B=B\cup A}$

ان خاصيت کي ميلاپ جي مٽا واري خاصيت چئبو آهي.

ثابتي:

$$\begin{aligned}
L.H.S &= A\cup B \\
&= \{x\mid x\in A \text{ يا } x\in B\} && \text{(ميلاپ جي وصف مطابق)} \\
&= \{x\mid x\in B \text{ يا } x\in A\} && \text{(} \because \text{ سيٽ ۾ رُڪنن جي ترتيب مستقل نه هوندي آهي)} \\
&= B\cup A && \text{(ميلاپ جي وصف مطابق)} \\
&= R.H.S
\end{aligned}$$

$\because$ $L.H.S=R.H.S$

$\therefore$ $A\cup B=B\cup A$

انهيءَ کري ثابت ٿيو.

KARACHI

➢ ڪاٽ جي مٽا واري خاصيت (Commutative Property of Intersection):

اسان کي خبر آهي ته ڪن بہ سيٽن A ۽ B لاءِ $\boxed{A\cap B=B\cap A}$

ان خاصيت کي ڪاٽ جي مٽا واري خاصيت چئبو آهي.

ثابتي:

$$\begin{aligned}
L.H.S &= A\cap B\\
&=\{x\mid x\in A \text{ ۽ } x\in B\} && \text{(ڪاٽا جي وصف مطابق)}\\
&=\{x\mid x\in B \text{ ۽ } x\in A\} && \because \text{(سيٽن ۾ رُڪنن جي ترتيب مستقل نہ هوندي آهي)}\\
&=B\cap A && \text{(ڪاٽ جي وصف مطابق)}\\
&=R.H.S\\
\because\quad & L.H.S=R.H.S\\
\therefore\quad & A\cap B=B\cap A
\end{aligned}$$

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

➢ ميلاپ جي سنگت واري خاصيت (Associative property of union):

اسين ميلاپ جي سنگت واري خاصيت کان اڳيئي واقف آهيون جيڪا هينئن ريت آهي

ڪن بہ ٽن سيٽن A، B ۽ C لاءِ $\boxed{A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C}$

ثابتي:

$$\begin{aligned}
L.H.S &= A\cup(B\cup C)\\
&=\{x\mid x\in A \text{ يا } x\in B\cup C\} && \text{(ميلاپ جي وصف مطابق)}\\
&=\{x\mid x\in A \text{ يا } x\in B \text{ يا } x\in C\}\\
&=\{x\mid x\in A\cup B \text{ يا } x\in C\} && \text{(ميلاپ جي وصف مطابق)}\\
&=(A\cup B)\cup C && \text{(ميلاپ جي وصف مطابق)}\\
&=R.H.S\\
\because\quad & L.H.S=R.H.S\\
\therefore\quad & A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C
\end{aligned}$$

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

➢ ڪاٽا جي سنگت واري خاصيت (Associative property of intersection):

اسان کي ڪاٽ جي سنگت واري خاصيت جي اڳيئي خبر آهي جيڪا بيان ڪري ٿي تہ ڪن بہ ٽن سيٽن A، B ۽ C لاءِ $\boxed{A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C}$

ثابتي:

$$\begin{aligned}
L.H.S &= A\cap(B\cap C)\\
&=\{x\mid x\in A \text{ ۽ } x\in B\cap C\} && \text{(ڪاٽا جي وصف جي مطابق)}\\
&=\{x\mid x\in A \text{ ۽ } x\in B \text{ ۽ } x\in C\}\\
&=\{x\mid x\in A\cap B \text{ ۽ } x\in C\} && \text{(ڪاٽا جي وصف جي مطابق)}\\
&=(A\cap B)\cap C && \text{(ڪاٽا جي وصف جي مطابق)}\\
&=R.H.S\\
\because\quad & L.H.S=R.H.S\\
\therefore\quad & A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C
\end{aligned}$$

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

KARACHIEDU.COM

➢ ميلاپ جي ڪاٽ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت (Distributive property of union over intersection):

اسين هيٺين ڪلاسن ۾ اڀيئي ميلاپ جي ڪاٽ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت پڙهي چڪا آهيون جيڪا هيٺين ريت آهي.

ڪن به سيٽن A ، B ۽ C لاءِ $\boxed{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$

ثابتي:

$$L.H.S=A\cup(B\cap C)$$

$=\{x\mid x\in A$ يا $x\in B\cap C\}$ (ميلاپ جي خاصيت مطابق)

$=\{x\mid x\in A$ يا $(x\in B$ ۽ $x\in C)\}$ (ڪاٽا جي وصف مطابق)

$=\{x\mid(x\in A$ يا $x\in B)$ ۽ $(x\in A$ يا $x\in C)\}$

$=\{x\mid x\in A\cup B$ ۽ $x\in A\cup C\}$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (ڪاٽا جي وصف مطابق)

$=R.H.S$

$\because$ $L.H.S=R.H.S$

$\therefore$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

➢ ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت (Distributive property of intersection over union):

اسين اڀيئي ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت سان واقف آهيون.

جيڪا هيٺين ريت آهي.

ڪن به ٽن سيٽن A، B ۽ C لاءِ $\boxed{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

ثابتي:

$$L.H.S=A\cap(B\cup C)$$

$=\{x\mid x\in A$ ۽ $x\in B\cup C\}$ (ڪاٽا جي وصف مطابق)

$=\{x\mid x\in A$ ۽ $(x\in B$ يا $x\in C)\}$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$=\{x\mid(x\in A$ ۽ $x\in B)$ يا $(x\in A$ ۽ $x\in C)\}$

$=\{x\mid x\in A\cap B$ يا $x\in A\cap C\}$ (ڪاٽا جي وصف مطابق)

$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$=R.H.S$

$\because$ $L.H.S=R.H.S$

$\therefore$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

KARACHIEDU.COM

➢ ڊي مارگن جا قانون (De Morgan's Laws):

اسين اڳيئي سيڪشن 17.1(iv) ۾ پڙهي چڪا آهيون ته ڊي مارگن جا قانون به هوندا آهن.
جيڪي هينئين ريت آهن. ڪن به بن سيٽن A ۽ B لاءِ

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ثابتي (i): $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$L.H.S = (A \cup B)'$

$= \{x \mid x \in U \text{ ۽ } x \notin A \cup B\}$ (ڪامپليمينٽ جي وصف مطابق)

$= \{x \mid x \in U \text{ ۽ } (x \notin A \text{ ۽ } x \notin B)\}$

$= \{x \mid (x \in U \text{ ۽ } x \notin A) \text{ ۽ } (x \in U \text{ ۽ } x \notin B)\}$

$= \{x \mid x \in A' \text{ ۽ } x \in B'\}$ (ڪامپليمينٽ جي وصف مطابق)

$= A' \cap B'$ (ڪاٽا جي وصف مطابق)

$= R.H.S$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

ثابتي (ii): $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$L.H.S = (A \cap B)'$

$= \{x \mid x \in U \text{ ۽ } x \notin A \cap B\}$ (ڪامپليمينٽ جي وصف مطابق)

$= \{x \mid x \in U \text{ ۽ } (x \notin A \text{ يا } x \notin B)\}$

$= \{x \mid (x \in U \text{ ۽ } x \notin A) \text{ يا } (x \in U \text{ ۽ } x \notin B)\}$

$= \{x \mid x \in A' \text{ يا } x \in B'\}$ (ڪامپليمينٽ جي وصف مطابق)

$= A' \cup B'$ (ميلاپ جي وصف مطابق)

$= R.H.S$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

17.1.2(ii) ڏنل سيٽن جي بنيادي خاصيتن جي چڪاس ڪرڻ:

اچو ته هينئين مثالن جي مدد سان بنيادي خاصيتن جي چڪاس ڪريون.

مثال 1: جيڪڏهن $A = \{1,2,3,4,6,12\}$ ۽ $B = \{4,6,8,9,10,12\}$ ته پوءِ ميلاپ ۽ ڪاٽا جي متا واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

KARACHIEDU.COM

چڪاس:

(الف) ميلاپ جي مٽاواري خاصيت

يعني $A \cup B = B \cup A$

$L.H.S = A \cup B$

$= \{1,2,3,4,6,12\} \cup \{4,6,8,9,10,12\}$

$= \{1,2,3,4,6,8,9,10,12\}$

$R.H.S = B \cup A$

$= \{4,6,8,9,10,12\} \cup \{1,2,3,4,6,12\}$

$= \{1,2,3,4,6,8,9,10,12\}$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cup B = B \cup A$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

(ب) ڪاٽا جي مٽاواري خاصيت

يعني $A \cap B = B \cap A$

$L.H.S = A \cap B$

$= \{1,2,3,4,6,12\} \cap \{4,6,8,9,10,12\}$

$= \{4,6,12\}$

$R.H.S = B \cap A$

$= \{4,6,8,9,10,12\} \cap \{1,2,3,4,6,12\}$

$= \{4,6,12\}$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cap B = B \cap A$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

مثال 2:

جيڪڏهن $A = \{1,2,5,10\}$ ، $B = \{2,3,5,7\}$ ۽ $C = \{1,3,5,7,9\}$ تہ پوءِ ميلاپ ۽ ڪاٽا جي سنگت واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

چڪاس:

(الف) ميلاپ جي سنگت واري خاصيت

يعني $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$L.H.S = A \cup (B \cup C)$

$= \{1,2,5,10\} \cup [\{2,3,5,7\} \cup \{1,3,5,7,9\}]$

$= \{1,2,5,10\} \cup \{1,2,3,5,7,9\}$

$= \{1,2,3,5,7,9,10\}$

$R.H.S = (A \cup B) \cup C$

$= [\{1,2,5,10\} \cup \{2,3,5,7\}] \cup \{1,3,5,7,9\}$

$= \{1,2,3,5,7,10\} \cup \{1,3,5,7,9\}$

$= \{1,2,3,5,7,9,10\}$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

(ب) ڪاٽا جي سنگت واري خاصيت

يعني $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$L.H.S = A \cap (B \cap C)$

$= \{1,2,5,10\} \cap [\{2,3,5,7\} \cap \{1,3,5,7,9\}]$

$= \{1,2,5,10\} \cap \{3,5,7\}$

$= \{5\}$

$R.H.S = (A \cap B) \cap C$

$= [\{1,2,5,10\} \cap \{2,3,5,7\}] \cap \{1,3,5,7,9\}$

$= \{2,5\} \cap \{1,3,5,7,9\}$

$= \{5\}$

$\because \quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

KARACHIEDU.COM

مثال 3: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,...,10\}$ ، $B=\{2,4,6,8,10\}$ ۽ $C=\{3,6,9\}$ تہ پوءِ چڪاس ڪريو

(الف) ميلاپ جي ڪاٽا جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت

(ب) ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت

چڪاس:

(الف) ميلاپ جي ڪاٽا جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت

يعني $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= A\cup(B\cap C)\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cup[\{2,4,6,8,10\}\cap\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cup\{6\}\\
&=\{1,2,3,...,10\}\\
R.H.S &= (A\cup B)\cap(A\cup C)\\
&=[\{1,2,3,...,10\}\cup\{2,4,6,8,10\}]\cap[\{1,2,3,...,10\}\cup\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap\{1,2,3,...,10\}\\
&=\{1,2,3,...,10\}
\end{aligned}$$

$\because$ $L.H.S=R.H.S$

$\therefore$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

(ب) ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت

يعني $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= A\cap(B\cup C)\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap[\{2,4,6,8,10\}\cup\{3,6,9\}]\\
&=\{1,2,3,...,10\}\cap\{2,3,4,6,8,9,10\}\\
&=\{2,3,4,6,8,9,10\}\\
R.H.S &= (A\cap B)\cup(A\cap C)\\
&=[\{1,2,3,...10\}\cap\{2,4,6,8,10\}]\cup[\{1,2,3,...,10\}\cap\{3,6,9\}]\\
&=\{2,4,6,8,10\}\cup\{3,6,9\}\\
&=\{2,3,4,6,8,9,10\}
\end{aligned}$$

$\because$ $L.H.S=R.H.S$

$\therefore$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

KARACHIEDU.COM

مثال 4: جيڪڏهن $U=\{1,2,3,...,20\}$، $A=\{1,3,5,...,19\}$ ۽ $B=\{2,4,6,...,20\}$ تہ پوءِ ڈي مارگن جي قانونن جي چڪاس ڪريو

يعني (الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

چڪاس:

(الف) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= (A\cup B)' \\
&= U-(A\cup B) \\
&= \{1,2,3,...,20\}-\left[\{1,3,5,...,19\}\cup\{2,4,6...,20\}\right] \\
&= \{1,2,3,...,20\}-\{1,2,3,...,20\} \\
&= \varnothing \\
R.H.S &= A'\cap B' \\
&= (U-A)\cap(U-B) \\
&= \left[\{1,2,3,...,20\}-\{1,3,5,...,19\}\right]\cap\left[\{1,2,3,...,20\}-\{2,4,6,...,20\}\right] \\
&= \{2,4,6,...,20\}\cap\{1,3,5,...,19\} \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $(A\cup B)'=A'\cap B'$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

(ب) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= (A\cap B)' \\
&= U-(A\cap B) \\
&= \{1,2,3,...,20\}-\left[\{1,3,5,...,19\}\cap\{2,4,6...,20\}\right] \\
&= \{1,2,3,...,20\}-\{\ \} \\
&= \{1,2,3,...,20\} \\
R.H.S &= A'\cup B' \\
&= (U-A)\cup(U-B) \\
&= \left[\{1,2,3,...,20\}-\{1,3,5,...,19\}\right]\cup\left[\{1,2,3,...,20\}-\{2,4,6,...,20\}\right] \\
&= \{2,4,6,...,20\}\cup\{1,3,5,...,19\} \\
&= \{1,2,3,...,20\}
\end{aligned}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $(A\cap B)'=A'\cup B'$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

KARACHIEDU.COM

مشق 17.3

1. هيٺين سيٽن لاءِ ميلاپ ۽ ڪاٽا جي مٿا واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

(i) $A=\{a,b,c,d,e\}$ ۽ $B=\{a,e,i,o,u\}$

(ii) $P=\{x \mid x\in Z\wedge -3<x<3\}$ ۽ $Q=\{y \mid y\in E^{+}\wedge y\leq 4\}$

2. هيٺين سيٽن لاءِ ميلاپ ۽ ڪاٽا جي سنگت واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

(i) $A=\{1,2,4,5,10,20\}$ ، $B=\{5,10,15,20\}$ ۽ $C=\{1,2,5,10\}$

(ii) $A=\mathbb{N}$ ، $B=\mathbb{P}$ ۽ $C=\mathbb{Z}$

3. هيٺين سيٽن لاءِ تصديق ڪريو.

(الف) ميلاپ جي ڪاٽا جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت

(ب) ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست واري خاصيت

(i) $A=\{1,2,3,...,10\}$ ، $B=\{2,3,5,7\}$ ۽ $C=\{1,3,5,7,9\}$

(ii) $A=\mathbb{N}$ ، $B=\mathbb{P}$ ۽ $C=\mathbb{W}$

4. ڊي مارگن جي قانونن جي تصديق ڪريو جيڪڏهن $U=\{1,2,3...,12\}$ ، $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8\}$

5. جيڪڏهن A ۽ B ماتحت سيٽ آهن U جا تہ پوءِ خاصيتن جو استعمال ڪندي هيٺيان ثابت ڪريو

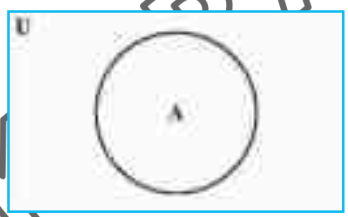
(i) $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)$ (ii) $A\cup B=A\cup(A'\cap B)$

(iii) $B=(A\cap B)\cup(A'\cap B)$ (iv) $A\subseteq B$ جيڪڏهن $B=A\cup(A'\cap B)$

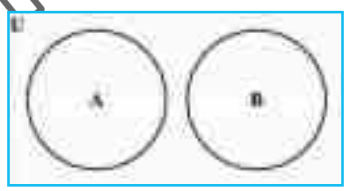
17.1.3 وين ڊايگرام يا شڪليون (Venn Diagrams):

اسين هيٺين ڪلاسن ۾ اڳيئي پڙهي چڪا آهيون تہ سيٽ، انهن جا تعلق ۽ عمل جاميٽري سان يا گرافن سان ظاهر ڪري سگهجن ٿا. انهيءَ جاميٽري واري اظهار کي وين ڊايگرام يا شڪليون چئبو آهي جيڪي انگريز رياضي دان جان وين (John Venn) جي نالي تي آهن. جان وين انهن کي 1881ع ۾ پيش ڪيو. وين شڪلين ۾ ڪائناتي سيٽ کي گهٽو ڪري مستطيل سان ظاهر ڪبو آهي. جڏهن تہ گول يا بيضوي شڪليون سيٽن کي ظاهر ڪنديون آهن. ڪجهہ وين شڪلين جو ڏور ڪريون ٿا.

(i) ڪائناتي سيٽ U جي اندر هڪ سيٽ A کي ڏيکارينڊڙ وين شڪل

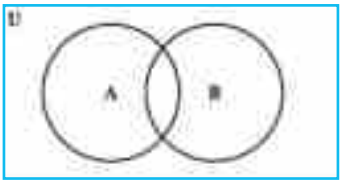


(ii) ٻن منفرد سيٽن A ۽ B کي ڏيکارينڊڙ وين شڪل

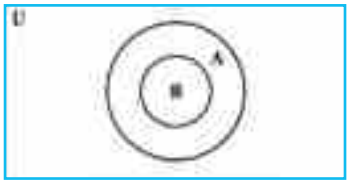


ZP ACHIVE

(iii) بن لاڳاپيل سيٽن A ۽ B کي ڊيڪاريندڙ وين شڪل



(iv) سيٽ A جي ماتحت سيٽ B کي ڊيڪاريندڙ وين شڪل يعني $B \subseteq A$



17.1.3(i) وين شڪلين وسيلي هيٺيان ڊيڪارڻ:

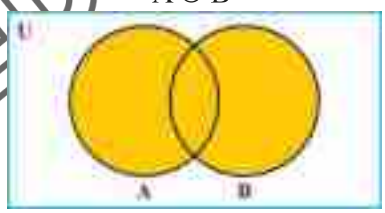
- سيٽن جو ميلاپ ۽ ڪاٽ:
- سيٽ جو ڪامپليمينٽ:
- بن سيٽن جو همشڪلي فرق:

سيٽن جو ميلاپ ۽ ڪاٽ:

وين شڪلين ۾ بن سيٽن A ۽ B جي ميلاپ کي ٻنهي سيٽن A ۽ B جي سڄي ايراضي سان ظاهر ڪبو آهي. شڪل (i) ۾ شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضي $A \cup B$ کي ظاهر ڪري ٿي.

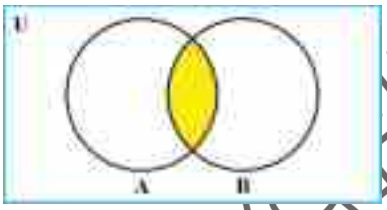
جڏهن ته سيٽن A ۽ B جي ڪاٽ کي ٻنهي A ۽ B جي مشترڪ ايراضي سان ظاهر ڪيو ويندو آهي شڪل نمبر (ii) ۾، شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضي $A \cap B$ کي ظاهر ڪري ٿي.

$A \cup B$



شڪل(i)

$A \cap B$



شڪل(ii)

مثال 1: جيڪڏهن $U=\{1,2,3,...,10\}$، $A=\{1,2,3,4,5\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8\}$ ته پوءِ وين شڪلين وسيلي $A \cup B$ ۽ $A \cap B$ کي ڊيڪاريو

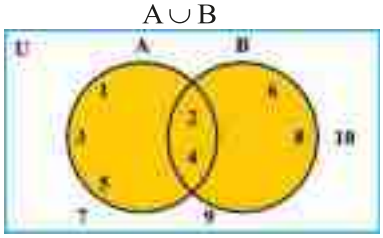
حل:

شڪل (الف) ۾ رنگ ٿيل يا شيڊ ڏنل ايراضي، $A \cup B$ کي ڊيڪاري ٿي

وين شڪل مان اسان حاصل ڪيو:

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}$

$A \cup B$



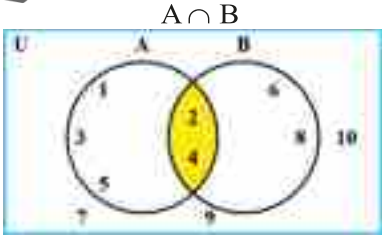
شڪل (الف)

شڪل (ب) ۾ رنگ ٿيل يا شيڊ ڏنل ايراضي، $A \cap B$ کي ڊيڪاري ٿي

وين شڪل مان اسان حاصل ڪيو:

$A \cap B = \{2,4\}$

$A \cap B$



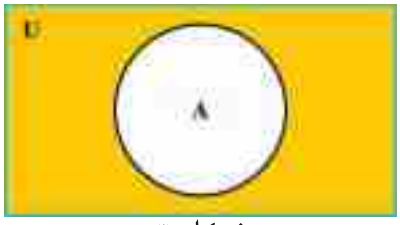
شڪل (ب)

KARACHIEDU.COM

سيٽ جو ڪامپليمينٽ (Complement of a set):

وين شڪل ۾، سيٽ A جو ڪامپليمينٽ، ڪائناتي سيٽ جي اُن ايراضي سان ڏيکاربو آهي جيڪا سيٹ A جي ايراضي کان ڌار ڪانپوءِ بچي. شڪل (i) ۾،شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضي A' کي ڏيکاري ٿي.

A'



شڪل (i)

مثال:

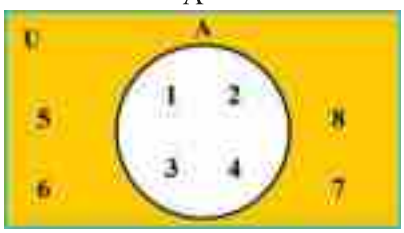
جيڪڏهن $U=\{1,2,3,...,8\}$ ۽ $A=\{1,2,3,4\}$ تہ پوءِ وين شڪل وسيلي A' کي ڏيکاريو.

حل:

پاسي واري وين شڪل (شڪل ii) ۾ شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضي A' کي ڏيکاري ٿي.

تنهنڪري اسان وٽ آهي: $A'=\{5,6,7,8\}$

A'

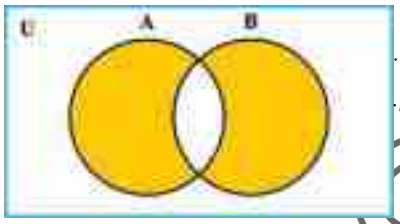


شڪل (ii)

بن سيٽن جو همشڪلي فرق (Symmetric difference of two sets):

وين شڪل ۾، بن سيٽن A ۽ B جي همشڪلي فرق کي A ۽ B جي سڄي ايراضي،سواءِ مشترڪ ايراضي سان ڏيکاربو آهي. شڪل (i) ۾ رنگ ٿيل يا شيڊ ڏنل ايراضي $A\Delta B$ کي ڏيکاري ٿي.

$A\Delta B$



شڪل (i)

مثال:

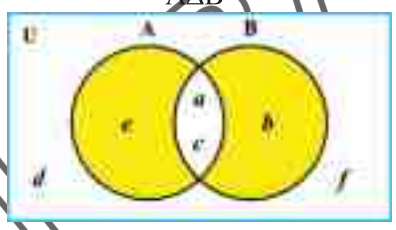
جيڪڏهن $U=\{a,b,c,d,e,f\}$، $A=\{a,c,e\}$ ۽ $B=\{a,b,c\}$ تہ پوءِ وين شڪل وسيلي $A\Delta B$ کي ڏيکاريو.

حل:

پاسي واري وين شڪل (شڪل ii) ۾ شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضي $A\Delta B$ کي ڏيکاري ٿي.

تنهنڪري اسان وٽ آهي يعني: $A\Delta B=\{b,e\}$

$A\Delta B$



شڪل (ii)

ACHIEDU.COM

17.1.3(ii) وين شڪل وسيلي هيٺين جي چڪاس ڪرڻ:

- ميلاپ ۾ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت:
- سنگت وارا قانون:
- ورهاست وارا قانون:
- ڊي مارگن جا قانون:

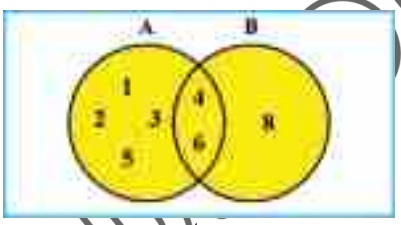
➢ ميلاپ ۾ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت:

اچو ته هيٺين مثال جي مدد سان، وين شڪل وسيلي ميلاپ ۾ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت جي چڪاس ڪريون.

مثال: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ۽ $B=\{4,6,8\}$ ته پوءِ وين شڪل وسيلي ميلاپ ۾ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت جي چڪاس ڪريو.

چڪاس (i): ميلاپ جي مٽا واري خاصيت يعني: $A\cup B=B\cup A$

$A\cup B$

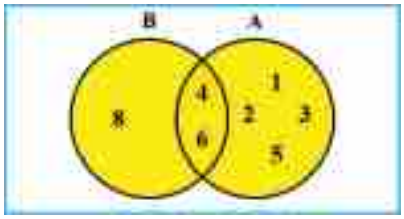


شڪل (i)

شڪل (i) جي وين شڪل مان

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

$B\cup A$



شڪل (ii)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$B\cup A=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

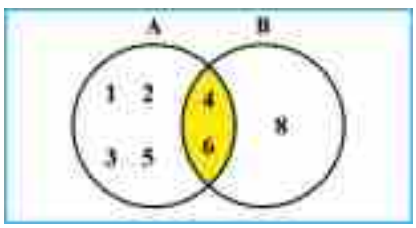
جيئن ته شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۽ انهن جا رکن برابر آهن جهڙي طرح شڪل (i) ۽ شڪل (ii) ۾ ڏيکاريو ويو آهي.

تنهنڪري $A\cup B=B\cup A$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

چڪاس (ii): ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت يعني: $A\cap B=B\cap A$

$A\cap B$

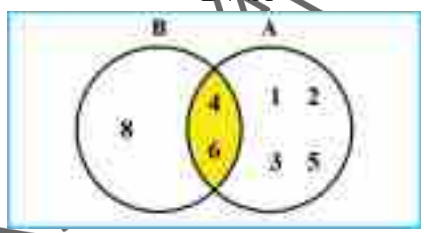


شڪل (i)

شڪل (i) جي وين شڪل مان

$A\cap B=\{4,6\}$

$B\cap A$



شڪل (ii)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$B\cap A=\{4,6\}$

جيئن ته شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۽ انهن جا رکن برابر آهن جهڙيءَ طرح شڪل(i) ۽ شڪل (ii) ۾ ڏيکاريو ويو آهي.

تنهنڪري $A\cap B=B\cap A$

انهيءَ ڪري چڪاس ٿي.

KACHIEDU.COM

➢ سنگت وارا قانون (Associative Laws):

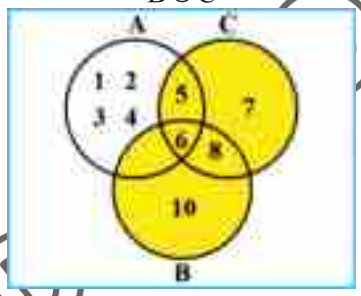
وين شڪل وسيلي سنگت واري قانونن جي تصديق ڪرڻ لاءِ ، اسين هيٺين مثال کڻون ٿا.

مثال: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، $B=\{6,8,10\}$ ۽ $C=\{5,6,7,8\}$ تہ پوءِ ميلاپ ۽ ڪاٽا جي سنگت واري قانونن جي تصديق ڪريو.

تصديق: ميلاپ جو سنگت وارو قانون يعني: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$L.H.S=A\cup(B\cup C)$

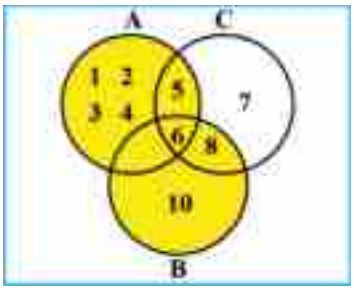
$B\cup C$



شڪل(i)

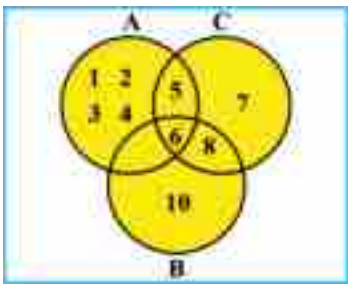
$R.H.S=(A\cup B)\cup C$

$A\cup B$



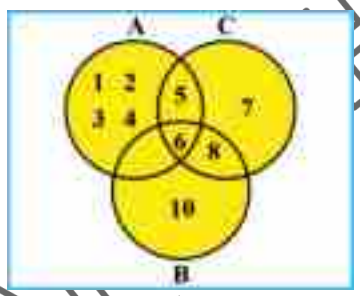
شڪل(iii)

$A\cup(B\cup C)$



شڪل(ii)

$(A\cup B)\cup C$



شڪل(iv)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$A\cup(B\cup C)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$

شڪل(iv) جي وين شڪل مان

$(A\cup B)\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$

جيئن تہ شيد ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۽ انهن جا رکن برابر آهن جهڙي طرح شڪل (ii) ۽ شڪل (iv) ۾ ڏيکاريل آهي.

تنهنڪري $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

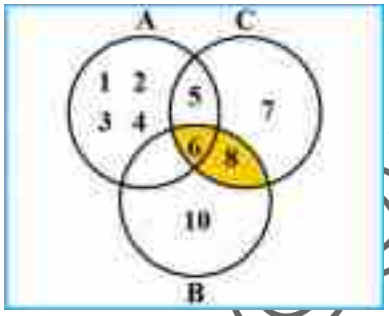
انهيءَ ڪري تصديق ٿي.

KARACHIED.COM

تصديق: ڪاٽا جو سنگت وارو قانون يعني: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

$L.H.S=A\cap(B\cap C)$

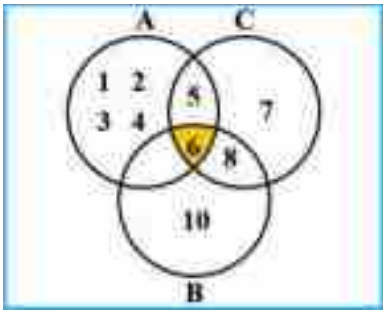
$B\cap C$



شڪل(i)

$R.H.S=(A\cap B)\cap C$

$A\cap B$

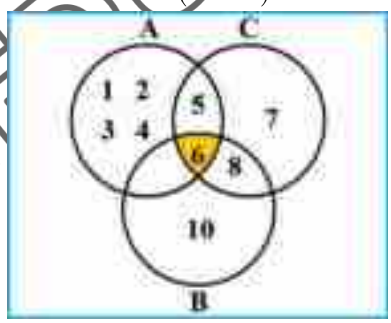


شڪل(iii)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$A\cap(B\cap C)=\{6\}$

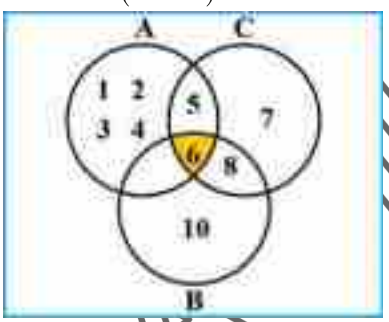
$(A\cap B)\cap C$



شڪل(ii)

شڪل(iv) جي وين شڪل مان

$(A\cap B)\cap C=\{6\}$



شڪل(iv)

جيئن ته رنگ ٽيل يا شيد ڏنل ايراضيون ۽ انهن جا رکن برابر آهن جهڙي طرح شڪل(ii) ۽ شڪل (iv) ۾ ڏيکاريل آهي.

تنهنڪري $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

انهيءَ کي تصديق ٿي.

➢ ورهاست وارا قانون (Distributive Laws):

هاڻي اسين هينئين مثال جي مدد سان ، وين شڪل وسيلي ورهاست واري قانونن جي تصديق ڪريون ٿا.

مثال:

وين شڪل وسيلي ورهاست واري قانونن جي تصديق ڪريو جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ، $B=\{3,4,5,6,7\}$ ۽ $C=\{2,4,6,8\}$

KARAKUNJO.COM

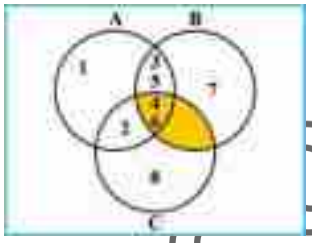
تصديق:

(i) ميلاپ جو ڪات جي لحاظ ڪان ورهاست وارو قانون (Distributive law of union over intersection):

يعني: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$L.H.S = A \cup (B \cap C)$

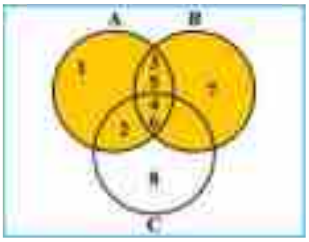
$B \cap C$



شڪل(i)

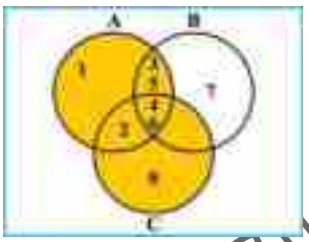
$R.H.S = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cup B$



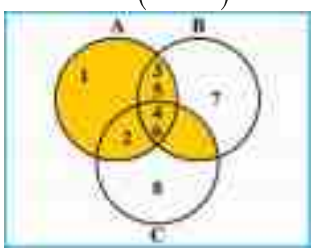
شڪل(iii)

$A \cup C$



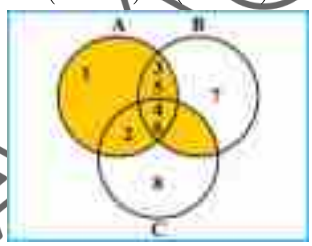
شڪل(iv)

$A \cup (B \cap C)$



شڪل(ii)

$(A \cup B) \cap (A \cup C)$



شڪل(v)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5,6\}$

شڪل(v) جي وين شڪل مان

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\}$

جيئن ته شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۽ انهن جا رکن برابر آهن جهڙي طرح شڪل (ii) ۽ شڪل(v)۾ ڏيکاريل آهي.

تنهنڪري $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

انهيءَ ڪري تصديق ٿي.

KACHIEDU.COM

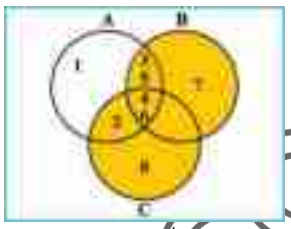
تصديق:

(ii) ڪاٽا جي ميلاپ جي لحاظ کان ورهاست وارو قانون : (Distributive law of intersection over union):

يعني: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$L.H.S=A\cap(B\cup C)$

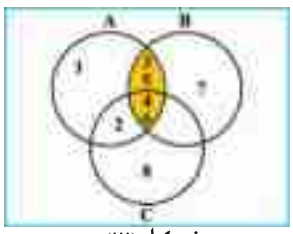
$B\cup C$



شڪل(i)

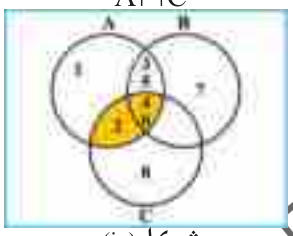
$R.H.S=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cap B$



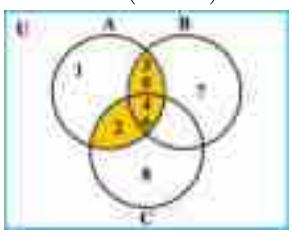
شڪل(iii)

$A\cap C$



شڪل(iv)

$A\cap(B\cup C)$

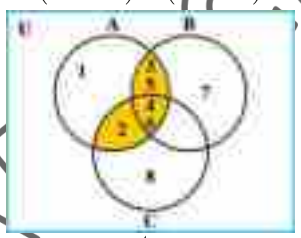


شڪل(ii)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$A\cap(B\cup C)=\{2,3,4,5,6\}$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)$



شڪل(v)

شڪل(v) جي وين شڪل مان

$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2,3,4,5,6\}$

جيئن ته شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۽ انهن جا رکن برابر آهن جهڙي طرح شڪل (ii) ۽ شڪل(v)۾ ڏيکاريل آهي.

تنهنڪري $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

انهيءَ ڪري تصديق ٿي.

KASHIEDU.COM

➢ ڊي مارگن جا قانون (De Morgan's Laws):

اچو ته هينئين مثال جي مدد سان، وين شڪل ذريعي ڊي مارگن جي قانون جي تصديق ڪريون.

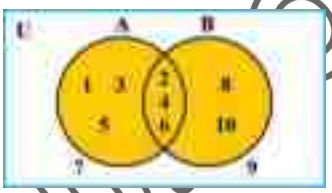
مثال: وين شڪل وسيلي ڊي مارگن جي قانونن جي تصديق ڪريو

جيڪڏهن $U=\{1,2,3,...,10\}$، $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8,10\}$

تصديق: (i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

$L.H.S=(A\cup B)'$

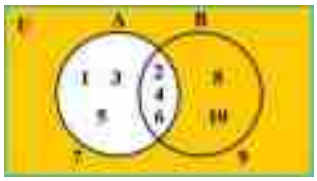
$A\cup B$



شڪل(i)

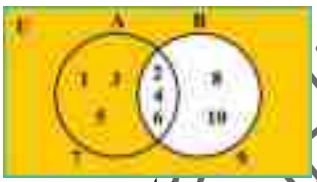
$R.H.S=A'\cap B'$

A'



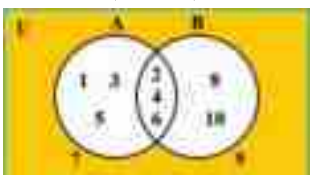
شڪل(iii)

B'



شڪل(iv)

$(A\cup B)'$



شڪل(ii)

شڪل(ii) جي وين شڪل مان

$(A\cup B)'=\{7,9\}$

$A'\cap B'$



شڪل(v)

شڪل(v) جي وين شڪل مان

$A'\cap B'=\{7,9\}$

جيئن ته شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۽ انهن جا رکن برابر آهن جيئن شڪل (ii) ۽ شڪل(v)۾ ڏيکاريل آهي.

تنهنڪري $(A\cup B)'=A'\cap B'$

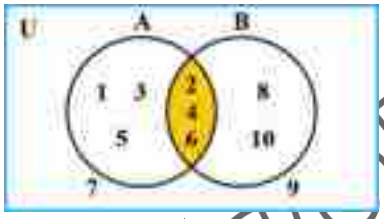
انهيءَ کي تصديق ٿي.

KARACHIEDU.COM

تصديق (ii): $(A \cap B)' = A' \cup B'$

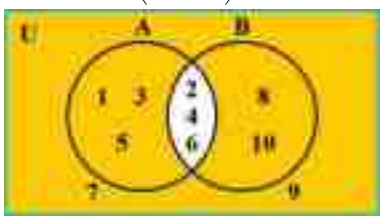
$L.H.S = (A \cap B)'$

$A \cap B$



شكل(i)

$(A \cap B)'$



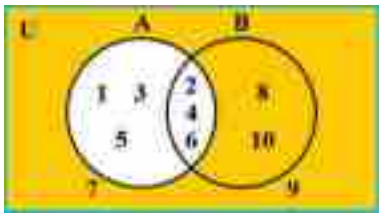
شكل(ii)

شكل(ii) جي وين شكل مان

$(A \cap B)' = \{1,3,5,7,8,9,10\}$

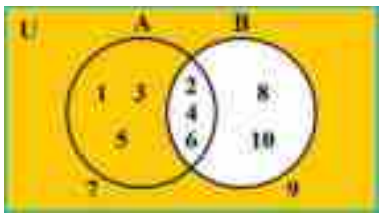
$R.H.S = A' \cup B'$

A'



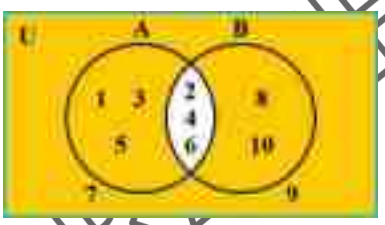
شكل(iii)

B'



شكل(iv)

$A' \cup B'$



شكل(v)

شكل(v) جي وين شكل مان

$A' \cup B' = \{1,3,5,7,8,9,10\}$

جيئن ته شيڊ ڏنل يا رنگ ٿيل ايراضيون ۽ انهن جا رکن برابر آهن جيئن شڪل (ii) ۽ شڪل(v)۾ ڏيکاريل آهي.

تنهنڪري $(A \cap B)' = A' \cup B'$

انهيءَ کري تصديق ٿي.

KAHIEDU.COM

مشق 17.4

1. جيڪڏهن A ۽ B ڪائناتي سيٽ U جا ڪي به ٻه ماتحت سيٽ آهن ته پوءِ $A\Delta B$، $A\cap B$، $A\cup B$ ۽ $A-B$ جون عام وين شڪيلون ٺاهيو جيڪڏهن
   (i) A ۽ B منفرد سيٽ آهن.
   (ii) A ۽ B لاڳاپيل سيٽ آهن.
   (iii) A ماتحت سيٽ آهي B جو
2. وين شڪلين وسيلي ميلاپ ۽ ڪاٽا جي مٽا واري خاصيت جي چڪاس ڪريو. جيڪڏهن
   (i) $A=\{a,b,c,d,e\}$ ۽ $B=\{a,e,i,o,u\}$
   (ii) $P=\{1,2,3,...,10\}$ ۽ $Q=\{2,4,6,8,10\}$
3. وين شڪلين وسيلي ڊي مارگن جي قانونن جي تصديق ڪريو.
   جيڪڏهن $A=\{1,3,5,7,9\}$، $B=\{5,6,7,8\}$ ۽ $U=\{1,2,3,...,10\}$
4. وين شڪلين وسيلي سنگت ۽ ورهاست واري قانونن جي تصديق ڪريو.
   جيڪڏهن $A=\{1,2,3,...,8\}$، $B=\{4,6,7,8,9,10\}$ ۽ $C=\{5,7,9,11\}$

17.1.4 ترتيب ڏنل جوڙا ۽ ڪارتيسي ضرب اُپت (Ordered pairs and Cartesian product):

ڪارتيسي ضرب اپت، فرانسيسي رياضي دان رين ڊڪارٽس(Rene Descartes) جي نالي تي آهي جنهن تجزياتي جاميٽري (Analytical Geometry) جو تعارف ڪرايو. تجزياتي جاميٽري ۾ هموار سطح يا پلين(Plane) تي ٽپڪن جو هنڌ لهڻ لاءِ ترتيب ڏنل جوڙن جو استعمال ٿيندو آهي. اچو ته ترتيب ڏنل جوڙن ۽ ڪارتيسي ضرب اُپت تي تفصيلي بحث ڪريون.

17.1.4 (i) ترتيب ڏنل جوڙن جي سڃاڻپ ڪرڻ:

عددن جو هڪ اڇو جوڙو جنهن ۾ ترتيب برقرار هجي تنهن کي ترتيب ڏنل جوڙو چئبو آهي. ڪن به حقيقي عددن a ۽ b لاءِ ، جيڪڏهن اسين a کي پهريون ۽ b کي ٻيون رکون ته پوءِ a ۽ b جو ترتيب ڏنل جوڙو هيئن لکبو: (a,b) . ترتيب ڏنل جوڙي (a,b) ۾ a کي پهريون جزُو يا رکن چئبو آهي ۽ b کي ٻيو جزُو يا رکن چئبو آهي.

ٻه ترتيب ڏنل جوڙا برابر هوندا جيڪڏهن انهن جا مطابقت رکندڙ رکن برابر هجن.
يعني $(a,b)=(c,d)$ فقط ان صورت ۾ ئي ٿيندو جڏهن $a=c$ ۽ $b=d$

مثال: x ۽ y جو ملهه لهو جيڪڏهن $(x+5,8)$ ۽ $(9,y-6)$ برابر آهن

حل: اسان وٽ آهي $(9,y-6)=(x+5,8)$

$$\Rightarrow \quad 9=x+5 \quad \text{۽} \quad y-6=8$$
$$\Rightarrow \quad 9-5=x \quad \Rightarrow \quad y=8+6$$
$$x=4 \quad \text{يا} \quad y=14 \quad \text{يا}$$

انهيءَ ڪري x ۽ y جا ملهه ترتيب وار 4 ۽ 14 آهن.

17.1.4 (ii) ڪارتيسي ضرب اُپت ٺاهڻ:

جيڪڏهن A ۽ B ڪي به ٻه غير خالي سيٽ آهن ته پوءِ A جو B سان ڪارتيسي ضرب اپت، سيني ترتيب ڏنل جوڙن (a,b) جو سيٽ آهي جڏهن ته $a\in A$ ۽ $b\in B$.ان کي نشانين ۾ $A\times B$ لکبو آهي.
يعني $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A \text{ ۽ } b\in B\}$
ساڳي ريت، B جو A سان ڪارتيسي ضرب اُپت هيئن بيان ڪبو
$B\times A=\{(b,a)\,|\,b\in B \text{ ۽ } a\in A\}$

KARACHIEDU

مثال طور: جيڪڏهن $P=\{1,2,4\}$ ۽ $Q=\{5,10\}$

تہ پوءِ $P\times Q=\{(1,5),(1,10),(2,5),(2,10),(4,5),(4,10)\}$

۽ $Q\times P=\{(5,1),(5,2),(5,4),(10,1),(10,2),(10,4)\}$

نوٽ: (i) $A\times B$ کي "A ڪراس B" پڑهبو آهي.

(ii) جيڪڏهن $O(A)=m$ ۽ $O(B)=n$ تہ پوءِ $O(A\times B)=mn$

(iii) عام طرح سان $A\times B\neq B\times A$

17.2 جوڑي وارا تعلق (Binary Relations):

جوڑي واري تعلق کي بيان ڪرڻ ۽ ان جي ڊومين (Domain) ۽ رينج (Range) جي سڃاڻپ ڪرڻ.

جوڑي وارو تعلق (Binary Relation):

جيڪڏهن A ۽ B کي ٻہ ٻہ غير خالي سيٽ آهن تہ پوءِ ڪارتيسي ضرب اُپٽ $A\times B$ جو ڪوبہ ماتحت سيٽ R، A کان B ۾ جوڑي وارو تعلق ڪوٺبو.

مثال: جيڪڏهن $A=\{a,b,c\}$ ۽ $B=\{2,4\}$ تہ پوءِ هيٺيان لهو

(الف) A کان B ۾ ٻہ جوڑي وارا تعلق.

(ب) B کان A ۾ ٽي جوڑي وارا تعلق.

(ج) B ۾ چار جوڑي وارا تعلق.

حل: (الف) A کان B ۾ ٻہ جوڑي وارا تعلق:

هتي $A\times B=\{(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,2),(c,4)\}$

هاڻي $R_1=\{(a,2),(b,4)\}$ ۽ $R_2=\{(b,2),(c,2),(c,4)\}$

A کان B ۾ ٻہ جوڑي وارا تعلق آهن.

(ب) B کان A ۾ ٽي جوڑي وارا تعلق:

هتي $B\times A=\{(2,a),(2,b),(2,c),(4,a),(4,b),(4,c)\}$

هاڻي $R_1=\{(2,a)\}$، $R_2=\{(2,a),(2,b)\}$ ۽ $R_3=\{(4,a),(4,b),(4,c)\}$

B کان A ۾ ٽي جوڑي وارا تعلق آهن.

(ج) B ۾ چار جوڑي وارا تعلق:

هتي $B\times B=\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$

هاڻي $R_1=\varnothing$، $R_2=\{(2,2)\}$، $R_3=\{(2,4),(4,2)\}$ ۽ $R_4=\{(2,2),(2,4)\}$

چار جوڑي وارا تعلق B ۾ آهن.

جوڑي واري تعلق جي ڊومين ۽ رينج (Domain and Range of a Binary Relation):

جيڪڏهن R هڪ جوڑي وارو تعلق آهي. سيٽ A کان سيٽ B ۾، تہ پوءِ R جي ڊومين، هڪ اهڙوسيٽ آهي جنهن جا رڪن R جي سمورن ترتيب ڏنل جوڑن جا پهريان رڪن هجن. R جي ڊومين کي $\text{Dom}\,R$ سان ظاهر ڪبو آهي. R جي رينج، لکبي $\text{Range}\,R$، هڪ اهڙو سيٽ آهي جنهن جا رُڪن R جي سمورن ترتيب ڏنل جوڑن جا ٻيا رڪن هجن.

مثال طور: جيڪڏهن $A=\{1,2,3,4\}$، $B=\{4,5,6,7\}$ ۽ $R=\{(1,4),(2,4),(3,5),(3,6)\}$، A کان B ۾ هڪ جوڑي وارو تعلق آهي تہ پوءِ $\text{Dom}\,R=\{1,2,3\}$ ۽ $\text{Range}\,R=\{4,5,6\}$

KARACHIEDU.COM

مثال: جيڪڏهن $x, y \in N$ ۽ $\mathbb{N}$ ۾ هڪ جوڑي وارو تعلق R هن ريت ڏنل آهي.

$R = \{(x,y) \mid x+y=5\}$ تہ پوءِ R کي جدولي نموني ۾ لکو. ان جي ڊومين ۽ رينج به لکو.

حل: جدولي نموني ۾ ، $R = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

هتي $\text{Dom } R = \{1,2,3,4\}$

۽ $\text{Range } R = \{1,2,3,4\}$

17.3 عملَ (Functions) :

عمل (Function) رياضي جي هڪ شاخ ڪيلڪيولس (Calculus) جي بنيادي تصورن مان هڪ آهي جنهن سائنس جي ميدان ۾ انقلاب پيدا ڪري ڇڏيو. عمل حقيقت ۾ هڪ اصول يا تعلق آهي جيڪو بن سيٽن يا مقدارن ۾ لاڳاپو ٺاهي ٿو. مثال طور گول جي ايراضي "A" لاڳاپيل آهي رداس "r" سان هن اصول مطابق: $A = \pi r^2$ هتي ، اسين عمل کي سيٽن جي بنياد تي پڑهنداسين.

17.3 (i) عمل کي بيان ڪرڻ ۽ ڊومين ، ڪوڊومين (Codomain) ۽ رينج جي سڃاڻپ ڪرڻ:

عمل هڪاهڙو جوڑي وارو تعلق آهي جنهن ۾ ڊومين جو هر هڪ رکن ، رينج جي هڪ ۽ فقط هڪ ئي رکن سان لاڳاپيل هوندو آهي. مثال طور $\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$ هڪ عمل آهي.

جڏهن تہ $\{(1,5),(2,6),(2,7),(3,9)\}$ هڪ عمل نہ آهي ڇاڪاڻ تہ ڊومين جو رکن "2" رينج جي هڪ کان وڌيڪ رکن سان لاڳاپيل آهي.

سيٽ A کان سيٽ B طرف عمل (Function from set A to set B):

فرض ڪريو A ۽ B کي بہ بہ غير خالي سيٽ آهن ۽ R هڪ جوڑي وارو تعلق آهي. A کان B ۾ . تہ پوءِ R کي A کان B طرف عمل ڪوٺبو جيڪڏهن

(i) $\text{Dom } R = A$

(ii) A جو هر هڪ رکن ، R وسيلي، B جي ڪنهن هڪ خاص رکن سان لاڳاپيل هجي.

يعني جيڪڏهن $(a,b) \in R$ ۽ $(a,c) \in R$ تہ پوءِ $b = c$ عملن کي عام طرح سان انگريزي يا يوناني الف بي جي اکرن سان ظاهر ڪبو آهي جهڙوڪ f، g، h وغيره ۽ α, β, γ وغيره.

جيڪڏهن f هڪ عمل آهي. A کان B طرف، تہ پوءِ اسين ان ريت لکنداسين $f: A \to B$ ۽ هر هڪ $(a,b) \in f$ لاءِ، b کي f وسيلي a جو پاچو (image) چئبو ۽ هن ريت لکبو $b = f(a)$.

مثال: فرض ڪريو $A = \{1,2,3,4\}$ ۽ $B = \{2,3,4,5\}$ سڃاڻپ ڪريو تہ هيٺين مان ڪهڙو A کان B طرف عمل آهي.

(i) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

(ii) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)\}$

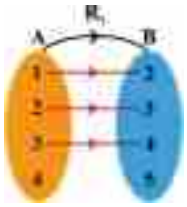
(iii) $R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

KARACHIEDU.COM

نقشي خاکو

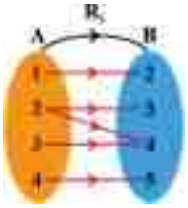
حل:

(i) $R_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$



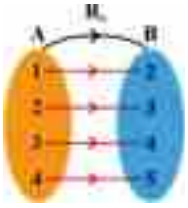
R_1 هڪ عمل نہ آهي چاکاڻ تہ $\text{Dom } R_1 \neq A$
جيئن تہ پاسي واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي

(ii) $R_2 = \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,5)\}$



R_2 هڪ عمل نہ آهي چاکاڻ تہ ڊومين جو هڪ رکن "2" B جي
ڪنهن مخصوص رکن سان لاڳاپيل نہ آهي.
جيئن تہ پاسي واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

(iii) $R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

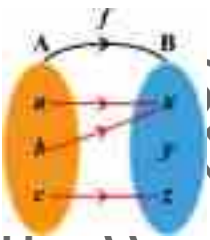


R_3 هڪ عمل آهي چاکاڻ تہ $\text{Dom } R_3 = A$ ۽ ڊومين جو هر هڪ
رکن B جي ڪنهن مخصوص رکن سان لاڳاپيل آهي.
جيئن تہ پاسي واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

➢ **ڊومين ، ڪو ڊومين ۽ رينج (Domain, Co-domain and Range):**

جيڪڏهن A کان B طرف ، f هڪ عمل آهي يعني $f: A \to B$ تہ پوءِ A کي ان جو ڊومين (پهريون سيٽ)
چئبو ۽ B کي ان جو ڪو ڊومين (Co-domain) چئبو.
جڏهن تہ f جي سيني پاڻ جي سيٽ کي رينج چئبو آهي.

مثال: جيڪڏهن A کان B طرف f هڪ عمل آهي جيئن تہ ڏنل شڪل ۾ ڏيکاريو ويو
آهي تہ پوءِ ان جو ڊومين ، ڪوڊومين ۽ رينج لکو. $f(a)$ ۽ $f(c)$ جا ملهہ ڳن لکو.



حل:

f جي نقشي خاکي مطابق

$\text{Dom } f = A = \{a,b,c\}$ ، f جو ڪو ڊومين $= B = \{x,y,z\}$ ۽ f جي رينج $= \{x,z\}$

ان کان علاوه $f(a) = x$ ۽ $f(c) = z$

نوٽ:

(i) f جي رينج ماتحت سيٽ آهي ڪو ڊومين جو.
(ii) هر هڪ عمل هڪ تعلق آهي پر ان جو ابتڙ صحيح نہ آهي.

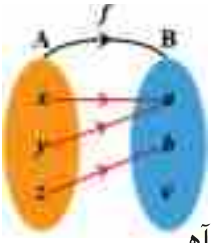
17.3 (ii) هيٺين جي وضاحت ڪري سمجهايو :

➢ **انٽو ۽ ون - ون عمل (انجيڪٽو عمل):**
➢ **آنٽو عمل (سرجيڪٽو عمل):**
➢ **ون - ون ۽ آنٽو عمل (بائيجيڪٽو عمل):**

سڀ کان اڳ ۾ اسين آنٽو عمل ۽ ون - ون عمل کي بيان ڪريون ٿا.

KACHIEDU.COM

➢ اِنٽو عمل (Into function):

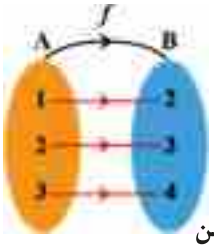


ڪن بہ بن سيٽن A ۽ B لاءِ، هڪ عمل $f:A\to B$ اِنٽو ڪوٺبو جيڪڏهن f جي رينج، B جو واجب ماتحت سيٽ هجي. (يعني تہ $\text{Range } f \subset B$)

مثال طور: $A=\{x,y,z\}$ ۽ $B=\{a,b,c\}$ لاءِ هڪ عمل $f:A\to B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي $f=\{(x,a),(y,a),(z,b)\}$

ان عمل کي اِنٽو عمل چئبو چاڪاڻ تہ $\text{Range } f \subset B$، جيئن ڏنل شڪل ۾ ڏيکاريل آهي جڏهن تہ $\text{Range } f=\{a,b\}$

➢ ون - ون عمل (One-one function):



ڪن بہ بن سيٽن A ۽ B لاءِ، هڪ عمل $f:A\to B$ کي ون - ون عمل ڪوٺبو جيڪڏهن A جي مختلف رکن جا B ۾ ڌار ڌار پاڇا هجن.

مثال طور: $A=\{1,2,3\}$ ۽ $B=\{2,3,4\}$ لاءِ ۽ هڪ عمل $f:A\to B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$.

ان کي ون - ون عمل چئبو چاڪاڻ تہ A جي مختلف رکن جا B ۾ ڌار ڌار پاڇا آهن جيئن تہ ڏنل شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

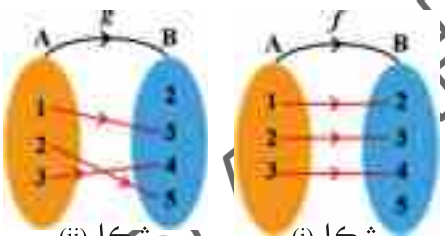
➢ انٽو ۽ ون ــ ون عمل يا انجيڪٽو عمل (Into and one-one function or injective function):

اهڙو عمل جيڪو اِنٽو هجڻ سان گڏوگڏ ون ــ ون بہ هجي، تنهن کي انٽو ۽ ون - ون عمل يا انجيڪٽو عمل چئبو آهي.

مثال طور: $A=\{1,2,3\}$ ۽ $B=\{2,3,4,5\}$ لاءِ، هڪ عمل $f:A\to B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي.

$f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ ان کي انجيڪٽو عمل چئبو چاڪاڻ تہ اهو اِنٽو هجڻ سان گڏوگڏ ون ــ ون بہ آهي.

جيئن شڪل(i) ۾ ڏيکاريل آهي.

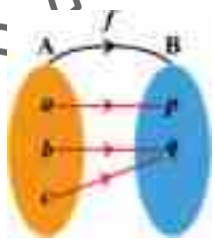


شڪل(i) شڪل(ii)

هڪ عمل $g:A\to B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي $g=\{(1,3),(2,5),(3,4)\}$ ان کي پڻ انجيڪٽو عمل چئبو جيئن تہ شڪل (ii) ۾ ڏيکاريل آهي.

➢ آنٽو عمل يا سرجيڪٽو عمل (Onto function or surjective function):

ڪن بہ بن سيٽن A ۽ B لاءِ، هڪ عمل $f:A\to B$ آنٽو يا سرجيڪٽو عمل ڪوٺبو جيڪڏهن $\text{Range } f=B$

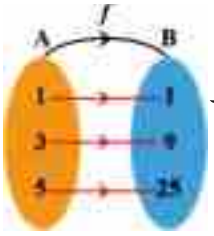


مثال طور: $A=\{a,b,c\}$ ۽ $B=\{p,q\}$ لاءِ، هڪ عمل $f:A\to B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي $f=\{(a,p),(b,q),(c,q)\}$ ان کي آنٽو عمل چئبو چاڪاڻ تہ $\text{Range } f=B$ جيئن پاسي واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

➢ ون - ون ۽ آنٽو عمل يا بائيجيڪٽو عمل: (One-one and onto function or bijective function)

اهڙو عمل جيڪو ون - ون هجڻ سان گڏوگڏ آنٽو بہ هجي تنهن کي ون - ون ۽ آنٽو يا بائيجيڪٽو عمل چئبو آهي.

KARACHIEDU.COM

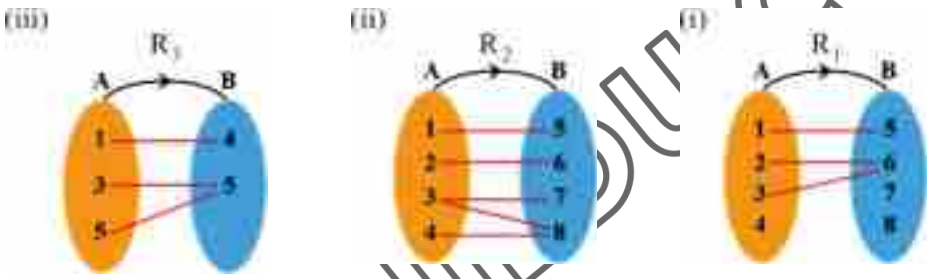


مثال طور: $A=\{1,3,5\}$ ۽ $B=\{1,9,25\}$ لاءِ، هڪ عمل $f:A\to B$ جيڪو هن ريت بيان ڪيل آهي $f=\{(1,1),(3,9),(5,25)\}$ ان کي بائيجيڪٽو عمل چئبو آهي ڇاڪاڻ ته اهو ون - ون هجڻ سان گڏوگڏ آنٽوبہ آهي. جيئن ته پاسي واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي

(iii) 17.3 جاچڻ ته ڇا ڏنل تعلق هڪ عمل آهي يا نہ:

هڪ تعلق جي عمل هجڻ يا نہ هجڻ جي جاچ ڪرڻ لاءِ اسان کي ڊومين تي سمورو ڏيان ڏيڻو پوندو.
جيڪڏهن هڪ تعلق ۾، ڊومين جو ڪو رڪن بنا پاڇي جي آهي يا ڪو رُڪن هڪ کان وڌيڪ پاڇن سان لاڳاپيل آهي ته پوءِ اهو تعلق عمل نہ آهي.

مثال: A کان B طرف ڏنل تعلقن جي جاچ ڪريو جن جون نقشي شڪليون ڏنل آهن. فيصلو ڪريو ته ڪهڙو عمل آهي ۽ ڪهڙو عمل نہ آهي

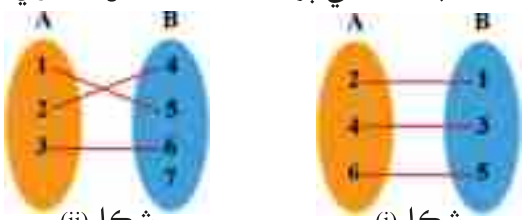


حل:
R_1 هڪ عمل نہ آهي ڇاڪاڻ ته ڊومين جو هڪ رڪن "4" بنا پاڇي جي آهي
R_2 بہ هڪ عمل نہ آهي ڇاڪاڻ ته ڊومين جي هڪ رڪن "3" کي هڪ کان وڌيڪ پاڇا آهن.
R_3 هڪ عمل آهي ڇاڪاڻ ته ڊومين جي هر هڪ رڪن کي هڪ مخصوص پاڇو آهي.

(iv) 17.3 ون - ون عمل ۽ ون - ون مطابقت جي وچ ۾ فرق:
(Difference between one-one correspondence and one-one function):

فرض ڪريو A ۽ B کي بہ بہ غير خالي سيٽ آهن. A ۽ B جي وچ واري ون - ون مطابقت ۾، هيٺهي سيٽن مان ڪنهن هڪ سيٽ جو هر هڪ رڪن هيئي سيٽ جي نيڪ هڪ رڪن سان لاڳاپيل هوندو آهي.
يعني ته ون - ون مطابقت هميشہ بائيجيڪٽو عمل کي ظاهر ڪندي آهي جڏهن ته ون - ون عمل هميشہ بائجيڪٽو نہ هوندو آهي.

مثال طور: شڪل (i) ون - ون مطابقت ڏيکاري ٿي.
جڏهن ته شڪل (ii) ۾ ون - ون مطابقت نہ آهي پر اها ون - ون عمل ڏيکاري ٿي.



شڪل (ii) شڪل (i)

KARACHIOUP.COM

مشق 17.5

1. x ۽ y جو ملهه لهو جيڪڏهن
   (i) $(x-5,10)=(11,y-7)$
   (ii) $(5x+8,5y-4)=(3x+10,2y+2)$
   (iii) $(2x-3y,5x+y)=(3,16)$
2. جيڪڏهن سيٽ P جا 10 رکن آهن ۽ سيٽ Q جا 15 رکن آهن تہ پوءِ $P\times Q$، $Q\times P$ ۽ $P\times P$ جي رکنن جو تعداد لهو
3. جيڪڏهن $A=\{1,2\}$ ، $B=\{2,3\}$ ۽ $C=\{1,3,5\}$ تہ هيٺيان لهو.
   (i) $A\times B$ (ii) $B\times C$ (iii) $A\times(B\cup C)$
   (iv) $B\times(A\cup C)$ (v) $(A\cap B)\times(B\cap C)$
4. جيڪڏهن $A=\{5,6\}$ ۽ $B=\{1,2,3\}$ تہ هيٺيان لکو:
   (i) $A\times B$ ۾ ٽي جوڙي وارا تعلق (ii) $B\times A$ ۾ چار جوڙي وارا تعلق
   (iii) B ۾ پنج جوڙي وارا تعلق (iv) A جا سيئي جوڙي وارا تعلق.
5. ٻن سيٽن A ۽ B لاءِ ، جيڪڏهن $O(A)=3$ ۽ $O(B)=4$ تہ پوءِ $A\times B$ ۾ سيني جوڙي واري تعلقن جو تعداد لکو.
6. $A\times B$ جا هيٺيان جوڙي وارا تعلق جدولي نموني ۾ لکو جڏهن تہ $A=\{0,1,2,3\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8\}$ اهڙيءَ طرح جو $a\in A$ ۽ $b\in B$
   (i) $R_1=\{(a,b)\mid b<5\}$ (ii) $R_2=\{(a,b)\mid a+b=9\}$
   (iii) $R_3=\{(a,b)\mid a-b=1\}$
7. جيڪڏهن تعلق $R=\{(x,y)\mid y=2x+5\}$ آهي Z ۾ تہ پوءِ
   (i) رينج لکو جيڪڏهن ڊومين $\{-2,-1,0,1,2\}$ آهي.
   (ii) ڊومين لکو جيڪڏهن رينج $\{11,13,15,17\}$ آهي.
8. جيڪڏهن x, y رکن آهن W جا تہ پوءِ هيٺين تعلقن جي ڊومين ۽ رينج W ۾ لکو.
   (i) $\{(x,y)\mid 3x+y=11\}$ (ii) $\{(x,y)\mid x-y=6\}$
9. جيڪڏهن $f:A\to B$ هڪ عمل آهي جيڪو هيٺ ڏنل آهي $f=\{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8)\}$ جڏهن تہ $A=\{1,2,3,4\}$ ۽ $B=\mathbb{N}$. ان جي ڊومين، کي ڊومين ۽ رينج لکو. $f(2)$ ۽ $f(4)$ جا ملهه ٻہ لکو.
10. جيڪڏهن $A=\{0,1,2,3,4\}$ ۽ $B=\{2,4,6,8,10\}$ تہ پوءِ جاچ ڪريو تہ ڇا A کان B طرف هيٺيان تعلق عمل آهن يا نہ جيڪڏهن اهي عمل آهن تہ پوءِ انهن جا قسم لکو.
   (i) $R_1=\{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8)\}$

(ii) $R_2 = \{(0,10),(1,8),(2,6),(2,4),(3,4),(4,2)\}$

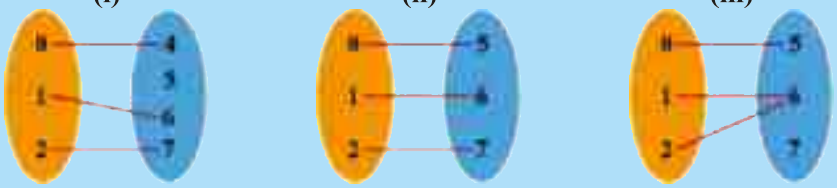
(iii) $R_3 = \{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8),(4,8)\}$

(iv) $R_4 = \{(0,2),(1,2),(2,2),(3,2),(4,8)\}$

(v) $R_5 = \{(0,2),(1,4),(2,6),(3,8),(4,10)\}$

11. هيٺين مان ڪهڙو ون - ون عمل يا ون - ون مطابقت يا ڪو به نه آهي.

(i) (ii) (iii)



12. جيڪڏهن $P = \{a,b,c\}$، $Q = \{x,y,z\}$ ۽ $R = \{p,q,r,s\}$ تہ پوءِ هيٺيان لکو.

(i) P کان Q طرف هڪ آنٽو عمل f.

(ii) R کان P طرف هڪ آنٽو عمل g.

(iii) P کان R طرف هڪ انجيڪٽو عمل h.

(iv) Q کان P طرف هڪ بائيجيڪٽو عمل k.

جائزي واري مشق 17

1. صحيح جواب چونڊيو:

(i) ڪهڙو N جو ماتحت سيٽ آهي

(a) Z (b) Q (c) E (d) P

(ii) $A = \{x \mid x \in Z \wedge x^2 = 25\}$ جو جدولي نمونو _____ آهي.

(a) $\{1,5\}$ (b) $\{-5,5\}$

(c) $\{1,5,25\}$ (d) $\{-5\}$

(iii) ٻن سيٽن A ۽ B لاءِ، جيڪڏهن $O(A) = O(B)$ تہ پوءِ

(a) $A \subseteq B$ (b) $B = A$

(c) $A \sim B$ (d) $A \subset B$

(iv) $\{x \mid x \in N \wedge x < 1\}$ _____ آهي.

(a) واحد سيٽ (b) غير محدود سيٽ

(c) خالي سيٽ (d) بالا سيٽ

(v) جيڪڏهن $A = \{1,2,3,4\}$ ۽ $B = \{2,4,6\}$ تہ پوءِ $A \Delta B$ = _____

(a) $\{1,2\}$ (b) $\{6\}$

(c) $\{1,3\}$ (d) $\{1,3,6\}$

(vi) كھڙو عمل متا جي خاصيت نٿو رکي

(a) همشڪلي فرق (b) ميلاپ

(c) فرق (d) ڪاٽا

(vii) $\{x \mid x \in P \vee x \in Q\} =$ _____.

(a) $P \cap Q$ (b) $P \cup Q$

(c) $P - Q$ (d) $P \Delta Q$

(viii) $\{x \mid x \in U \wedge x \notin A \cap B\} =$ _____.

(a) $A \cap B$ (b) $(A \cup B)'$

(c) $(A \cap B)'$ (d) $A' \cap B'$

(ix) ڪن به بن غير خالي سيٽن A ۽ B لاءِ، جيڪڏهن $A \cup B = U$ ۽ $A \cap B = \varnothing$ تہ پوءِ A ۽ B _____ آهن.

(a) جزا (b) لاڳاپيل سيٽ

(c) برابر سيٽ (d) ڪو به نہ

(x) $\left((A')'\right)' =$ _____.

(a) $(A')'$ (b) A'

(c) A (d) B

(xi) جيڪڏهن $A \supseteq B$ تہ پوءِ $A \cup B =$ _____

(a) A (b) B

(c) $\varnothing$ (d) U

(xii) وين شڪلين ۾ _____ ڪائناتي سيٽ کي ظاهر ڪرڻ لاءِ استعمال ڪبو آهي

(a) مستطيل (b) گول

(c) گول نما (d) سيئي

(xiii) جيڪڏهن $(x,6) = (2, y-6)$ تہ پوءِ $x + y =$ _____

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 14

(xiv) جيڪڏهن $O(A \times B) = 100$ ۽ $O(B) = 5$ تہ پوءِ $O(A) =$ _____

(a) 10 (b) 15 (c) 20 (d) 25

(xv) هڪ عمل کي سرجيڪٽو چئبو آهي جيڪڏهن Co-domain _____ Range

(a) $\supseteq$ (b) $\subset$

(c) $=$ (d) اهي سيئي

(xvi) هڪ عمل کي انٽو چئبو جيڪڏهن Co-domain _____ Range

(a) $\supseteq$ (b) $\subset$

(c) $=$ (d) ڪو به نہ

(xvii) هيٺين مان ڪهڙو عمل آهي.

(a) $\{(2,5),(2,7),(3,8)\}$ (b) $\{(6,7),(7,6),(6,8)\}$

(c) $\{(0,5),(6,0),(5,6)\}$ (d) ڪو به نه

(xviii) هيٺين مان ڪهڙو هميشہ بائيجيڪٽو هوندو آهي

(a) آنٽو عمل (b) ون - ون عمل

(c) اِنٽو عمل (d) ون - ون مطابقت

(xix) جيڪڏهن $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ تہ پوءِ ڪهڙو ممڪن نہ آهي.

(a) $f(5)=6$ (b) $f(7)=8$

(c) $f(-2)=6$ (d) $f(9)=0$

(xx) هيٺين مان ڪهڙو مٿا جي خاصيت رکي ٿو

(a) فرق (b) ميلاپ

(c) ڪارتيسي ضرب اپت (d) ڪو به نه

2. جيڪڏهن $A=\{1,2,5\}$ ، $B=\{2,4,6\}$ ۽ $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ تہ پوءِ هيٺيان لهو.

(a) $A\cup B$ (b) $A\cap B$ (c) $A\Delta B$

(d) $A-B$ (e) A' (f) B'

3. سوال 2 جي سيٽن لاءِ ڊي مارگن جي قانونن جي تصديق ڪريو

4. ٻن سيٽن $A=\{a,b,d\}$ ۽ $B=\{a,d,e\}$ لاءِ ميلاپ ۽ ڪاٽا جي مٿا واري خاصيت جي تصديق ڪريو.

5. ٻن سيٽن $P=\{1,3,5\}$ ۽ $Q=\{1,3,7\}$ لاءِ هيٺين سيٽن کي وين شڪلين وسيلي ڏيکاريو.

(a) $P\cup Q$ (b) $P\cap Q$ (c) $P\Delta Q$ (d) $P-Q$

6. جيڪڏهن $A=\{a,c\}$ ۽ $B=\{b,d\}$ تہ هيٺيان لکو.

(a) A ۾ جوڙي وارا تعلق (b) B ۾ جوڙي وارا تعلق

(c) $A\times B$ ۾ جوڙي وارا تعلق (d) $A\cup B$ ۾ جوڙي وارا تعلق

7. جيڪڏهن $A=\{1,2,5\}$ ۽ $B=\{6,8\}$ تہ پوءِ A کان B طرف عمل لهو جيڪو

(a) آنٽو عمل هجي (b) انٽو عمل هجي

خلاصو

- جدولي ، بياني ۽ علامتي نمونا هڪ سيٽ کي ظاهر ڪرڻ جا طريقا آهن.
- خالي سيٽ ۾ کو به رکن نه هوندو آهي.
- جيڪڏهن A ماتحت سيٽ آهي B جو ته پوءِ B بالا سيٽ آهي A جو.
- جيڪڏهن $A \subseteq B$ ۽ $B \subseteq A$ ته پوءِ $A = B$.
- هڪ جيترا سيٽ ون - ون مطابقت رکن ٿا.
- جيڪڏهن $A \subseteq B$ ۽ $A \neq B$ ته پوءِ $A \subset B$.
- ميلاپ ، ڪاٽا ، فرق ، همشڪلي فرق ، ڪامپليمينٽ ۽ ڪارتيسي ضرب اُپٽ سيٽن تي عمل آهن.
- جيڪڏهن $A \cap B = \varnothing$ ته پوءِ A ۽ B منفرد سيٽ آهن.
- جيڪڏهن $A \cup B = U$ ته پوءِ A ۽ B مڪمل سيٽ آهن.
- جُزا هميشه منفرد ۽ مڪمل سيٽ هوندا آهن.
- فرق ۽ ڪارتيسي ضرب اپٽ مٽا جي خاصيت نٿا رکن.
- ميلاپ، ڪاٽا ۽ همشڪلي فرق مٽا ۽ سنگت واري خاصيت رکن ٿا.
- ميلاپ ۽ ڪاٽا هڪٻئي تي ورهاست واري خاصيت رکن ٿا.
- ڊي مارگن جا قانون: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (i) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (ii)
- سيٽن ، انهن جي تعلق ۽ عملن جي جاميٽري واري اظهار کي وين شڪل چئبو آهي.
- جان وين (John Venn)، 1881ع ۾ وين شڪلين کي پيش ڪيو
- وين شڪلين ۾ سيٽن ۽ ڪائناتي سيٽ کي ترتيبوار گولن يا بيضوي شڪلين ۽ مستطيل سان ظاهر ڪبو آهي.
- جيڪڏهن $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ ۽ $b = d$
- $O(A \times B) = O(A) \cdot O(B)$
- $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- ڪارتيسي ضرب اپٽ جي هر هڪ ماتحت سيٽ کي جوڙي وارو تعلق چئبو آهي.
- عمل هڪ اهڙو جوڙي وارو تعلق آهي جنهن ۾ ڊومين جي هر هڪ رکن کي هڪ مخصوص پاڇو هوندو آهي.
- جيڪڏهن $f : X \to Y$ هڪ عمل آهي ته پوءِ X ۽ Y ترتيبوار ڊومين ۽ ڪو ڊومين آهن جڏهن ته رينج سمورن پاڇن جو سيٽ آهي.
- هڪ عمل (i) انتو ڪوٿبو جيڪڏهن Range $\subset$ Co-domain
  (ii) آنتو ڪوٿبو جيڪڏهن Range = Co-domain
  (iii) ون - ون ڪوٿبو جيڪڏهن ڊومين جي مختلف رکن جا رينج ۾ ڏار ڏار پاڇا هجن.
- هڪ عمل (i) انجيڪٽو ڪوٿبو جيڪڏهن اهو ون - ون ۽ انتو آهي
  (ii) سرجيڪٽو ڪوٿبو جيڪڏهن اهو آنتو آهي
  (iii) بائيجيڪٽو ڪوٿبو جيڪڏهن اهو ون - ون ۽ آنتو آهي.
- ون - ون مطابقت هميشه بائيجيڪٽو هوندي آهي.
- ون - ون عمل هميشه بائيجيڪٽو نه هوندو آهي.

قيرقار يا متجڙ
VARIATIONS

18 يونٽ

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- نسبت، تناسب ۽ قير قار (سڌو ۽ اُبتو) بيان ڪن
- مسلسل تناسب ۾ ٽيون، چوٿون ۽ وچيون متناسب لهن
- تناسبن جا قانون
  - تناسب جو سوال حل ڪرڻ لاءِ عڪسي نسبت، نسبت جي تبديلي، نسبت جي ملائڻ ۽ نسبت جي ونڊ وارن قانونن جو استعمال ڪن
- گڏيل قير قار کي بيان ڪن
- گڏيل قير قار سان لاڳاپيل سوال حل ڪن
- تناسبن تي مشتمل شرطيہ مساواتن کي ثابت ڪرڻ لاءِ K واور طريقو استعمال ڪن
- قير قار وارا روز مره زندگي جا مسئلا حل ڪن



18.1 نسبت، تناسب ۽ قيرقار

18.1.1 نسبت، تناسب ۽ قيرقار (سڌو ۽ اُبتو) بيان ڪرڻ:

(a) نسبت (Ratio):

ساڳي ايڪن واري بن مقدارن جي پيٽ کي نسبت چئبو آهي. اها بن ساڳي قسم جي مقدارن جو تعلق آهي. بين لفظن ۾، نسبت جو مطلب آهي ته هڪ مقدار بي مقدار جو گهٽو حصو آهي. جيڪڏهن a ۽ b ٻه ساڳي قسم جون مقدارون آهن ۽ b ٻُڙي نه آهي ته پوءِ a ۽ b جي نسبت کي ان ريت لکبو: $a:b$ يا $\frac{a}{b}$

مثال طور: جيڪڏهن هڪ ڪلاس ۾ 13 چوڪرا ۽ 8 چوڪريون آهن ته پوءِ چوڪرن جي تعداد جي نسبت چوڪرين جي تعداد سان هن ريت لکي سگهجي ٿي 13:8 يا اٽپورن ۾ $\frac{13}{8}$ لکبو.

نوٽ:

(i) نسبت ۾ رُڪنن جي ترتيب جي اهميت هوندي آهي.

(ii) نسبت جو ڪوبه ايڪو نه هوندو آهي.

(iii) نسبت $a:b$ ۾ پهرين رُڪن (First term) کي "مُنڊ" (Antecedent) چئبو آهي ۽ ٻيئي رُڪن (Second term) کي "پُڄڻ" (Consequent) چئبو آهي.

مثال 1: هيٺين جي نسبت لکو

(i) 400 ميٽر ۽ 900 ميٽر
(ii) 700 گرام ۽ 2 ڪلو گرام
(iii) 30 سيڪنڊ ۽ 2 منٽ
(iv) 200 رُپيا ۽ 300 گرام

حل:

(i) 400 ميٽر ۽ 900 ميٽر جي نسبت

$$400 : 900 = \frac{400}{900} = \frac{4}{9} = 4 : 9$$

900 : 400 جي سادي صورت 4 : 9 آهي.

(ii) 700 گرام ۽ 2 ڪلو گرام جي نسبت

جيئن ته 1ڪلوگرام = 1000 گرام

تنهن ڪري 2 ڪلوگرام = 2000 گرام

هاڻي

$$700 : 2000 = \frac{700}{2000} = \frac{7}{20} = 7 : 20$$

(iii) 30 سيڪنڊ ۽ 2 منٽ جي نسبت

جيئن ته 1 منٽ = 60 سيڪنڊ

تنهن ڪري 2 منٽ = 120 سيڪنڊ

هاڻي

$$30 : 120 = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 1 : 4$$

(iv) 200 رُپيا ۽ 300 گرام جي نسبت

جيئن ته مقدارون ساڳي قسم جون نه آهن تنهن ڪري 200 روپيا ۽ 300 گرام جي نسبت نٿي لهي سگهجي.

KARACHIEDU.COM

مثال 2: نسبت $5a+2b : 4a+3b$ لهو جيڪڏهن $a : b = 4 : 5$

حل: ڏنل آهي تہ $a : b = 4 : 5$ يا $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

هاڻي $5a + 2b : 4a + 3b = \frac{5a + 2b}{4a + 3b}$

$= \frac{\frac{5a+2b}{b}}{\frac{4a+3b}{b}} = \frac{5(\frac{a}{b})+2(\frac{b}{b})}{4(\frac{a}{b})+3(\frac{b}{b})}$ (انس ۽ چيد کي b سان وڌ ڪندي)

$= \frac{5(\frac{4}{5})+2}{4(\frac{4}{5})+3} = \frac{4+2}{\frac{16}{5}+3} = \frac{6}{\frac{31}{5}} = \frac{30}{31}$ $\left(\because \frac{a}{b} = \frac{4}{5}\right)$

انهي ڪري $5a + 2b: 4a +3b = 30: 31$

مثال 3: m جو ملهه لهو جيڪڏهن نسبتون $3m +5 : 4m + 3$ ۽ $2 : 3$ برابر آهن

حل: ڏنل شرط موجب

$\Rightarrow \frac{3m+5}{4m+3} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3(3m+5) = 2(4m+3)$

$\Rightarrow 9m+15 = 8m+6$

$\Rightarrow 9m-8m = 6-15$

$\Rightarrow m = -9$

انهي ڪري m جوگهربل مُلهه -9 آهي

مثال 4: نسبت $15 : 4$ جي هر هڪ رڪن ۾ ڪهڙو عدد جوڙ ڪجي جو اها نسبت $\frac{2}{3}$ جي برابر ٿيئي.

حل: فرض ڪيو تہ گهربل عدد a آهي

ڏنل شرط موجب

$\Rightarrow \frac{4+a}{15+a} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3(4+a) = 2(15+a)$

$\Rightarrow 12+3a = 30+2a$

$\Rightarrow 3a-2a = 30-12$

$\Rightarrow a = 18$

انهي ڪري گهربل عدد 18 آهي

(d) تناسب (Proportion):

بن نسبتن جي برابري کي تناسب چئبو آهي يا تناسب هڪ اهڙو بيان آهي جيڪو بن نسبتن جي برابري طور ظاهر ٿي سگهي. جيڪڏهن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تہ پوءِ a,b,c,d تناسب ۾ آهن ۽ اسين ان کي هن ريت لکي سگهون ٿا: $a:b::c:d$ جڏهن تہ مقدار a ۽ d کي باهريان رُکن (Extremes) چئبو آهي. مقدار b ۽ c کي وچيان رُکن (Means) چئبو آهي. a، b، c ۽ d جي تناسب کي هن ريت لکبو آهي.

$a:b::c:d$

يا $a:b = c:d$

يا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

يا $ad = bc$

نوٽ: باهرين رُکنن جي ضرب اُپٽ = وچين رُکنن جي ضرب اُپٽ

KARACHIEDU.COM

مثال 5: x جو مُلهه لهو جيڪڏهن $40:60=50:x$

حل:

ڏنل آهي تہ $40:60=50:x$

جيئن تہ وچين رُکن جي ضرب اُپت = ٻاهرين رُکن جي ضرب اُپت

تنهنڪري $40x=60\times 50$

$$x=\frac{60\times 50}{40}=75$$

يعني تہ $x = 75$

مشق 18.1

1. هيٺين جي نسبت لهو

(i) 70 ڪلو گرام ۽ 28 ڪلو گرام (ii) 60 سينٽي ميٽر ۽ 1 ميٽر

(iii) 40 سيڪنڊ ۽ 3 منٽ (iv) 200 ملي ليٽر ۽ 2 ليٽر

(v) $135°$ ۽ $360°$ (vi) 3.5 ڪلو گرام ۽ 5 ڪلو گرام 200 گرام

2. هڪ ڪارخاني ۾ 120 ڪم ڪندڙ آهن جن مان 45 عورتون ۽ باقي مرد آهن. تہ هيٺين کي ڳوليو:

(i) مردن ۽ عورتن جي نسبت (ii) عورتن ۽ مردن جي نسبت

(iii) عورتن ۽ سمورن ڪم ڪندڙن جي نسبت

(iv) مردن ۽ سمورن ڪم ڪندڙن جي نسبت:

3. جيڪڏهن $5(4x-2y)=3x-4y$ تہ $x:y$ لهو.

4. "a" جو ملهه لهو جيڪڏهن نسبتون $3a+4:2a+5$ ۽ $4:3$ برابر آهن.

5. نسبت 5:27 جي هر هڪ رُکن ۾ کهڙو عدد جوڙ ڪجي جو اها نسبت 1:3 جي برابر ٿيئي.

6. جيڪڏهن $a:b=5:8$ تہ پوءِ $3a+4b:5a+7b$ جو ملهه لهو.

7. هيٺين مان x جو مُلهه لهو.

(i) $2x+5:5::3x-2:7$ (ii) $\frac{4x-3}{5}:\frac{3}{4}::\frac{4x}{3}:\frac{7}{2}$

(iii) $\frac{x-3}{2}:\frac{5}{x-1}::\frac{x-1}{3}:\frac{4}{x+4}$ (iv) $(a^2-ab+b^2):x::\frac{a^3+b^3}{a-b}:(a+b)^2$

(v) $11-x:8-x::25-x:16-x$

(e) قير قار (Variation):

هڪ مقدار ۾ تبديلي اچڻ ڪري بي مقدار جي متجڻ کي قير قار چئبو آهي. قيرقار جا ٻہ قسم آهن

➢ سڌو قير قار ➢ اُبتو قير قار

سڌو قير قار (Direct variation) :

جيڪڏهن ٻہ مقدارون A ۽ B اهڙي طرح سان ڳنڍيل هجن جو جيڪڏهن A هڪ نسبت ۾ وڌي (يا گهٽجي) تہ پوءِ B پڻ ساڳي نسبت ۾ وڌي (يا گهٽجي) تہ پوءِ ان قير قار کي سڌو قير قار چئبو آهي. جيڪڏهن هڪ مقدار y سڌي طرح متجي ٿي. مقدار x جي مطابق تہ پوءِ اسين چونداسين تہ y سڌي طرح x سان متناسب آهي ۽ هن ريت لکنداسين: $y\propto x$ يا $y=kx$ جڏهن تہ $k\neq 0$

علامت "$\propto$" کي تناسب يا متجڻ جي نشاني چئبو آهي ۽ k کي تناسب يا متجڻ جو مستقل (Constant of variation) چئبو آهي.

مثال طور:

(i) چورس جي پاسي جي ڊيگهه ۽ ان جي ايراضي سڌي تناسب ۾ آهن.

(ii) سائيڪل جر رفتار ۽ ان جو مفاصلو سڌي تناسب ۾ آهن.

مثال: جيڪڏهن y سڌي طرح متجي ٿو x جي مطابق ته پوءِ هينيان لهو.

(a) x ۽ y کي ڳنڊيندڙ مساوات (b) x ۽ y جي وچ وارو تعلق جڏهن $x=3$ ۽ $y=7$

(c) y جي قيمت جڏهن $x=24$ (d) x جي قيمت جڏهن $y=21$

حل:(a) جيئن ته y سڌي طرح متجي ٿو x جي مطابق

تنهنڪري $y \propto x$

يعني $y=kx$ ... (i)

جڏهن ته متجڻ جومستقل k آهي

(b) مساوات (i) ۾ $x=3$ ۽ $y=7$ رکڻ سان،

اسان کي ملي ٿو $7=3k$

$$\Rightarrow k=\frac{7}{3}$$

مساوات (i) ۾ x جي قيمت رکڻ سان، اسان کي ملي ٿو $y=\frac{7}{3}x$ ...(ii)

(c) مساوات (ii) ۾ $x=24$ رکڻ سان، اسان کي ملي ٿو $y=\frac{7}{3}(24)=56$

(d) مساوات (ii) ۾ $y=21$ رکڻ سان، اسان کي ملي ٿو

$$21=\frac{7}{3}x \Rightarrow x=\frac{3\times 21}{7}=9$$

مثال 2: جيڪڏهن y سڌي طرح متجي ٿو x جي ٻيئي مول مطابق جڏهن ته $x=16$ ۽ $y=10$ ته پوءِ y جو ملهه لهو جڏهن ته $x=36$

حل: ڏنل آهي ته y سڌي طرح سان متجي ٿو x جي ٻيئي مول مطابق

يعني $y \propto \sqrt{x}$

يا $y=k\sqrt{x}$ ... (i)

جڏهن ته متجڻ جو مستقل k آهي.

مساوات (i) ۾ $x=16$ ۽ $y=10$ رکڻ سان اسان کي ملي ٿو

$$10=k\sqrt{16}$$

$$\Rightarrow k=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

مساوات (i) ۾ $k=\frac{5}{2}$ رکڻ سان اسان کي ملي ٿو

$$y=\frac{5}{2}\sqrt{x} \quad ...(ii)$$

مساوات (ii) ۾ $x=36$ رکڻ سان اسان کي ملي ٿو

$$y=\frac{5}{2}\sqrt{36}$$

$$\Rightarrow y=\frac{5}{2}(6)=15$$

KARACHIEDU.COM

مثال 3: جيڪڏهن V سڌي طرح متجي ٿو r جي ڪعب مطابق ۽ $V = \frac{792}{7}$ جڏهن ٿو $r = 3$

V جو ملهه لهو جڏهن ٿو $r = 7$

حل: جيئن ٿو V سڌي طرح متجي ٿو r جي ڪعب مطابق

تنهنڪري $V \propto r^3$

$V = kr^3$ (i) (جڏهن ٿو k متجڙ جو مستقل آهي)

مساوات (i) ۾ $r = 3$ ۽ $V = \frac{792}{7}$ رکندي

$\frac{792}{7} = k(3)^3 \Rightarrow k = \frac{792}{7 \times 27} = \frac{88}{21}$ اسان کي ملي

$V = \frac{88}{21} r^3$ ... (ii) انهيءَ کري

مساوات (ii) ۾ $r = 7$ رکندي

$V = \frac{88}{21}(7)^3 = \frac{4312}{3}$ اسان کي ملي

اُبتو قير قار (Inverse Variation):

جيڪڏهن بہ مقدارون هڪبئي سان اهڙي طرح ڳنڊيل هجن جو هڪ مقدار ۾ اضافو ٻيئي مقدار ۾ گهٽتائي جو سبب ٿيئي ۽ ان جي ابتڙ بہ ٿيئي تہ پوءِ مقدارون هڪ ٻئي سان اُبتو قير قار يا متجڙ رکن ٿيون. جيڪڏهن هڪ مقدار y اُبتو متجي ٿي x جي مطابق تہ اسين چوندا سين تہ y اُبتي طرح سان x سان متناسب آهي ۽ اسين ان کي هن ريت لکندا سين.

$y \propto \frac{1}{x}$ يا $y = \frac{k}{x}$ جڏهن تہ $k \neq 0$ (متجڙ جو مستقل)

$\Rightarrow yx = k$

مثال 1: جيڪڏهن y اُبتو متجي ٿو x جي مطابق ۽ $y = 7$ جڏهن $x = 2$ تہ پوءِ y جو ملهه لهو جيڪڏهن $x = 126$

حل: هتي y اُبتو متجي ٿو x جي مطابق

يعني تہ $y \propto \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y = k(\frac{1}{x}) = \frac{k}{x}$

$\Rightarrow k = xy$ ... (i)

مساوات (i) ۾ $y = 7$ ۽ $x = 2$ رکڻ سان

اسان کي ملي $k = (2)(7) = 14$

$\Rightarrow xy = 14$ ... (ii)

مساوات (ii) ۾ $x = 126$ رکڻ سان

اسان کي ملي. $(126)y = 14$

$y = \frac{14}{126}$

$y = \frac{1}{9}$

مثال 2: جيڪڏهن y اُبتو متجي ٿو x جي ٽيئن مول مطابق ۽ $y = 27$ جڏهن $x = 8$ تہ پوءِ x جو ملهه لهو جڏهن $y = 36$

حل: هتي y اُبتو متجي ٿو $\sqrt[3]{x}$ جي مطابق

يعني تہ $y \propto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

يا $y = \frac{k}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y(\sqrt[3]{x}) = k$ ... (i)

مساوات (i) ۾ $x = 8$ ۽ $y = 27$ رکڻ سان

اسان کي ملي $k = (27)(\sqrt[3]{8}) = 54$

هاڻي مساوات (i) ۾ $k = 54$ رکڻ سان

اسان کي ملي $(y\sqrt[3]{x}) = 54$ ... (ii)

هاڻي مساوات (ii) ۾ $y = 36$ رکڻ سان

اسان کي ملي $(36)(\sqrt[3]{x}) = 54$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{54}{36} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{27}{8}$

KARACHIEDU.COM

مشق 18.2

1. جيڪڏهن y سڌي طرح متجي ٿو x جي مطابق ۽ $y=10$ جڏهن $x=3$ تہ پوءِ هيٺيان لهو.
   (i) y کي x جي شڪل ۾ (ii) y جڏهن $x=6$ (iii) x جڏهن $y=15$
2. جيڪڏهن $V \propto T$ ۽ $V=15$ جڏهن $T=24$ تہ پوءِ هيٺيان لهو.
   (i) V ۽ T کي ڳنڍيندڙ مساوات (ii) V جڏهن $T=30$ (iii) T جڏهن $V=10$
3. جيڪڏهن $u \propto \sqrt[3]{v}$ ۽ $u=4$ جڏهن $v=64$ تہ پوءِ u جو ملهه لهو جڏهن $v=216$ ۽ v جو ملهه لهو جڏهن $u=5$
4. جيڪڏهن F سڌي طرح متجي ٿو m^3 جي مطابق جڏهن $m=3$ ۽ $F=81$ تہ پوءِ F لهو جڏهن $m=5$
5. جيڪڏهن y اُبتو متجي ٿو x جي مطابق ۽ $y=10$ جڏهن $x=3$ تہ پوءِ y لهو جڏهن $x=10$
6. هڪ گيس جو مقدار V اُبتو متجي ٿو داب P جي ابتائي مول مطابق ۽ $V=12$ جڏهن $P=9$ تہ پوءِ P لهو جڏهن $V=4$
7. جيڪڏهن $F \propto \frac{1}{r^2}$ ۽ $F=8$ جڏهن $r=2$ تہ هيٺيان لهو
   (i) F جڏهن $r=5$ (ii) r جڏهن $F=24$
8. x جو ٽيون مول متجي ٿو y جي چورس مطابق جيڪڏهن $x=8$ ۽ $y=3$ تہ پوءِ x جو ملهه لهو جڏهن $y=\frac{3}{2}$
9. بن جسمن جي وچ واري قوت F اُبتو متجي ٿي انهن بنهي جي مرڪزن جي وچ واري فاصلي d جي چورس مطابق. جيڪڏهن $F=2$ ۽ $d=3$ تہ پوءِ d جو ملهه لهو جڏهن $F=72$
10. جيڪڏهن y اُبتو متجي ٿو $(x-5)$ جي مطابق جڏهن $y=6$ ۽ $x=8$ تہ پوءِ y جو ملهه لهو جڏهن $x=10$.

18.1(ii) مسلسل تناسب ۾ ٽيون، چوٿون ۽ وچيون متناسب لهڻ

اسين تناسب سان اڳيئي واقف آهيون. جيڪڏهن a، b، c ۽ d تناسب ۾ آهن تہ پوءِ $a:b::c:d$ هتي a, b, c ۽ d کي ترتيبوار پهريون، ٻيون، ٽيون، ۽چوٿون متناسب چوندا آهيون.

(a) ٽيون متناسب (Third Proportional):

مثال 1:

جيڪڏهن هڪ تناسب ۾ 4، 7 ۽ 14 ترتيبوار پهريون، ٻيون ۽ چوٿون متناسب آهن تہ پوءِ ٽيون متناسب لهو.

حل: فرض ڪريو تہ x ٽيون متناسب آهي.
تہ پوءِ

$$4:7::x:14$$
$$\Rightarrow \quad 7x=56$$
$$\Rightarrow \quad x=8$$

مثال 2:

جيڪڏهن $(a-b),(a^2+ab+b^2)$ ۽ (a^3-b^3) ترتيبوار پهريون، ٻيون ۽ چوٿون متناسب آهن تہ پوءِ ٽيون متناسب لهو.

حل: فرض ڪريو تہ x ٽيون متناسب آهي
تہ پوءِ

$$(a-b):(a^2+ab+b^2)::x:a^3-b^3$$
$$\Rightarrow \quad (a^2+ab+b^2)x=(a-b)(a^3-b^3)$$
$$(a^2+ab+b^2)\,x=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)}$$
$$\Rightarrow \quad x=(a-b)^2$$

KARACHI

(b) چوٿون متناسب (Fourth Proportional):

مثال 1: چوٿون متناسب لهو جيڪڏهن پهريان ٽي متناسب $a-b$ ، a^3+b^3 ۽ a^2-ab+b^2 آهن.

حل:

فرض ڪريو ته x چوٿون متناسب آهي ته پوءِ

$$a^3+b^3 : a-b :: (a^2-ab+b^2) : x$$

يعني ته $x\,(a^3+b^3) = (a-b)(a^2-ab+b^2)$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(a-b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a-b}{a+b}$$

مسلسل تناسب (Continued Proportion) ۽ وچون متناسب (Mean Proportional):

مقدارون a ، b ۽ c مسلسل تناسب ۾ هوندیون جيڪڏهن

$$a:b = b:c$$

يا $a:b :: b:c$

$$\Rightarrow b^2 = ac$$

هتي b کي وچون متناسب چونداسين

مثال 1: x^2-y^2 ۽ $\frac{x-y}{x+y}$ جو وچون متناسب معلوم ڪريو.

حل: فرض ڪريوته z وچون متناسب آهي، ته پوءِ

$$x^2-y^2 : z :: z : \frac{x-y}{x+y}$$

يعني ته $z^2 = (x^2-y^2)\frac{(x-y)}{x+y} = (x-y)^2$

$$\Rightarrow \quad z = x-y$$

مثال 2: a جو ملهه لهو جيڪڏهن $a-3$ ، 7 ۽ 28 مسلسل تناسب ۾ آهن.

حل: جيئن ته $a-3$ ، 7 ۽ 28 مسلسل تناسب ۾ آهن.

تنهنڪري $7 : a-3 :: a-3 : 28$

يعني ته $(a-3)^2 = 7\times 28$

$$\Rightarrow \quad (a-3)^2 = 196$$

$$\Rightarrow \quad a-3 = 14$$

$$\Rightarrow \quad a = 14+3$$

$$\Rightarrow \quad a = 17$$

مشق 18.3

1. ٽيون متناسب لهو جيڪڏهن پهريون، ٻيون ۽ چوٿون متناسب هيٺ ڏنل آهن

(i) 6، 18 ۽ 54 (ii) a^2-b^2 ، $a+b$ ۽ $a-b$

(iii) $(x+y)^2$ ، x^3+y^3 ۽ $x+y$ (iv) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$ ، $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$ ۽ $a+b$

KARACHIEDU.COM

2. هيٺين جو چوڻون متناسب لهو.

(i) 8, 4, 2 (ii) $a^3+b^3,\ a^2-b^2,\ a^2-ab+b^2$

(iii) $a^2-8a+12,\ a-2,\ 2a^3-12a^2$

(iv) $(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2), a^3+b^3, a^3-b^3$

3. هيٺين جو وچون متناسب لهو.

(i) 8, 18 (ii) $5ab^2, 28a^3b^2$

(iii) $a^4-b^4, \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (iv) $a^3-b^3, \frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$

4. هيٺ ڏنل عدد مسلسل تناسب ۾ آهن تہ x جو ملهه لهو.

(i) 45, x , 5 (ii) 16, x , 9

(iii) 12, 3x -6, 27 (iv) 7, x -3, 112

18.2 تناسبن جا قانون:

18.2.1 تناسب جو سوال حل ڪرڻ لاءِ عڪسي نسبت، نسبت جي تبديلي، نسبت جي ملائڻ ۽ نسبت جي ونڊ وارن قانونن جو استعمال ڪرڻ:

(i) عڪسي نسبت وارو قانون (Theorem of invertendo):

جيڪڏهن $a:b=c:d$ تہ پوءِ $b:a=d:c$

مٿي ڏنل بيان کي عڪسي نسبت وارو قانون چئبو آهي.

ثابتي: جيئن تہ $a:b=c:d$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$ (بنهي پاسن جو اُبتڙ ونڊ ساڻ)

يعني تہ $b:a=d:c$ **انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.**

مثال طور: (i) جيڪڏهن $2:3=4:6$ تہ پوءِ عڪسي نسبت واري قانون مطابق

$$3:2=6:4$$

(ii) جيڪڏهن $4p:5q=2r:5s$ تہ پوءِ عڪسي نسبت واري قانون مطابق

$$5q:4p=5s:2r$$

(ii) نسبت جي تبديلي وارو قانون (Theorem of Alternando):

جيڪڏهن $a:b=c:d$ تہ پوءِ $a:c=b:d$

مٿين بيان کي نسبت جي تبديلي وارو قانون چئبو آهي.

ثابتي: جيئن تہ $a:b=c:d$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$ يا

$$\Rightarrow \quad ad=bc$$

بنهي پاسن کي cd سان ونڊ ڪندي

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$ اسان کي مليو

$$a:c=b:d$$ يعني

KARACHIEDU.COM

مثال:

(i) جيڪڏهن $2:5=6:15$ تہ پوءِ نسبت جي تبديلي واري قانون مطابق

$$2:6=5:15$$

(ii) جيڪڏهن $4p-1:2-3q=5+2r:2s+1$ تہ پوءِ نسبت جي تبديلي واري قانون مطابق

$$4p-1:5+2r=2-3q:2s+1$$

(iii) نسبت کي ملائڻ واروقانون (Theorem of Componendo):

جيڪڏهن $a:b=c:d$ تہ پوءِ نسبت کي ملائڻ واري قانون مطابق

(i) $a+b:b=c+d:d$ (ii) $a:a+b=c:c+d$

ثابتي: (i) جيئن تہ $a:b=c:d$

تہ پوءِ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

ٻنهي پاسن ۾ 1 جوڙ ڪرڻ سان

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

يا $a+b:b=c+d:d$

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

ثابتي: (ii) جيئن تہ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تہ پوءِ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (عڪي نسبت واري قانون مطابق)

ٻنهي پاسن ۾ 1 جوڙ ڪرڻ سان

$$\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$$

$$\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+a}=\frac{c}{c+d}$$

يا $a:a+b=c:c+d$

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

مثال: جيڪڏهن $p+2:q=r:s-3$ تہ پوءِ نسبت کي ملائڻ واري قانون (i) جي مطابق

$$p+2+q:q=r+s-3:s-3$$

ساڳي ريت، نسبت کي ملائڻ واري قانون (ii) جي مطابق

$$p+2:p+2+q=r:r+s-3$$

(iv) نسبت جي ونڊ وارو قانون (Theorem of Dividendo):

جيڪڏهن $a:b=c:d$ تہ پوءِ نسبت جي ونڊ واري قانون مطابق

(i) $a-b:b=c-d:d$ (ii) $a:a-b=c:c-d$

KARACHIEDU.COM

ثابتي: (i) جيئن تہ $a:b=c:d$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$ يا

ہنھي پاسن مان 1 کي ڪٽ ڪندي

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$ يا

$a-b:b=c-d:d$ يا

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

ثابتي: (ii) جيئن تہ $a:b=c:d$

تنهنکري $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

عڪسي نسبت واري قانون موجب

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

ہنھي پاسن مان 1 کي ڪٽ ڪندي

$$\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$$

عڪسي نسبت واري قانون موجب

$$\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$$

$a:b-a=c:d-c$ يا

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

مثال: جيڪڏهن $m+5:n-3=4p+7:3q+2$ تہ پوءِ ثابت کي ڏيکاريو تہ

$m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$

حل: جيئن تہ $m+5:n-3=4p+7:3q+2$

$$\Rightarrow \quad \frac{m+5}{n-3}=\frac{4p+7}{3q+2}$$

نسبت جي وڌ واري قانون مطابق

$$\frac{(m+5)-(n-3)}{n-3}=\frac{(4p+7)-(3q+2)}{3q+2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m-n+8}{n-3}=\frac{4p-3q+5}{3q+2}$$

يعني تہ $m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

(v) نسبت جي ملائڻ ۽ وڌ وارو قانون (Theorem of componendo and dividendo):

جيڪڏهن $a:b=c:d$ تہ پوءِ نسبت جي ملائڻ ۽ وڌ واري قانون مطابق

(i) $a+b:a-b=c+d:c-d$

(ii) $a-b:a+b=c-d:c+d$

مثال: جيڪڏهن $m:n=p:q$ تہ پوءِ ثابت کي ڏيکاريو تہ $3m-2n:3m+2n=3p-2q:3p+2q$

حل: جيئن تہ $m:n=p:q$

تنهنکري $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$

ہنھي پاسن کي $\frac{3}{2}$ سان ضرب ڪندي

KARACHIEDU.COM

$$\frac{3m}{2n}=\frac{3p}{2q}$$

نبست جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون جو استعمال ڪندي

$$\frac{3m-2n}{3m+2n}=\frac{3p-2q}{3p+2q}$$

يا $3m-2n:3m+2n=3p-2q:3p+2q$

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

مثال 2: جيڪڏهن $3p+4q:3p-4q=3r+4s:3r-4s$ تہ پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو تہ $p:q=r:s$

حل: جيئن تہ $3p+4q:3p-4q=3r+4s:3r-4s$

نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون (i) مطابق

$$\therefore \quad \frac{(3p+4q)+(3p-4q)}{(3p+4q)-(3p-4q)}=\frac{(3r+4s)+3r-4s}{(3r+4s)-(3r-4s)}$$

$$\frac{3p+4q+3p-4q}{3p+4q-3p+4q}=\frac{3r+4s+3r-4s}{3r+4s-3r+4s}$$

$$\frac{6p}{8q}=\frac{6r}{8s}$$ (بنهي پاسن مان $\frac{6}{8}$ کي ڪٽيندي)

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{q}=\frac{r}{s}$$

يا $p:q=r:s$

انهيءَ کي ثابت ٿيو.

مثال 3: نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون جو استعمال ڪندي x جو مڙهہ لهو

جيڪڏهن $\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\frac{2}{5}$

حل: اسان وٽ آهي $\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\frac{2}{5}$

نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون موجب

$$\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})+(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})}{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})-(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})}=\frac{2+5}{2-5}$$

$$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}-\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}=\frac{7}{-3}$$

$$\frac{2\sqrt{x+6}}{-2\sqrt{x-6}}=\frac{7}{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-6}}=\frac{7}{3}$$

بنهي پاسن جو چورس وٺندي

$$\frac{x+6}{x-6}=\frac{49}{9}$$

$$9x+54=49x-294$$

$$9x-49x=-294-54$$

$$-40x=-348$$

$$x=\frac{348}{40}=\frac{87}{10}$$

KARACHIEDU.COM

مثال 4: نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون جو استعمال ڪندي مساوات $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$ کي حل ڪريو.

حل: اسان وٽ آهي: $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$

نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون موجب

$$\frac{(x+3)^2+(x-1)^2+(x+3)^2-(x-1)^2}{(x+3)^2+(x-1)^2-(x+3)^2+(x-1)^2}=\frac{5+4}{5-4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2(x+3)^2}{2(x-1)^2}=\frac{9}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2=9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+3}{x-1}=\pm 3$$

$$\frac{x+3}{x-1}=3 \qquad \text{يا} \qquad \frac{x+3}{x-1}=-3$$

$$x+3=3x-3 \qquad x+3=-3x+3$$

$$-2x=-6 \qquad 4x=0$$

$$x=3 \qquad x=0$$

انهي ڪري حل سيٽ $\{0,3\}$ آهي

مثال 5: ثابت ڪريو تہ $a:b=c:d$ جيڪڏهن $\frac{ac^2-bd^2}{ac^2+bd^2}:\frac{c^3-d^3}{c^3+d^3}$

حل:

جيئن تہ $\frac{ac^2-bd^2}{ac^2+bd^2}=\frac{c^3-d^3}{c^3+d^3}$

نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون مطابق

$$\frac{ac^2-bd^2+ac^2+bd^2}{ac^2-bd^2-ac^2-bd^2}=\frac{c^3-d^3+c^3+d^3}{c^3-d^3-c^3-d^3}$$

$$\frac{2ac^2}{-2bd^2}=\frac{2c^3}{-2d^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$a:b=c:d \qquad \text{يا}$$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

KARACHIEDU.COM

مشق 18.4

1. جيڪڏهن $x:y=z:w$ تہ پوءِ ثابت ڪريو تہ

(i) $\frac{4x+3y}{4x-3y}=\frac{4z+3w}{4z-3w}$ (ii) $\frac{5x-3y}{5x+3y}=\frac{5z-3w}{5z+3w}$

(iii) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=\frac{z^3+w^3}{z^3-w^3}$ (iv) $\frac{3x+2y}{3x-2y}=\frac{3z+2w}{3z-2w}$

(v) $\frac{2x+3y+2z+3w}{2x+3y-2z-3w}=\frac{2x-3y+2z-3w}{2x-3y-2z+3w}$

2. ثابت ڪريو تہ $a:b=c:d$ جيڪڏهن

(i) $a^2-b^2:a^2+b^2=ac-bd:ac+bd$

(ii) $\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$

3. نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون جو استعمال ڪندي هيٺيون مساواتون حل ڪريو

(i) $\frac{(x+3)^2-(x-5)^2}{(x+3)^2+(x-5)^2}=\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x-5}}=\frac{1}{10}$ (iv) $\frac{(x+3)^2+(x-1)^3}{(x+3)^2-(x-1)^3}=\frac{11}{7}$

18.3 گڏيل قير قار يا متجڻ (Joint Variation):

18.3(i) گڏيل قير قار کي بيان ڪرڻ

جڏهن هڪ مقدار يا بدلجندڙ بن يا بن کان وڌيڪ مقدارن جي ضرب اُپت يا ونڊ اُپت تي انحصار ڪري تہ ان قير قار کي گڏيل قير قار چئبو آهي. بين لفظن ۾ گڏيل قير قار تڏهن ٿيئي ٿي جڏهن هڪ مقدار يا بدلجندڙ هڪ کان وڌيڪ مقدارن سان سڌي طرح يا اُبتو متجي تو.

مثال طور: (i) جيڪڏهن x سڌي طرح متجي تو y ۽ z سان تہ اسان وٽ آهي $x \propto yz$

$\Rightarrow x=kyz$

(ii) جيڪڏهن x سڌي طرح متجي تو y سان ۽ اُبتو متجي تو z سان تہ اسان وٽ آهي

$$x \propto \frac{y}{z} \Rightarrow x=\frac{ky}{z}$$

18.3 (ii) گڏيل قير قار سان لاڳاپيل سوال حل ڪرڻ:

مثال 1: جيڪڏهن y سڌي طرح سان متجي تو xz^2 سان ۽ $y=4$ جڏهن $x=6$ ۽ $z=3$ جو ملهه لهو جڏهن $y.z=3$ جو ملهه لهو جڏهن تہ $x=-81$ ۽ $z=5$ y جو ملهه لهو جڏهن

حل: جيئن تہ x سڌي طرح سان متجي تو x ۽ z^2 جي مطابق

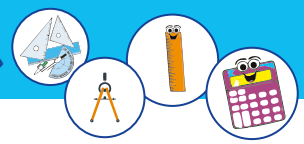
تنهنڪري $y \propto xz^2$

يعني $y=k\,xz^2$ (i)

مساوات (i) ۾ $y=4$ ، $x=6$ ۽ $z=3$ رکڻ سان

$$4=k\,(6)\,(3)^2 \Rightarrow k=\frac{4}{54}=\frac{2}{27}$$

KARACHIS



مساوات(i) ۾ $k = \frac{2}{27}$ رکڻ سان

اسان کي مليو $y = \frac{2}{27} x z^2$ ...(ii)

هاڻي مساوات (ii) ۾ $x = -81$ ۽ $z = 5$ رکڻ سان

$$y = \frac{2}{27}(-81)(5)^2 = 2(-3)(25) = -150$$

مثال 2: جيڪڏهن s سڌي طرح متجي ٿو v^3 سان ۽ اُبتو متجي ٿو $\sqrt{t}$ ۽ u سان. $s = 16$ جڏهن $t = 9$ ،$v = 4$ ۽ $u = 24$ ۽ s جو ملهه لهو جڏهن $v = 5$ ۽ $t = 36$،$u = 25$

حل: جيئن ته s سڌي طرح متجي ٿو v^3 سان ۽ اُبتو متجي ٿو $\sqrt{t}$ ۽ u سان

تنهنڪري $s \propto \frac{v^3}{u\sqrt{t}} \Rightarrow s = k\frac{v^3}{u\sqrt{t}}$ ... (i)

مساوات (i) ۾ $s = 16$ ،$t = 9$ ،$v = 4$ ۽ $u = 24$ رکڻ سان

$$16 = \frac{k(4)^3}{\sqrt{9}(24)}$$

$$16 = \frac{k(64)}{72} \Rightarrow k = 16 \times \frac{72}{64} = 18$$

مساوات (i) ۾ $k = 18$ رکڻ سان

$$s = \frac{18\,v^3}{u\sqrt{t}} \quad ... (ii)$$

مساوات (ii) ۾ $u = 25$ ،$t = 36$ ۽ $v = 5$ رکڻ سان اسان کي مليو

$$s = \frac{18\,(5)^3}{\sqrt{36}\,(25)} = \frac{18 \times 125}{6 \times 25} = 15$$

مشق 18.5

1. جيڪڏهن y سڌي طرح متجي ٿو x^2 ۽ z سان ۽ $y = 6$ جڏهن $x = 4$ ، $z = 9$ y کي x ۽ z جي عمل طور لکو. y جو ملهه لهو جڏهن $x = -8$ ۽ $z = 12$
2. جيڪڏهن y سڌي طرح متجي ٿو x ۽ u^2 سان ۽ اُبتو متجي ٿو v ۽ t سان. $y = 40$ جڏهن $x = 8$ ، $u = 5$ ، $v = 3$ ۽ $t = 2$ y کي x، u، v ۽ t جي شڪل ۾ لکو. y جو ملهه پٽ لهو جڏهن $x = -2$ ، $u = 4$ ، $v = 3$ ۽ $t = -1$.
3. جيڪڏهن w سڌي طرح متجي ٿو u^2 سان ۽ اُبتو متجي ٿو v جي ٽيئن مول سان $w = 216$ ۽ $u = 6$، $v = 27$. w جو ملهه لهو جڏهن $u = 10$ ۽ $v = 125$
4. جيڪڏهن سادي لٽڪڻي (پينڈولم) جو وقت T سڌي طرح نسبت رکي ٿو ان جي ڊيگهه L جي ٻئي مول سان ۽ اُبتي نسبت رکي ٿو ڪشش ثقل واري تيزي 'g' جي ٻئي مول سان ۽ سيڪنڊ $T = 2$ ، س. م $L = 100$ ميٽر في سيڪنڈ چورس $g = 9.8$ تہ پوءِ ڪنهن خاص اُوچائي تي سادي پينڈولم جو وقت لهو جڏهن تہ ميٽر $L = 200$ ۽ ميٽر في سيڪنڊ چورس $g = 7.6$
5. ڪنهن خاص گئس جو مقدار V سڌي نسبت رکي ٿو گرمي پد T سان ۽ اُبتي نسبت رکي ٿو دٻاءُ "P" سان. جيڪڏهن $V = 100$ ، $T = 30$ ۽ $P = 64$ تہ پوءِ V جو ملهه لهو جڏهن تہ $T = 60$ ۽ $P = 81$.

SINDHIEDU.COM

18.4 k- وارو طريقو (K - Method):

جڏهن به يا وڌيڪ نسبتون پاڻ ۾ برابر هجن تہ پوءِ هر هڪ برابر نسبت کي علامت"k" سان ظاهر ڪندي گهٽا فائديمند تناسب ثابت ڪري سگهجن ٿا. اهو طريقو جنهن ۾ هر هڪ برابر نسبت لاءِ "k" جو استعمال ٿيئي ان کي k وارو طريقو چئبو آهي. ڪيترن ئي مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ k وارو طريقو ڏاڍو ڪارائتو آهي.

18.4 (i) تناسبن تي مشتمل شرطيه مساواتن کي ثابت ڪرڻ لاءِ k وا طريقو استعمال ڪرڻ:

جيڪڏهن $a:b::c:d$ هڪ تناسب آهي

تہ پوءِ k واري طريقي سان

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{d} = k \quad \text{۽} \quad \frac{a}{b} = k$$

$$c = d\,k \ldots (ii) \quad \text{۽} \quad a = b\,k \ldots (i)$$

انهن مساواتن جو استعمال ڪندي، اسين تناسب سان لاڳاپيل سوال حل ڪري سگهون ٿا.

مثال 1: جيڪڏهن $a:b::c:d$ تہ پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو تہ $\frac{8a-5b}{8a+5b} = \frac{8c-5d}{8c+5d}$

حل: جيئن تہ $a : b = c : d$

فرض ڪريو تہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

تہ پوءِ $a = bk$ ۽ $c = dk$

هاڻي

$$\text{L.H.S} = \frac{8a-5b}{8a+5b} = \frac{8bk-5b}{8bk+5b} = \frac{b(8k-5)}{b(8k+5)} = \frac{8k-5}{8k+5}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{8c-5d}{8c+5d} = \frac{8dk-5d}{8dk+5d} = \frac{d(8k-5)}{d(8k+5)} = \frac{8k-5}{8k+5}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore$ $\frac{8a-5b}{8a+5b} = \frac{8c-5d}{8c+5d}$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

مثال 2: جيڪڏهن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ تہ پوءِ ثابت ڪريو تہ $\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{ace}{bdf}$

حل: اسان وٽ آهي $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

فرض ڪريو تہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

تہ پوءِ $\frac{a}{b} = k$ ، $\frac{c}{d} = k$ ۽ $\frac{e}{f} = k$

$\Rightarrow a = bk \Rightarrow c = dk$ ۽ $\Rightarrow e = fk$

هاڻي

$$\text{L.H.S} = \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{\left[k(b+d+f)\right]^3}{(b+d+f)^3} = k^3$$

KARACHIEDU.COM

$$\text{R.H.S} = \frac{ace}{bdf} = \frac{(bk)(dk)(fk)}{bdf} = \frac{k^3bdf}{bdf} = k^3$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$$\therefore \quad \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{ace}{bdf}$$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

مثال 3:

جيڪڏهن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ تہ پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو تہ $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$

حل: فرض ڪريو تہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

$\Rightarrow \quad a = bk$ ، $c = dk$ ۽ $e = fk$

$$\text{L.H.S} = (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)$$
$$= (b^2k^2+d^2k^2+f^2k^2)(b^2+d^2+f^2)$$
$$= k^2(b^2+d^2+f^2)(b^2+d^2+f^2)$$
$$= k^2(b^2+d^2+f^2)^2$$

$$\text{R.H.S} = (ab+cd+ef)^2$$
$$= [(bk)b+(dk)d+(fk)f]^2$$
$$= [kb^2+kd^2+kf^2]^2$$
$$= [k(b^2+d^2+f^2)]^2$$
$$= k^2(b^2+d^2+f^2)^2$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\therefore (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

CHIEDU.COM

مشق 18.6

1. جيڪڏهن $p:q = r:s$ تہ پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو تہ

(i) $\frac{8p-3q}{8p+3q} = \frac{8r-3s}{8r+3s}$

(ii) $3\sqrt{\frac{p^3+r^3}{q^3+s^3}} = \frac{p}{q}$

(iii) $(p^2+q^2):\frac{p^3}{p+q} = (r^2+s^2):\frac{r^3}{r+s}$

(iv) $p^5+r^5 : q^5+s^5 = p^3r^2 : q^3s^2$

(v) $\frac{p-q}{p}:\frac{q}{p+q} = \frac{r-s}{r}:\frac{s}{r+s}$

2. جيڪڏهن $a:b = c:d = e:f$ تہ پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو تہ

(i) $\frac{a^4b^2+a^2e^2-e^4f}{b^6+b^2f^2-f^5} = \frac{a^4}{b^4}$

(ii) $\frac{a^2b+c^2d+e^2f}{ab^2+cd^2+ef^2} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$

(iii) $\frac{ac}{bd}+\frac{ce}{df}+\frac{ea}{fb} = \frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{e^2}{f^2}$

18.4 (ii) قير قارورا روز مرهه زندگي جا مسئلا حل ڪرڻ

مثال 1: هڪ جسم جي مخفي توانائي "p" گڏيل متجي تي جسم جي مايي "m" ۽ اُوچائي "h" سان جيڪڏهن مخفي توانائي 1940 جول آهي جڏهن ته ڪلو گرام m=2 ۽ ميٽر h=100 ته پوءِ ان جسم جي مخفي توانائي لهو جنهن جو مايو 5 ڪلو گرام ۽ اُوچائي 300 ميٽر آهي.

حل: جيئن ته مخفي توانائي "p" ، مايي "m" ۽ اُوچائي "h" سان گڏيل متجي ٿي.

تنهن ڪري $p \propto mh$

$p = kmh$ ... (i) (جڏهن ته تناسب جو مستقل k آهي)

مساوات (i) ۾ $m = 2$ ، $h = 100$ ۽ $p = 1960$ رکندي

اسان کي مليو $1960 = k\,(2)\,(100)$

$\Rightarrow \quad k = \frac{1960}{200} = 9.8$

مساوات (i) ۾ k جو مُلهه رکندي

$p = 9.8mh$ ... (ii)

هاڻي مساوات (ii) ۾ $m=5$ ۽ $h = 300$ رکندي

اسان کي مليو $p = 9.8\,(5)\,(300)$

جول $= 14700$

مثال 2: هُڪ جي قانون موجب هڪ اسپرنگ کي چڪ لاءِ لڳيل قوت "F" سڌي طرح سان متجي ٿي وڌيل ڊيگهه "S" سان جڏهن پائونڊ $F = 64$ ۽ انچ $S = 3.2$

(i) S جو ملهه لهو جڏهن پائونڊ $F = 100$

(ii) F جو ملهه لهو جڏهن انچ $S = 0.4$

حل: جيئن ته $F \propto S$

$\Rightarrow \quad F=kS$... (i)

$F=64$ ۽ $S=3.2$ رکڻ سان

اسان کي مليو

$64=3.2\ k$

$\Rightarrow \quad k= \frac{64}{3.2} = 20$

مساوات (i) ۾ $k = 20$ رکندي

اسان کي مليو $F=20\ S$ ... (ii)

(i) مساوات (ii) ۾ $F=100$ رکندي

اسان کي مليو $100=20\ S$

$\Rightarrow \quad S=5$ انچ

(ii) مساوات (ii) ۾ $S=0.4$ رکندي

اسان کي مليو $F=20\ (0.4)$

پائونڊ $= 8$

مثال 3: مزدوري جي رقم "C" گڏيل متجي ٿي مزدورن جي تعداد "n" ۽ ڏينهن جي سراسر تعداد "d" سان جيڪڏهن 10 ڏينهن لاءِ 210 مزدورن جي مزدوري جي رقم 450,000 رُپيا آهي. ته پوءِ 16 ڏينهن لاءِ 300 مزدورن جي مزدوري جي رقم لهو.

حل: جيئن ته رقم سڌي طرح سان متجي ٿي ڏينهن ۽ مزدورن جي تعداد سان

تنهنڪري $C \propto nd$

$C = knd$ (i)

مساوات (i) ۾ $C = 450,000$ ، $n = 200$ ۽ $d = 10$ رکڻ سان

اسان کي مليو $450,000 = k\,(200)(10)$

$\Rightarrow \quad k = \frac{450,000}{2000} = 225$

مساوات (i) ۾ $k = 225$ استعمال ڪندي

اسان کي مليو $C = 225 \cdot nd$ ... (ii)

مساوات (ii) ۾ $n = 300$ ۽ $d = 16$ رکندي

اسان کي مليو $C = 225 \times 300 \times 16$

$C = 1080000$

انهيءَ ڪري 16 ڏينهن لاءِ 300 مزورن جي رقم 1080000 رُپيا آهي.

KARACHIEDU.COM

مثال 4: هاسٽيل جا خرچ ڪجهه مستقل آهن ۽ ڪجهه شاگردن جي تعداد مطابق مٽجن ٿا. جڏهن شاگردن جو تعداد 140 آهي تہ خرچو 19300 رُپيا ۽ 200 شاگردن لاءِ خرچو آهي 26500 رُپيا. خرچو لهو جيڪڏهن شاگردن جو تعداد 300 آهي.

حل: فرض ڪريوتہ مستقل خرچ "C" آهي ۽ "Q" غير مستقل خرچن کي ظاهر ڪري ٿو. فرض ڪريو تہ x شاگردن جو تعداد ۽ "P" ڪُل خرچ کي ظاهر ڪري ٿو.

$\because \quad Q \propto x$

$\therefore \quad Q = nx$ (جڏهن تہ n تناسب جو مستقل آهي)

$P = C + Q$

$P = C + nx$ يا (ڏنل شرط موجب)

ڏنل رقمن جو استعمال ڪندي اسان کي مليون

$19300 = C + 140n$ ۽ $26500 = C + 200n$ ...(i) ...(ii)

$P = C + 300n$ ...(iii) تنهن ڪان سواءِ

مساواتن (i) ۽ (ii) مان، اسان کي مليو: $C = 2500$ ۽ $n = 120$

مساوات (iii) ۾ $C = 2500$ ۽ $n = 120$ رکندي

اسان کي مليو $P = 2500 + 300(120) = 38500$

اهڙي ڪري 300 شاگردن جو ڪُل خرچ 38500 رپيا آهي

مشق 18.7

1. هڪ تار ۾ بجلي جو وهڪرو "I" سڏي نسبت رکي ٿو برقي سگهہ جي فرق "V" سان ۽ اُبتي نسبت رکي ٿو روڪ "R" سان. جيڪڏهن ايمپيئر $I = 6$ جڏهن وولٽ $V = 220$ ۽ اوهم $R = 5$ ۽ I جو مُلهہ لهو جڏهن وولٽ $V = 180$ ۽ اوهم $R = 8$
2. روشني جي شدت جيڪا فوٽ ڪينڊلز ۾ پيمائش ڪبي آهي. اها اُبتو مٽجي ٿي ان مفاصلي جي چورس سان جيڪو روشني جي ذريعي وٽان هجي. فرض ڪريو تہ هڪ بلب جي روشني جي شدت 0.08 فوٽ ڪينڊلز آهي جيڪو 3 ميٽرن جي فاصلي تي آهي. روشني جي شدت لهو جيڪڏهن فاصلو 8 ميٽر هجي.
3. هڪ مستطيلي ٽنبي جي طاقت "s" سڏي طرح مٽجي ٿي ويڪرائي "b" ۽ اُونهائي "d" جي چورس سان جيڪڏهن هڪ 9 س. م ويڪرو ۽ 12 س. م اُونهو ٽنبي 1200 پائوندن جو سهارو ڏيئي سگهي ٿو تہ 12 س. م ويڪرو ۽ 9 س. م اُونهو ٽنبي کيتري وزن جو سهارو ڏيئي سگهي ٿو.
4. مزدوري جي رقم "c" گڏيل مٽجي ٿي ڏينهن جي سراسر تعداد "d" ۽ مزدورن جي تعداد "n" سان جيڪڏهن 15 ڏينهن لاءِ 100 مزدورن جي رقم 9000 آهي تہ پوءِ 20 ڏينهن لاءِ 300 مزدورن جي مزدوري جي رقم لهو.
5. هڪ نئين گاڏي جي خريد تي وڪري واروٽيڪس سڏي طرح سان مٽجي ٿو گاڏي جي قيمت سان جيڪڏهن هڪ نئين گاڏي 20000000 رپين ۾ خريدي وجي تہ پوءِ وڪري وارو ٽيڪس 40000 رپيا آهي. وڪري وارو ٽيڪس گهٽو لڳندو جيڪڏهن نئين گاڏي جي قيمت 2800000 رُپيا آهي.

جائزي واري مشق 18

1. صحيح جواب چونڊيو

(i) تناسب $p:q::r:s$ ۾ p کي _____ چئبو آهي.

(a) ٽيون متناسب (b) وچون متناسب (c) چوٿون متناسب (d) پهريون متناسب

(ii) هڪ نسبت $m : l$ ۾ l کي _____ چئبو آهي.

(a) پُڇڙ (b) مُنڊ (c) تعلق (d) ڪوبہ نہ

(iii) نسبت $u : v$ ۾ v کي _____ چئبو آهي.

(a) مُنڊ (b) پُڇڙ (c) تعلق (d) ڪوبہ نہ

(iv) جيڪڏهن c,b,a مسلسل تناسب ۾ آهن تہ پوءِ b کي تناسب جو _____ آهي.

(a) پهريون متناسب (b) وچون متناسب (c) ٽيون متناسب (d) ڪوبہ نہ

(v) a^2 ۽ b^2 جو وچون متناسب _____ چئبو آهي.

(a) $\sqrt{ab}$ (b) ab (c) $\frac{a}{b}$ (d) $-ab$

(vi) جيڪڏهن $x+5 : x+7 = 5 : 7$ تہ پوءِ x _____ جي برابر آهي.

(a) 2 (b) -1 (c) 0 (d) 1

(vii) جيڪڏهن 1، 9، x ۽ 45 تناسب ۾ آهن تہ پوءِ $x =$ _____

(a) 27 (b) $\frac{1}{5}$ (c) 5 (d) 405

(viii) جيڪڏهن $p : q = r : 5$ تہ پوءِ $p : r = q : 5$ ان کي _____ وارو قانون چئبو آهي.

(a) نسبت کي ملائڻ (b) عڪسي نسبت

(c) نسبت جي وڌ (d) نسبت جي تبديلي

(ix) جيڪڏهن $x : y = z : w$ تہ پوءِ نسبت کي ملائڻ واري قانون موجب

(a) $\frac{x}{x+y} = \frac{z}{z+w}$ (b) $\frac{x}{x-y} = \frac{z}{z-w}$

(c) $\frac{x-y}{x+y} = \frac{z-w}{z+w}$ (d) $\frac{x-y}{y} = \frac{z-w}{w}$

(x) جيڪڏهن $a : b = c : d$ تہ پوءِ نسبت جي تبديلي واري قانون موجب

(a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (b) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{c}$ (c) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (d) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

(xi) 3,5,12 جو چوٿون متناسب _____ آهي

(a) 20 (b) 15 (c) 60 (d) 36

(xii) جيڪڏهن $2x$، $3y$ ۽ $6z$ مسلسل تناسب ۾آهن تہ پوءِ

(a) $y^2 = 12xy$ (b) $9y^2 = xz$ (c) $9y^2 = 12xz$ (d) $3y^2 = 4xz$

(xiii) جيڪڏهن $\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$ تہ پوءِ نسبت جي وڌ واري قانون موجب

(a) $\frac{x-y}{y} = \frac{w-z}{z}$ (b) $\frac{x+y}{y} = \frac{w+z}{z}$

(c) $\frac{x}{x+y} = \frac{w}{w+z}$ (d) ڪوبہ نہ

(xiv) قوت ۾ تيزي _____ ۾ آهن.

(a) سڌي تناسب (b) گڏيل تناسب (c) اُبتي تناسب (d) ڪوبہ نہ

(xv) جيڪڏهن $a : 4 = 15 : 5$ تہ پوءِ $a =$ _____

(a) 20 (b) 15 (c) 12 (d) 10

2. هيٺين جي نسبت لهو
(i) 100 ميٽر ۽ 500 س. م (ii) 50 ڪلو گرام ۽ 300 گرام

3. هيٺين ۾ x جو ملهه لهو
(i) $9:x-10=x+13:12$ (ii) $5:x-3=x+11:3$

4. جيڪڏهن y سڌي طرح x سان مٽجي ٿو ۽ $y=25$ جڏهن $x=75$ ته پوءِ y جوملهه لهو جڏهن $x=144$

5. جيڪڏهن y اُبتو مٽجي ٿو x سان ۽ $y=100$ جڏهن $x=\frac{1}{2}$ ته پوءِ y جو ملهه لهو جڏهن $x=4$

6. جيڪڏهن $x:y=3:w$ ته پوءِ ثابت ڪريو ته $\frac{7x+5y}{7x-5y}=\frac{7z+5w}{7z+5w}$

7. نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ واري قانون کي استعمال ڪندي هيٺين مساوات حل ڪريو
$$\frac{(x-3)(x-5)}{(x-7)(x-2)}=\frac{(x-6)(x-2)}{(x-1)(x-8)}$$

8. جيڪڏهن x سڌي طرح سان مٽجي ٿو y سان ۽ اُبتو مٽجي ٿو z سان ۽ $x=30$ جڏهن $y=15$ ۽ $z=2$ ته پوءِ x جو ملهه لهو جيڪڏهن $y=30$ جڏهن $z=12$

9. سرڪٽ ۾ بجلي جو وهڪرو اُبتو مٽجي ٿو روڪ سان جيڪا اوهم ۾ پيمائش ڪجي ٿي جڏهن سرڪٽ ۾ بجلي جو وهڪرو 40 امپيئر ۽روڪ 10 اوهم آهي ته بجلي جو وهڪرو لهو جيڪڏهن روڪ 12 اوهم آهي.

خلاصو:

- بن ساڳي قسم واري مقدارن جي پيٽ کي نسبت چئبو آهي.
- جيڪڏهن به نسبتون $a:b$ ۽ $c:d$ برابر آهن ته پوءِ اسين هن طرح لکنداسين $a:b::c:d$
- بن نسبتن جي برابري کي تناسب چئبوآهي.
- جيڪڏهن به مقدارون پاڻ ۾ اهڙي طرح لاڳاپيل آهن جو هڪ مقدار ۾ اضافو (گهٽتائي) ٻيئي مقدار ۾ ترتيبوار اضافي (گهٽتائي) جو سبب ٿئي ته اهڙي قير قار کي سڌو قير قار چئبو آهي.
- جيڪڏهن به مقدارون پاڻ ۾ اهڙي طرح سان لاڳاپيل آهن جو جيڪڏهن هڪ مقدار وڌي ته بي گهٽجي ۽ اِن جو اُبتڙ ٻه هجي. اهڙي قير قار کي اُبتو قير قار چئبو آهي
- نسبت وارا قانون
  (i) عڪسي نسبت وارو قانون: جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ $b:a=d:c$
  (ii) نسبت جي تبديلي وارو قانون: جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ $a:c=b:d$
  (iii) نسبت کي ملائڻ وارو قانون:
  جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ $(a)\ a+b:b=c+d:d$ $(b)\ a:a+b=c:c+d$
  (iv) نسبت جي ونڊ وارو قانون:
  جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ $(a)\ a-b:b=c-d:d$ $(b)\ a:a-b=c:c-d$
  (v) نسبت جي ملائڻ ۽ ونڊ وارو قانون:
  جيڪڏهن $a:b=c:d$ ته پوءِ $a+b:a-b=c+d:c-d$
- جڏهن هڪ مقدار بن يا بن کان وڌيڪ مقدارن جي ضرب اُپت يا ونڊ اُپت تي انحصار ڪري ته ان قير قار کي گڏيل قير قار چئبو آهي.

قالبَ ۽ قطعي مُلهَه

MATRICES AND DETERMINANTS

يونٽ 19

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- قالب کي حقيقي رقمن سان بيان ڪن ۽ ان جي مستطيلي خاڪي جو عام زندگي ۾ اظهار لاءِ تعلق ناهين.
  - قالب جي قطارن ۽ ڪالمن جي باري ۾ ڄاڻ رکن.
  - قالب جي ترتيب بيان ڪن
  - ٻن قالبن جي برابري بيان ڪن
- قطاري قالب، ڪالمي قالب، مستطيلي قالب ، چورس قالب، ٻُڙي قالب، وحداني قالب، غير طرفي غالب، اريبي قالب، متاسٽا ٽيل قالب، هم شڪلي قالب (3 باءِ 3 تائين 3×3) ابُتو هم شڪلي قالب کي بيان ڪن ۽ انهن جي سڃاڻپ ڪن
- اهو ڄاڻڻ ته ڇا ڏنل قالب جوڙ ۽ ڪٽ لاءِ موافق آهي
- حقيقي عدد سان قالب جي غير طرفي ضرب
- قالبن کي جوڙ ۽ ڪٽ ڪن
- جوڙ جي لحاظ کان متا ۽ سنگت واري قانونن جي چڪاس ڪن
- قالب جو جوڙ لاءِ ذاتي قالب بيان ڪن
- قالب جو جمعي ابتڙ لهن
- اهو ڄاڻڻ ته ڇا ڏنل قالب ضرب لاءِ موافق آهن
- ٻن يا ٽن قالبن کي ضرب ڪن
- ضرب جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ڪن
- ورهاست واري قانون جي تصديق ڪن
- مثال جي مدد سان تصديق ڪريو ته قالب عام طرح سان ضرب جي لحاظ کان متا وارو قانون نٿا رکن (يعني ته $AB \neq BA$)
- ضرب لاءِ ذاتي قالب بيان ڪن
- چڪاس ڪن ته $(AB)^t = B^t A^t$
- چورس قالب جو قطعي ملهه بيان ڪن
- قالب جي قطعي ملهه جي قيمت لهن
- نادر ۽ غير نادر قالبن کي بيان ڪن
- قالب جا ننڍا قطعي مُلهه ۽ هم جُزا بيان ڪن
- قالب جو ائڊجوائنٽ بيان ڪن
- هڪ غير نادر قالب A جو ضربي اُبتڙ لهڻ ۽ تصديق ڪن ته $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ جڏهن ته I هڪ ضرب لاءِ ذاتي قالب آهي.
- هڪ غير نادر قالب جو ضربي اُبتڙ لهڻ لاءِ ائڊجوائنٽ طريقي جو استعمال ڪن
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ جي چڪاس ڪن
- ٻن بدلجندڙن ۾ ٻن هڪ درجي مساواتن جي مجموعي کي حل ڪن جيڪو عام زندگي جي مسئلن سان لاڳاپيل هجي.
  - ضربي اُبتڙ قالب وارو طريقو استعمال ڪندي
  - ڪريمر وارو قانون استعمال ڪندي

19.1 قالبن جو تعارف Introduction to Matrices

قالبن جو تعلق رياضي جي هڪ شاخ سان آهي جنهن کي خطي آلجبرا (linear Algebra) چئبو آهي. انهن جو استعمال خاص طور سان ڪاروبار انجنيئري، فزڪس ۽ ڪمپيوٽر سائنس ۾ ٿيئي ٿو.
آرٿرڪيلي Arther Caylay (1821-1895) هڪ رياضي دان هو جنهن قالب جو نظريو پيش ڪيو

19.1 (i) قالب کي حقيقي‌قمن سان بيان ڪرڻ ۽ ان جي مستطيلي خاڪي جو عام زندگي ۾ اظهار لاءِ تعلق ڄاڻڻ.

قالب ، رُڪنن جي هڪ مســـــتطيلي صف بندي آهي ان جا رُڪن علامتي اظهار يا عدد ٿي سگهن. ٿا عام طرح سان قالب کي انگريزي الف بي جي وڏن حرفن سـان ظاهر ڪبو آهي ۽ قالب جي هر هڪ رُڪن کي ننڍن حرفن سان ظاهر ڪبو آهي. قالب جا رُڪن [ ] يا ( ) جي اندر لکبا آهن

مثال طور:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ يا } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

رُڪن a_{11}، a_{22} ۽ a_{33} وڏي اُريب جا رُڪن آهن ۽ انهن کي اُريبي رُڪن (Diagonal Elements) ڪوٺبو آهي.
اچو ته عام زندگي مان قالب جو هڪ مثال ڪٽون هيٺين جدول تي گهرن جي رهواسين.
ٽيليويزن ۽ ڪمپيوٽرن جو تعداد ڏيکاري ٿي.

رهواسي	ٽيليويزن ۽ ڪمپيوٽر	
A گهر	4	2	1
B گهر	6	2	3
C گهر	2	1	0

مٿين مواد (data) کي قالب جي شڪل ۾ هن ريت لکي سگهون ٿا.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نوٽ: لفظ "قالب" جو جمع "قالبَ" يا "قالبن" آهي..

19.1 (ii) قالب جي قطارن (Rows) ۽ ڪالمن (Columns) جي باري ۾ ڄاڻڻ :

قالب ۾ رُڪنن جي اُفقي ليڪ کي قالب جي قطار چئبو آهي ۽ قالب ۾ رُڪنن جي عمودي ليڪ کي قالب جو ڪالم چئبو آهي

مثال طور قالب $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ۾ رُڪنن جون ٻه اُفقي ليڪون آهن انهي ڪري اهو قالب ٻه قطارون رکي ٿو. ان ۾ رُڪنن جون چار عمودي ليڪون آهن انهي ڪري اهو قالب ٻه ڪالم رکي ٿو.

19.1. (iii) قالب جي ترتيب : (Order/Size of Matrix):

قالب جي ترتيب کي ان جي قطارن ۽ ڪالمن جي تعداد سان بيان ڪبو آهي. قالب جي ترتيب کي $m \times n$ (پڙهبو m باءِ n) سان ظاهر ڪبو آهي جڏهن ته ڏنل قالب ۾ m قطارن جو تعداد ۽ n ڪالمن جو تعداد آهي.

مثال طور: جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 12 & 11 & 35 \end{bmatrix}$ ته پوءِ A جي ترتيب 3×2 آهي.

KARACHIEDU.COM

19.1. (iv) ٻن قالبن جي برابري (Equality of two matrices):

ٻہ قالب A ۽ B برابر قالب کوٹبا جيڪڏهن انهن جي ترتيب سـاڳي هجي ۽ انهن جا مطابقت رکندڙ رُکن برابر هجن علامتي طور اسين هينئن لکنداسين.

مثال طور:

$$A=\begin{pmatrix}2&6&1\\0&5&3\end{pmatrix} \text{ ۽ } B=\begin{pmatrix}2&6&1\\0&5&3\end{pmatrix} \text{ برابر قالب آهن}$$

$$P=\begin{pmatrix}1&2\\5&4\end{pmatrix} \text{ ۽ } Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \text{ برابر قالب نہ آهن}$$

چاڪاڻ تہ انهن جي ترتيب ساڳي نہ آهي

19.2 قالبن جا قسم (Types of Matrices):

19.2. (i) قطاري قالب، کالمي قالب، مستطيلي قالب، چورس قالب، بُڙي قالب، وحداني قالب، غير طرفي قالب، اريبي قالب، متاسا ئيل قالب، هم شڪلي قالب (3×3) ۽ ابتو همشڪلي قالب بيان ڪرڻ ۽ انهن جي سڃاڻپ ڪرڻ:

قطاري قالب (Row Matrix):

اهڙو قالب جنهن ۾ فقط هڪ قطار هجي ان کي قطاري قالب چئبو آهي.

مثال طور:

$[1\quad 4\quad 7]$ ۽ $[4\quad 3\quad 8\quad 6]$ قطاري قالب آهن.

کالمي قالب (Column matrix):

اهڙو قالب جنهن ۾ فقط هڪ کالم هجي ان کي کالمي قالب چئبو آهي.

مثال طور:

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\\5\end{bmatrix} \text{ ۽ } \begin{bmatrix}7\\5\\9\end{bmatrix} \text{ کالمي قالب آهن}$$

مستطيلي قالب (Rectangular matrix):

اهڙو قالب جنهن ۾ قطارن جو تعداد، کالمن جي تعداد جي برابر نہ هجي تہ ان کي مستطيلي قالب چئبو آهي.
يعني $m \neq n$

مثال طور:

$$A=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}5&3&9\\1&-7&10\end{bmatrix} \text{ ۽ } C=\begin{bmatrix}2&1\\7&2\\-1&1\end{bmatrix} \text{ مستطيلي قالب آهن}$$

چورس قالب (Square Matrix):

اهڙو قالب جنهن ۾ قطارن جو تعداد، کالمن جي تعداد جي برابر هجي ان کي چورس قالب چئبو آهي.
يعني $m = n$

$$A=\begin{bmatrix}3&2\\1&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}9&5&2\\1&8&5\\3&1&6\end{bmatrix} \text{ ۽ } C=\begin{bmatrix}x&y&z&1\\a&b&c&1\\p&q&r&1\\m&n&o&1\end{bmatrix} \text{ چورس قالب آهن}$$

KARACHIEDU.COM

بڑي قالب (Zero/null matrix):

بڑي قالب هڪ اهڙو قالب هوندو آهي جنهن جو هر هڪ رُکن بُڑي هجي. اهو عام طرح سان وڏي حرف "O". سان ظاهر ڪبو آهي بڑي قالب جا ڪجهہ مثال هيٺ ڏنل آهن.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ۽ } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ، } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اريبي قالب (Diagonal matrix):

هڪ چورس قالب کي اريبي قالب ڪوٺبو جيڪڏهن گهٽ ۾ گهٽ هڪ اريبي رُکن کانسواءِ سڀ رُکن بُڑي هجن.

مثال طور:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ ، } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ۽ } C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ اريبي قالب آهن}$$

غير طرفي قالب (Scalar Matrix):

اهڙو اريبي قالب جنهن جا سڀ اريبي ڪارڪن ساڳيا هجن. ان کي غير طرفي قالب چئبو آهي.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ ، } B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ ۽ } C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \text{ غير طرفي قالب آهن.}$$

وحداني قالب (Identity/unit matrix):

اهڙو اريبي قالب جنهن جو هر هڪ اريبي رُکن ۱ هجي. ان کي وحداني قالب ڪوٺبو آهي. عام طرح سان ان کي وڏي حرف "I" سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ۽ } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مٽا سٽا ٽيل قالب (Transpose of a matrix):

ڪنهن ڏنل قالب جي قطارن کي ڪالمن ۾ يا ڪالمن کي قطارن ۾ بدلائڻ سان حاصل ٿيل قالب کي اصل قالب جو مٽا سٽا ٽيل قالب ڪوٺبو آهي جيڪڏهن ڏنل قالب A آهي تہ مٽاسٽا ٽيل قالب کي A^t سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ جو مٽا سٽا ٽيل قالب } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \text{ آهي.}$$

همشڪلي قالب (Symmetric Matrix):

هڪ چورس قالب کي همشڪلي قالب ڪوٺبو جيڪڏهن ان جو مٽا سٽا ٽيل قالب بہ ان ڏنل قالب جي برابر هجي. يعني تہ $A^t = A$.

مثال طور:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix} \text{ جيڪڏهن } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 2 & 5 & -11 \\ 17 & -11 & 9 \end{bmatrix} \text{ تہ پوءِ}$$

جيئن تہ $A^t = A$ تنهنڪري A هڪ همشڪلي قالب آهي.

KARACHIEDU.COM

اُبتو همشڪلي قالب (Skew-symmetric matrix):

هڪ چورس قالب کي اُبتو همشڪلي قالب ڪوٺبو جيڪڏهن ان جو متاسٽا ٽيل قالب ان ڏنل قالب جو منفي هجي.

يعني $A^t = -A$

مثال طور:

جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ تہ پوءِ $-A = A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & -7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

جيئن تہ $A^t = -A$ تنهنڪري A اُبتو همشڪلي قالب آهي.

19.3 قالبن جي جوڙ ۽ ڪٽ (Addition and Subtraction of Matrices):

19.3.(i) اهو جاچڻ تہ چا ڏنل قالب جوڙ ۽ ڪٽ لاءِ موافق (Conformable) آهن:

جيڪڏهن بن قالبن A ۽ B جي ترتيب ساڳي آهي تہ پوءِ اهي جوڙ ۽ ڪٽ لاءِ موافق آهن

مثال طور:

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ۽ $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ جوڙ ۽ ڪٽ لاءِ موافق آهن.

19.3.(ii) حقيقي عدد سان قالب جي غير طرفي ضرب (Scalar multiplication of a matrix by a real numbers):

ڪنهن قالب جي غير طرفي ضرب جو مطلب آهي تہ ڏنل قالب ۽ حقيقي عدد جي ضرب اُپت، غير طرفي ضرب ۾ قالب جو هر هڪ رُکن ڏنل غير طرفي مقدار (Scalar) سان ضرب ٿيندو آهي. جيڪڏهن c غير طرفي مقدار ۽ A هڪ قالب آهي تہ پوءِ قالب جي غير طرفي ضرب کي cA سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور:

جيڪڏهن $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ ۽ $c = -5$ تہ پوءِ $cA = -5\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

يعني $cA = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -25 \\ 15 & -10 & -5 \\ -10 & 0 & 20 \end{pmatrix}$

19.3.(iii) قالبن کي جوڙ ۽ ڪٽ ڪرڻ (Add and Subtract Matrices):

بن قالبن A ۽ B کي جوڙ يا ڪٽ ڪرڻ لاءِ انهن جا واسطيدار رُکن جوڙ يا ڪٽ ڪبا آهن

مثال طور:

جيڪڏهن $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ۽ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ تہ پوءِ $A+B = \begin{pmatrix} 2+1 & 5+4 \\ -1+3 & 3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

ڪٽ لاءِ

جيڪڏهن $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ ۽ $Q = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ تہ پوءِ $P-Q = \begin{pmatrix} 1-10 & 0-4 & 2-2 \\ 4-2 & 6-7 & 1-1 \\ -2-1 & 9-9 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

19.3.(iv) جوڙ جي لحاظ کان متا ۽ سنگت واري قانونن جي چڪاس ڪرڻ:

جوڙ جي لحاظ کان متا وارو قانون:

جيڪڏهن A ۽ B ساڳي ترتيب وارا بہ قالب آهن تہ پوءِ جوڙ جي لحاظ کان متا وارو قانون هن ريت آهي:

$A + B = B + A$

KARACHIEDU.COM

مثال: جوڙ جي لحاظ کان مٽا واري قانون جي چڪاس ڪريو

جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&6&1\\-2&9&0\end{pmatrix}$ ۽ $B=\begin{pmatrix}10&4&2\\2&7&1\\1&9&4\end{pmatrix}$

هتي

$$A+B=\begin{pmatrix}1+10&0+4&2+2\\4+2&6+7&1+1\\-2+1&9+9&0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&4&4\\6&13&2\\-1&18&4\end{pmatrix}$$

هاڻي

$$B+A=\begin{pmatrix}10+1&4+0&2+2\\2+4&7+6&1+1\\1-2&9+9&4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&4&4\\6&13&2\\-1&18&4\end{pmatrix}$$

جيئن ته $A+B=B+A$ تنهنڪري جوڙ جي لحاظ کان مٽا واري قانون جي چڪاس ٿي.

جوڙ جي لحاظ کان سنگت وارو قانون (Associative law w.r.t addition):

جيڪڏهن A، B ۽ C ساڳي ترتيب وارا ڪي ٽي قالب آهن ته پوءِ جوڙ جي لحاظ کان مٽا وارو قانون هن ريت آهي $(A+B)+C=A+(B+C)$

مثال: جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ڪريو

جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$ ۽ $C=\begin{pmatrix}9&10\\11&12\end{pmatrix}$

هتي

$$(A+B)+C=\left[\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}9&10\\11&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8\\10&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&10\\11&12\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad (A+B)+C=\begin{pmatrix}15&18\\21&24\end{pmatrix}$$

هاڻي

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&10\\11&12\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}14&16\\18&20\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad A+(B+C)=\begin{pmatrix}15&18\\21&24\end{pmatrix}$$

$(A+B)+C=A+(B+C)$ جيئن ته

تنهنڪري جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ٿي

19.3.(v) هڪ قالب جو جوڙ لاءِ ذاتي قالب (Additive Identity) بيان ڪرڻ

جيڪڏهن A ۽ O به ساڳي ترتيب وارا قالب آهن ۽ $A+O=A=O+A$. هتي O ڀڙي قالب آهي ۽ ان کي قالب A جو جوڙ لاءِ ذاتي قالب چئبو آهي.

KARACHIEDU.COM

19.3.(vi) قالب جو جمعي ابتڙ لهڻ (Additive inverse of a matrix):

جيڪڏهن A ۽ B ۾ ساڳئي ترتيب وارا قالب آهن اهڙي طرح جو $A + B = O = B + A$ تہ پوءِ B ۽ A کي هڪبئي جو جمعي اُبتڙ چئبو قالب A جي جمعي اُبتڙ کي $-A$ سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال طور:

جيڪڏهن $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

تہ پوءِ $-A = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & -1 \\ 2 & -9 & 0 \end{pmatrix}$

19.4. قالبن جي ضرب (2 باء 2 تائين)

19.4. (i) اهو ڄاڻڻ تہ ڇاڏڪل قالب ضرب لاءِ موافق آهن.

ٻہ قالب A ۽ B ضرب لاءِ موافق ڪوٺيا جيڪڏهن پهرين قالب جي ڪالمن جو تعداد ٻئي قالب جي قطارن جي تعداد جي برابر هجي

مثال طور:

$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ ۽ $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ ضرب لاءِ موافق آهن

19.4. (ii) ٻن يا ٽن قالبن کي ضرب ڪرڻ :

جيڪڏهن ٻہ قالب ضرب لاءِ موافق آهن تہ پوءِ ضرب اُپت AB جو رُکن a_{ij} حاصل ڪرڻ لاءِ i هين قطار (i^{th} row) ۽ (j^{th} row) هون ڪالم جي واسطيدار رُکنن کي ضرب ڪبو آهي.

مثال 1:

جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ تہ پوءِ AB لهو

حل:

هتي AB ممڪن آهي ڇو جو A جي ڪالمن جو تعداد B جي قطارن جو تعداد برابر آهي جيڪو 2 آهي.

هاڻي

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1(0)+2(6) & 1(-1)+2(7) \\ 3(0)+4(6) & 3(-1)+4(7) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0+12 & -1+14 \\ 0+24 & -3+28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

KARACHIEDU.COM

مثال 2:

ضرب لهو: $\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\5 & 1\end{pmatrix}$

حل:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4+12 & 5+0\\8+16 & 10+0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}16 & 5\\24 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8\\5 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}96+25 & 128+5\\144+50 & 192+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}121 & 133\\194 & 202\end{pmatrix}$$

(iii) 19.4. ضرب جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ڪرڻ:

جيڪڏهن A، B ۽ C کي به ٽي ضرب لاءِ موافق قالب آهن تہ پوءِ ضرب جي لحاظ کان سنگت وارو قانون هن ريت آهي: $(AB)C=A(BC)$

مثال: ضرب جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ڪريو جيڪڏهن

$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\4 & 2\end{pmatrix}$ ۽ $C=\begin{pmatrix}-1 & 5\\1 & 2\end{pmatrix}$

تصديق:

$$L.H.S=(AB)C$$

$$=\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-1 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 13\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 36\\-3 & 4\end{bmatrix}$$

$$R.H.S=A(BC)$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-2 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -4\\-2 & 24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 36\\-5 & 4\end{bmatrix}$$

جئين تہ $L.H.S=R.H.S$

تنهنڪري ضرب جي لحاظ کان سنگت واري قانون جي تصديق ٿي.

(iv) 19.4. ورهاست واري قانونن جي تصديق ڪرڻ (Distributive Laws):

جيڪڏهن A ، B ۽ C کي به ٽي ضرب ۽ جوڙ جي لحاظ کان موافق قالب آهن تہ پوءِ ورهاست وارا قانون هن ريت آهن

(i) $A(B+C) = AB + AC$ (کاپو ورهاست وارو قانون)

(ii) $(B+C)A = BA + CA$ (ساڃو ورهاست وارو قانون)

KARACHIEDU.COM

مثال : جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ۽ $C=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ تہ پوءِ هيٺين جي تصديق ڪريو

(i) $A(B+C)=AB+AC$ (ii) $(B+C)A=BA+CA$

تصديق:

$$A(B+C)=AB+AC \quad \text{(i)}$$

$$L.H.S=A(B+C)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$R.H.S=AB+AC$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

جيئن تہ $LHS=RHS$

تنهنڪري $A(B+C)=AB+AC$ آهي ڪري تصديق ٿي.

ساڳي طريقي سان $(B+C)A=BA+CA$ جي بہ تصديق ٿيندي.

19.4. (v) مثال جي مدد سان تصديق ڪريو تہ قالب عام طرح سان ضرب جي لحاظ کان متا وارو قانون نٿا رکن $AB\neq BA$

مثال :

فرض ڪريو $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ ۽ $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ تہ پوءِ تصديق ڪريو تہ $AB\neq BA$

تصديق:

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AB=\begin{bmatrix}-5+6 & 10-4\\ 2-3 & -4+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

هاڻي

$$BA=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad BA=\begin{bmatrix}-5-4 & -2-2\\ 15+4 & 6+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -4\\ 19 & 8\end{bmatrix}$$

جيئن تہ $AB\neq BA$

تنهنڪري تصديق ٿي تہ عام طرح سان ضرب جي لحاظ کان متا وارو قانون قالبن تي لاڳو نٿو ٿيئي.

19.4. (vi) ضرب لاءِ ذاتي قالب (Multiplicative Identity) کي بيان ڪرڻ:

فرض ڪريو تہ A ترتيب n وارو هڪ چورس قالب آهي تہ پوءِ وحداني قالب I کي ضرب لاءِ ذاتي قالب چئبو آهي ۽ $AI_n=A$ يا $I_nA=A$

KARACHIEDU.COM

مثال 1: فرض ڪريو تہ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$. تصديق ڪريو $I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ضرب لاءِ ذاتي قالب آهي.

حل:

هتي

$$AI_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=A$$

$$I_2A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=A.$$

جئين تہ $AI_2=I_2A$

تنهڪري I_2 ضرب لاءِ ذاتي قالب آهي

19.4(vii) چڪاس ڪريو تہ $(AB)^t=B^tA^t$

مثال: جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ۽ $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ چڪاس ڪريو تہ $(AB)^t=B^tA^t$

چڪاس:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 11 & -4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)^t=\begin{bmatrix}5 & 11\\ -2 & -4\end{bmatrix}.$$

هاڻي

$$B^tA^t=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 11\\ -2 & -4\end{bmatrix}$$

جئين تہ $(AB)^t=B^tA^t$

انهي ڪري چڪاس ٿي

مثال 2: جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 4 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}$ ۽ $B=\begin{pmatrix}6 & 8 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}$ تصديق ڪريو تہ $AB^t=B^tA^t$

تصديق:

$$AB=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 4 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 8 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}36+25+6 & 48+5+12 & 0+10+8\\ 24+30+9 & 32+6+18 & 0+12+12\\ 0+5+21 & 0+1+42 & 0+2+28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}67 & 65 & 18\\ 63 & 56 & 24\\ 26 & 43 & 30\end{pmatrix}$$

KARACHIEDU.COM

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 67 & 65 & 18 \\ 63 & 56 & 24 \\ 26 & 43 & 30 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

هاڻي

$$B^tA^t = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36+25+6 & 24+30+9 & 0+5+21 \\ 48+5+12 & 32+6+18 & 0+1+42 \\ 0+10+8 & 0+12+12 & 0+2+28 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 67 & 63 & 26 \\ 65 & 56 & 43 \\ 18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = B^tA^t$$

انهي ڪري تصديق ٿي

SHIEDU.COM

مشق 19.1

1. هيٺين قالبن مان هر هڪ جو قسم لکو.

(i). $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ (v). $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

2. هيٺ ڏنل هر هڪ قالب جي ترتيب لکو

(i). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (v). $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

3. چڪاس ڪريو ته ڇا هيٺيان قالب همشڪلي يا اُبتا همشڪلي قالب آهن.

(i). $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (ii). $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iii). $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 7 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ (iv). $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 4 \\ -6 & 0 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

4. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$، $D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ ۽ $E=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$

ته هيٺيان لهو جيڪڏهن ممڪن هجي

(i) $A+C$ (ii) $A+E$ (iii) $B-D$ (iv) $2B+3A$

(v) $B-C$ (vi) A^2 (vii) B^2 (viii) $D+E$

5. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix}$ ۽ $B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ -2 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ ته هيٺيان لهو

(i) $A+B$ (ii) $A-B$ (iii) $3A+2B$

(iv) AB (v) BA (vi) A^2

6. تصديق ڪريو ته (i) $A+B=B+A$ (ii) $C-D\neq D-C$

جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 7 & -4\end{pmatrix}$، $C=\begin{pmatrix}3 & 1 & -4\\ 4 & 3 & 1\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ ۽ $D=\begin{pmatrix}2 & 7 & -5\\ -2 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 4\end{pmatrix}$

7. ثابت ڪري ڏيکاريو $AB\neq BA$ جڏهن ته $A=\begin{pmatrix}8 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ ۽ $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 2 & 5 & 7\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$

8. جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 7 & -4\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix}$ ۽ $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -4\end{pmatrix}$، ته پوءِ $2A-3B+4C$ جو ملهه لهو

9. جيڪڏهن $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ته پوءِ a، b، c ۽ d جو ملهه لهو

10. جيڪڏهن $\begin{bmatrix}x & -1 & y\\ 2 & 0 & 3\\ z & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & a & x\\ b & 0 & c\\ 2 & 3 & d\end{bmatrix}$ ته پوءِ a، b، c، d، x، y ۽ z جي قيمت لهو

11. هيٺين قالبن لاءِ ممڪن ضرب اُپتون لهو

$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ ۽ $C=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$

12. ضرب اُپت لهو: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$

13. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$ ۽ $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$
تہ پوءِ تصديق ڪريو تہ: (i) $A(B+C)=AB+AC$ (ii) $(B+C)A=BA+CA$

14. جيڪڏهن $A=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 4 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}$، $B=\begin{pmatrix}6 & 8 & 0\\ 5 & 1 & 2\\ 3 & 6 & 4\end{pmatrix}$ ۽ $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ تہ هيٺين جي تصديق ڪريو

(a) $A+B=B+A$ (b) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(c) $(A+B)C=AC+BC$ (d) $A(B+C)=AB+AC$

15. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ ۽ $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ تہ پوءِ ثابت ڪري ڏيکاريو تہ
$A(BC)=(AB)C$

19.5. قالب جو قطعي ملهه (Determinant of a Matrix):

19.5.(i) قالب جو قطعي ملهه (Determinant of a Matrix) بيان ڪرڻ:

اسين R تي، هر هڪ چورس قالب A سان هڪ عدد $|A|$ ملائي سگهون ٿا.
ان عدد کي قالب A جو قطعي ملهه چئبو آهي.

جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، تہ پوءِ A جي قطعي ملهه کي $|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ سان ظاهر ڪبو آهي.

19.5.(ii) قالب جي قطعي ملهه جي قيمت لهڻ:

ڪنهن بہ 2×2 قالب $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ لاءِ $|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$
هتي $ad-bc$ کي قالب جي قطعي ملهه جي قيمت چئبو آهي.

مثال طور:

$$\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & -4\end{vmatrix}=3\times(-4)-7\times1=-19$$

هيٺين فارمولي کي ليبنيز فارمولو (Leibniz formula) يا ليپلاسيئن پکيڙ (Laplacian expansion) چئبو آهي

جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ تہ پوءِ

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

نوٽ: هن طريقي سان قالب جي قطعي ملهه جي قيمت لهڻ R_1 سان پکيڙ آهي

KARACHIEDU

مثال: $|A|$ جي قيمت لهو جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}4&-3&5\\1&0&3\\-1&5&2\end{bmatrix}$

حل: $|A|$ جي قيمت لهڻ لاءِ اچو ته قطعي مُلهه کي R_1 سان کوليون

$$|A|=4\begin{vmatrix}0&3\\5&2\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}1&3\\-1&2\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1&0\\-1&5\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |A|=4(0-15)+3(2+3)+5(5+0)=-20.$$

نوٽ: قالب جي قطعي مُلهه جي قيمت مخصوص هوندي آهي.

(iii) 19.5. نادر ۽ غير نادر قالبن (Singular and non-signular matrices) کي بيان ڪرڻ:

قالب A کي نادر کوڏبو جيڪڏهن ان جي قطعي مُلهه جي قيمت ٻڙي هجي يعني ته $|A|=0$

قالب A کي غيرنادر کوڏبو جيڪڏهن ان جي قطعي مُلهه جي قيمت ٻڙي جي برابر نه هجي.يعني ته $|A|\neq 0$

نوٽ: هڪ نادر قالب کي غير اُبتو ٿيندڙ (Non-invertible matrix)، قالب پڻ چئبو آهي. غير نادر قالب کي اُبتو ٿيندڙ قالب پڻ چئبو آهي

مثال: فيصلو ڪيو ته $A=\begin{bmatrix}2&4&6\\2&0&2\\6&8&14\end{bmatrix}$ جا هڪ نادر قالب آهي يا نه

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&4&6\\2&0&2\\6&8&14\end{vmatrix}=2(0-16)-4(28-12)+6(16-0)=-32-64+96=0.$$

جيئن ته $|A|=0$

تنهنڪري A هڪ نادر قالب آهي.

(iv) 19.5. قالب جا ننڍا قطعي مُلهه ۽ هم جُزا (Minors and Cofactors) بيان ڪرڻ:

فرض ڪريو ته A هڪ 3×3 ترتيب/جو چورس قالب آهي ته پوءِ هڪ رُڪن a_{ij} جو ننڍو قطعي ملهه کي M_{ij} سان ظاهر ڪبو آهي.جيڪو اهڙي قالب جو قطعي مُلهه آهي جيڪو i^{th} قطار ۽ j^{th} ڪالم ڪڍي چڏڻ سان حاصل ٿيندو آهي.

مثال طور: جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ ته پوءِ پهرين قطار ۽ ٻيون ڪالم ڪڍي چڏڻ سان $\begin{bmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$

قالب حاصل ٿيندو ۽ ان جي قطعي ملهه کي ننڍو قطعي ملهه M_{12} چئبو ۽ هن ريت لکبو $M_{12}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$

جڏهن ته رُڪن a_{ij} جو هم جزو جيڪو A_{ij} سان ظاهر ڪبو آهي، اهو هن ريت لهبو: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

هتي M_{ij} چورس قالب A جي رُڪن a_{ij} جو ننڍو قطعي مُلهه آهي.

KARACHIEDU.COM

مثال : جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 5\\ 6 & 0 & 4\\ 1 & 5 & -7\end{bmatrix}$ تہ پوءِ M_{12} ۽ A_{12} لهو

حل:

هتي $M_{12}=\begin{vmatrix}6 & 4\\ 1 & -7\end{vmatrix}=6(-7)-4(1)=-46$

۽ $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,

تنهنڪري $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}$

$A_{12}=(-1)^3(-46)$

$A_{12}=(-1)(-46)=46.$

19.6. قالب جو ضربي اُبتڙ (Multiplicative Inverse of a Matrix):

19.6. (i) قالب جو ائڊجوائنٽ بيان ڪرڻ (Adjoint of a matrix):

2 × 2 ترتيب واري قالب جو ائڊجوائنٽ

فرض ڪريو A هڪ چورس قالب آهي. A جي هر جُزن واري قالب جو مٿا ستا ٽيل قالب تي A جوائڊ جوائنٽ ڪوٺبو

جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ تہ پوءِ قالب A جي ائڊجوائنٽ کي Adj (A) يا adj (A) سان ظاهر ڪبو آهي.

۽ $\mathrm{Adj}(A)=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ هڪ قالب آهي

تہ پوءِ $\mathrm{Adj}(A)=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}^t$

جڏهن تہ A_{11}، A_{12}،...، A_{33} قالب A جا هر جُزا آهن.

مثال: جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ تہ پوءِ قالب A جو ائڊجوائنٽ لهو

حل: سڀ کان اڳ هر، اسين قالب A جا سمورا هر جُزا لهنداسين.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6$$

KARACHIEDU.COM

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

هاڻي

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 6 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

19.6. (ii) هڪ غير نادر قالب A جو ضربي اُبتڙ ۽ تصديق ڪرڻ ته $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ جڏهن ته I هڪ ضرب لاءِ ذاتي قالب آهي.

جيڪڏهن A ۽ B، $n \times n$ ترتيب جا به قالب آهن اهڙي طرح جو $AB = BA = I_n$ تہ پوءِ A ۽ B هڪ بئي جا ضربي اُبتڙ ڪوٺبا. قالب A جي ضربي اُبتڙ کي A^{-1} سان ظاهر ڪبو آهي.

مثال:

چڪاس ڪيو تہ چا $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ هڪ بئي جا ضربي اُبتڙ آهن

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-14 & -21+21 \\ 10-10 & -14+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ساڳي ريت

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-14 & 35-35 \\ -6+6 & -14+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AB = BA = I_2$ جيئن تہ

تنهنڪري A ۽ B هڪبئي جا ضربي اُبتڙ آهن

چڪاس ٿي.

KARACHIEDU.COM

19.6.(iii) هڪ غير نادر قالب جو ضربي اُبتڙ لهڻ لاءِ ائڊجوائنٽ طريقي جو استعمال ڪرڻ

فرض ڪريو $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هڪ غير نادر قالب آهي تہ پوءِ A^{-1} هن ريت معلوم ڪبو:

$$A^{-1}=\frac{Adj(A)}{|A|} \quad \text{جڏهن تہ } |A|\neq 0$$

ضربي اُبتڙ لهڻ جو هي طريقو ائڊجوائنٽ طريقو ڪوٺبو آهي

مثال 1:

ائڊجوائنٽ واري طريقي سان قالب $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ جو ضربي اُبتڙ لهو

حل:

هتي $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2$ جيئن تہ $|A|\neq 0$ تنهنڪري A جو ضربي اُبتڙ وجود رکي ٿو

هاڻي $Adj(A)=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

۽ $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

مثال 2:

ائڊجوائنٽ واري طريقي سان قالب $A=\begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ جو ضربي اُبتڙ لهو

حل:

هتي

$$|A|=\begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=9(2-0)-2(-10-24)+1(0+4)$$

$$=18+68+4$$

$$=90.$$

$|A|\neq 0,$ جيئن تہ

تنهنڪري A^{-1} وجود رکي ٿو.

هاڻي اسين سمورا هم جُزا لهنداسين

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=2-0=2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-(-10-24)=34$$

KARACHIEDU.COM

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0+4 = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-0) = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-18-4) = -22$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(0-8) = 8$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12+1 = 13$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(54-5) = -49$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -9-10 = -19$$

هاڻي $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t$ انهي کريءَ $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 13 \\ 34 & -22 & -49 \\ 4 & 8 & -19 \end{bmatrix}$

هاڻي $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj}(A)}{|A|}$

$$A^{-1} = \frac{1}{90}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 13 \\ 34 & -22 & -49 \\ 4 & 8 & -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{45} & \frac{2}{45} & \frac{13}{90} \\ \frac{17}{45} & \frac{-11}{45} & \frac{-49}{90} \\ \frac{2}{45} & \frac{4}{45} & \frac{-19}{90} \end{bmatrix}$$

19.6. (iv) جي چڪاس ڪريو: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ تہ پوءِ چڪاس ڪريو تہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

حل:

ڏنل آهي تہ $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

KARACHIEDU.COM

AB جو ضربي اُبتڙ

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 18+49 & 24+63 \\ 12+35 & 16+45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}.$$

هاڻي $|AB| = 4087 - 4089 = -2$

جيئن تہ $|AB| \neq 0$

تنهنڪري $(AB)^{-1}$ وجود رکي ٿو

هاڻي

$$(AB)^{-1} = \frac{\text{adj}\,(AB)}{|AB|}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} \ldots(i)$$

A جو ضربي اُبتڙ

اسان وٽ آهي تہ $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$|A| = 15 - 14 = 1$

جيئن تہ $|A| \neq 0$

تنهنڪري A^{-1} وجود رکي ٿو

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

B جو ضربي اُبتڙ

اسان وٽ آهي تہ $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

هاڻي

$|B| = 54 - 56 = -2$

جيئن تہ $|B| \neq 0$,

تنهنڪري B^{-1} وجود رکي ٿو

$$B^{-1} = \frac{\text{adj } B}{|B|} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

هاڻي

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 45+16 & -63-24 \\ -35-12 & 49+18 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} \ldots(ii)$$

مساوات (i) ۽ (ii) مان اسانکي مليو

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

انهي کري چڪاس ٿي.

19.7 هڪ درجي همزاد مساواتن جو حل (Solution of Simultaneous Linear Equations):

بن بدلجندڙن واريون بن هڪ درجي مساواتن جي مجموعي (System) تي غور ڪريو جيڪو هيٺ ڏنل آهي

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (I)$$

هي مجموعو هن ريت لکي سگهجي ٿو

$$AX = B \quad \ldots (II)$$

جڏهن تہ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

قالب A کي عددي منڊين جو قالب چئبو جڏهن تہ قالب X کي بدلجندڙن جو ڪالمي قالب ۽ B کي مستقل مقدارن جو ڪالمي قالب چئبو آهي.

هڪ ترتيبي جوڙو (x, y) ڏنل مجموعي جو حل ڪوٺبو ۽ اهو مساواتن وارو مجموعو ٻنهي قيمتن سان صحيح ٿيندو. اهڙا سڀ حل ملي هڪ درجي همزاد مساواتن جي مجموعي جو حل سيٽ ٺاهن ٿا.

KARACHIEDU.COM

19.7. (i) پن بدلجندڙن ۾ پن هڪ درجي مساواتن جي مجموعي کي حل ڪرڻ جيڪو عام زندگي جي مسئلن سان لاڳاپيل هجي ضربي اُبتڙ قالب وارو طريقو

هڪ قالبن واري هڪ مساوات کڻو جيڪا سيڪشن 19.7 ۾ زير غور هئي.

$$AX = B, \quad \cdots (i)$$ يعني ته

هتي A هڪ چورس ۽ غير نادر قالب آهي مساوات (i) جي ٻنهي پاسن کي A سان ضرب ڪندي ، اسانکي مليو:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$\Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B \quad \cdots (ii)$$

بدلجندڙن جي ڪالمي قالب کي لهڻ لاءِ اسين مساوات (ii) کي استعمال ڪنداسين ۽ ان طريقي کي ضربي اُبتڙ وارو طريقو ڪوٺبو آهي

مثال 1: ضربي اُبتڙ وارو طريقو استعمال ڪندي، هڪ درجي مساواتن جو هيٺيون مجموعو حل ڪريو

$$5x + 2y = 3$$
$$3x + 2y = 5$$

حل: ڏنل مجموعي کي قالبي شڪل ۾ لکندي

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

يعني

$$AX = B$$

جڏهن ته $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

ائڊجوائنٽ جو استعمال ڪندي پهريان اسين A^{-1} لهنداسين

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}{10-6} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

هاڻي ضربي اُبتڙ واري طريقي سان

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$ يا

$x = -1$ ۽ $y = 4$ حل آهي يعني حل سيٽ $= \{(-1, 4)\}$

KARACHIEDU.COM

مثال 2: هڪ سول انجنيئر کي ڪنهن آڏاوتي منصوبي لاءِ 6000 ڪعب ميٽر واري ۽ 9000 ڪعب ميٽر ٽلهي ٽلهي پٽڙي کپي. ٻن ڪڏن مان اهي شيون حاصل ٿي سگهن ٿيون. جن جو تفصيل هيٺين جدول ۾ ڏيکاريل آهي.

	واري	ٽلهي پٽڙي
I- ڪڏ	3	8
II- ڪڏ	4	11

ضربي اُبتڙ وارو طريقو استعمال ڪندي انهن شين جي مقدار لهو جيڪي انجنيئر جي ضرورت پوري ڪرڻ لاءِ هر هڪ ڪڏ مان کڻي اچيون

حل: فرض ڪريو ته x واري ۽ y ٽلهي پٽڙي جي مقدار کي ظاهر ڪن ٿا.

ضربي اُبتڙ واري طريقي موجب: $X = A^{-1}B \quad \cdots$ (i)

ڏنل مواد کي قالبي شڪل ۾ لکندي

$$AX = B$$

يا $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix}$

اسانکي اڳ ۾ ائڊجوائنٽ فارمولي ذريعي A^{-1} لهڻ جي ضرورت آهي.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}}{3(11)-8(4)} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ تنهنڪري

هاڻي مساوات (i) مان، اسان وٽ آهي

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6000 \\ 3000 \end{bmatrix}$$

ڪاٽو نشاني کي نظر انداز ڪندي اسان وٽ آهي $x = 6000$ ۽ $y = 3000$

انهي ڪري 6000 ڪعب ميٽر واري ۽ 3000 ڪعب ميٽر ٽلهي پٽڙي ڪڍي اچجي.

19.2.(ii) ڪريمر وارو قانون (Cramer's rule):

هڪ درجي مساواتن جي مجموعي کي حل ڪرڻ وارن طريقن مان هڪ طريقو ڪريمر جو قانون آهي اچو ته ٻن بدلجندڙن x ۽ y ۾ هڪ درجي مساواتن جي مجموعي تي غور ڪريون جيڪو هن ريت لکيل آهي.

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \cdots \text{(i)}$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

مجموعي (i) کي قالبي شڪل ۾ هينئن لکبو.

$$AX = B,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

KARACHIEDU.COM

جڏهن ته $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$، $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ۽ $B=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ مجموعي (i) کي فقط هڪ ئي حل هوندو

جيڪڏهن $|A| \neq 0$

جيڪو هن ريت حاصل ڪري سگهجي ٿو $y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ ۽ $x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

جڏهن ته $A_1=\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ۽ $A_2=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$

مثال : ڪريمر جو قانون استعمال ڪندي ڏنل مجموعي کي حل ڪريو.

$$3x+2y=10$$
$$-6x+4y=4$$

حل: هتي $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$

$$12+12=24$$

$\therefore$ يعني ته $|A| \neq 0$

هاڻي ڪريمر جي قانون مطابق

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}$$
$$=\frac{40-8}{24}$$
$$=\frac{32}{24}$$
$$x=\frac{4}{3}$$

۽ $y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{24}$

$$=\frac{12+60}{24}$$
$$=\frac{72}{24}$$
$$y=3$$

انهي ڪري حل سيٽ آهي $\left\{\left(\frac{4}{3},3\right)\right\}$

KARACHIEDU.COM

مشق 19.2

1. هيڻين مان هر هڪ قطعي مُلهه جي قيمت لهو

i) $\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ ii) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ iii) $\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

iv) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ v) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ vi) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

vii) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ viii) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ ix) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

x) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$ xi) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & x & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

2. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ تہ پوءِ M_{12} ، M_{22} ، M_{21} ، A_{12} ، A_{22} ۽ A_{21} جا مُلهه لهو.

3. x جي ڪهڙي قيمت لاءِ $\begin{bmatrix} 5-x & x+1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ نادر قالب ٿيندو

4. هيڻين چورس قالبن مان ڪهڙو نادر قالب ۽ ڪهڙو غير نادر قالب آهي

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ ۽ } B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. هيڻين جا ائڊجوائنٽ لهو

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}، B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ ۽ } C=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

6. جڏهن تہ $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ تصديق ڪريو تہ $A(\text{adj } A)=|A|\,I$

7. ائڊجوائنٽ واري طريقي سان هيڻين قالبن جا ضربي اُبتڙ لهو

i) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $B=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$

iii) $C=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&2&1\\2&1&2\end{bmatrix}$ iv) $D=\begin{bmatrix}1&0&1\\-4&1&-1\\6&-2&1\end{bmatrix}$ v) $E=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&2\\-2&-2&1\end{bmatrix}$.

8. ضربي اُبتڙ واري طريقي ۾ ڪريمر جي قانون ذريعي هيٺين جو حل لهو.

1) $2x+3y=14$, $-4x+y=28$ 2) $2x-4y=-12$, $2y+3x=0$

جائزي واري مشق 19

1. صحيح جواب چونڊيو.

i. جيڪڏهن m قطارن جو تعداد ۽ n ڪالمن جو تعداد ظاهر ڪري ٿو ۽ $m=n$ ته پوءِ قالب کي _____ قالب چئبو.

(a) مستطيلي (b) برابر (c) چورس (d) ٻُڙي

ii. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix}$ ته پوءِ $A^2=$ _____

(a) I_2 (b) I_3 (c) $-I_2$ (d) 0

iii. جيڪڏهن A هڪ چورس قالب آهي اهڙي طرح جو $A^t=-A$ ته پوءِ A کي _____ چئبو

(a) اريبي قالب (b) غير طرفي قالب

(c) همشڪلي قالب (d) اُبتو همشڪلي قالب

iv. جيڪڏهن A، B ۽ C ٽي قالب آهن ته پوءِ $(ABC)^t=$ _____

(a) $A^t.B^t.C^t$ (b) $C^tB^tA^t$ (c) $C^tA^tB^t$ (d) $\left(B^tA^t\right)C^t$

v. جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}0&i^2\\-i^2&0\end{bmatrix}$ ۽ $C=\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}$ ته پوءِ

(a) $A^2=-I$ (b) $B^2=-I$ (c) $C^2=-I$ (d) اهي سڀ

vi. بن قالبن A ۽ B لاءِ جيڪڏهن $A=\begin{bmatrix}\sin\theta&-\cos\theta\\\cos\theta&\sin\theta\end{bmatrix}$ ۽ $B=\begin{bmatrix}\sin\theta&\cos\theta\\-\cos\theta&\sin\theta\end{bmatrix}$ ته پوءِ $AB=$ _____

(a) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

vii. $2\begin{bmatrix}x\\3\\4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1\\y\\0\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}0\\4\\z\end{bmatrix}$ جون قيمتون لهو جيڪڏهن x، y ۽ z

(a) $2,\frac{3}{2},\frac{10}{3}$ (b) $\frac{3}{2},2,\frac{10}{3}$ (c) $\frac{3}{2},\frac{10}{3},2$ (d) 1,2,3

viii. $\left(A^{-1}\right)^{-1} =$ _____

(a) A^{-2} (b) A (c) A^{-1} (d) A^2

ix. $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = x + 4$ جي قيمت لهو جيڪڏهن x

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) 0 (d) ڪوبہ نہ

x. جيڪڏهن $\begin{bmatrix} \lambda & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ غير نادر قالب آهي تہ پوءِ $\lambda \neq$ _____

(a) -15 (b) -17 (c) -16 (d) ڪوبہ نہ

2. قطاري ءِ ڪالمي قالب کي بيان ڪريو.

3. هيٺين قالبن جي ترتيب لهو.

i) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

4. هيٺين جي وصف بيان ڪريو.

(I) چورس قالب (ii) مستطيلي قالب (iii) اريبي قالب (iv) غير طرفي قالب

(v) همشڪلي قالب (vi) اُبتو همشڪلي قالب

5. جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ۽ $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ تہ پوءِ هيٺيان لهو

i) $A + B$ ii) $A - B$ iii) AB iv) BA

v) $5A$ vi) $7B$ vii) $8A - 9B$

6. جي قيمت لهو $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \\ -7 & 8 & -10 \end{vmatrix}$

7. نادر ۽ غير نادر قالبن کي مثالن سان بيان ڪريو.

8. جيڪڏهن $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ تہ پوءِ A^{-1} لهو.

9. ڏنل مساواتن جي جوڙي کي هيٺين طريقن سان حل ڪريو $\begin{aligned} 2x + 5y &= 27 \\ 7x + y &= 12 \end{aligned}$

(i) ضربي اُبتڙ وارو طريقو (ii) ڪريمر جو قانون

خلاصو

- رُڪنن جي مستطيلي ترتيب کي قالب چئبو آهي.
- قالب ۾ رقمن جي اُفقي ليڪ کي قالب جي قطار چئبو آهي ۽ رقمن جي عمودي ليڪ کي قالب جو ڪالم چئبو آهي.
- ٻن قالبن کي برابر قالب ڪوٺبو جيڪڏهن انهن جي ترتيب ساڳي هجي ۽ انهن جا واسطيدار رُڪن به ساڳيا هجن.
- هڪ قطار واري قالب کي قطاري قالب ۽ هڪ ڪالم واري قالب کي ڪالمي قالب چئبو آهي.
- هڪ قالب جنهن ۾ قطارن جو تعداد ۽ ڪالمن جو تعداد برابر هجي تہ ان قالب کي چورس قالب ڪوٺبو نہ تہ پوءِ ان کي مستطيلي قالب چئبو.
- هڪ چورس قالب کي اريبي قالب چئبو. جيڪڏهن گهٽ ۾ گهٽ هڪ اريبي رڪن ڪانسواءِ سمورا رُڪن ٻُڙي هجن
- هڪ اُريبي قالب جنهن ۾ اُريبي رُڪن ساڳيا هجن، ان کي غير طرفي قالب چئبو آهي.
- هڪ اُريبي قالب جنهن جو هر هڪ اُريبي رُڪن 1 هجي، ان کي وحداني قالب چئبو آهي.
- هڪ چورس قالب کي همشڪلي قالب ڪوٺبو جيڪڏهن ان جو متا ستا ٽيل قالب به ان ڏنل قالب جي برابر هجي.
- هڪ چورس قالب کي اُبتوهمشڪلي قالب ڪوٺبوجيڪڏهن ان جو متاستا ٽيل قالب ان جو منفي هجي.
- ٻن قالبن جي جوڙيا ڪٽ ڪرڻ لاءِ انهن جا واسطيدار رُڪن جوڙ يا ڪٽ ڪيا آهن.
- جيڪڏهن A ۽ B ساڳي ترتيب وارا ۽ قالب آهن تہ پوءِ جوڙ جي لحاظ کان متا وارو قانون آهي:

$$A + B = B + A$$

- جيڪڏهن A، B ۽C ٽي ساڳي ترتيب وارا قالب آهن تہ پوءِ جوڙ جي لحاظ کان سنگت واري خاصيت آهي: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- ۽ قالب A ۽ B ضرب لاءِ موافق ڪوٺيا جيڪڏهن پهرين قالب جي ڪالمن جو تعداد ٻئي قالب جي قطارن جي تعداد جي برابر هجي.
- R تي ڪنهن چورس قالب A لاءِ. هڪ عدد $|A|$ کي قالب A جو قطعي ملهہ ڪوٺبو آهي.
- جيڪڏهن A ۽ B، $n\times n$ ترتيب جا ۽ قالب آهن اهڙي طرح جو $AB=BA=I$ تہ پوءِ A ۽ B هڪ ٻئي جا ضربي اُبتڙ ڪوٺيا.
- هڪ درجي مساواتن جي مجموعي (System) کي ضربي اُبتڙ واري طريقي ۽ ڪريمر جي قانون ذريعي حل ڪري سگهجي ٿو.

يونٽ 20

په درجي مساواتن جو نظريو

THEORY OF QUADRATIC EQUATIONS

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- په درجي اظهار $ax^2 + bx + c$ جو شناختي فرق $b^2 - 4ac$ بيان ڪن
- ڏنل په درجي اظهار جو شناختي فرق لهن
- شناختي فرق ذريعي په درجي مساوات جي اصلن جو قسم (Nature of roots) تي بحث ڪن
- ڏنل په درجي مساوات جي اصلن جو قسم لهڻ ۽ مساوات کي حل ڪندي تصديق ڪن
- ڏنل په درجي مساوات ۾ شامل اٽڪاتل مقدارن جو ملهه لهڻ جڏهن ان جي اصلن جو قسم مليل هجي.
- ايڪي جا ٽيان مول لهن
- ايڪي جي منجهيل ٽئين مولن کي ω ۽ ω^2 طور سچائپ ڪن
- ايڪي جي ٽئين مولن جي خاصيتن جو تصديق ڪن
- ايڪي جي ٽئين مولن جي خاصيتن جو استعمال ڪندي واسطو رکندڙ مسئلن کي حل ڪن
- په درجي مساوات جي اصلن ۽ عددي مُندين جي وچ ۾ تعلق لهن
- حل ڪرڻ کانسواءِ، ڏنل په درجي مساوات جي اصلن جي جوڙ أپت ۽ ضرب أپت لهن
- ڏنل په درجي مساوات ۾ شامل نامعلوم عددن جو ملهه لهن جڏهن
  - اصلن جي جوڙ أپت ۽ اصلن جي ضرب أپت جي ڇڪ أپت پاڻ ۾ برابر هجي
  - اصلن جي چورسن جي جوڙ أپت، ڏنل عدد جي برابر هجي
  - اصل پاڻ ۾ ڏنل عدد جو فرق رکن
  - اصل ڏنل تعلق کي پورو ڪن (مثال طور تعلق $2\alpha + 5\beta = 7$ جڏهن ته α ۽ β مساوات جا اصل آهن)
  - اصلن جي جوڙ أپت ۽ ضرب أپت ٻئي هڪ ڏنل عدد جي برابر هجن
- هڪ په درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل بيان ڪن
- همشڪلي عمل کي گراف وسيلي ظاهر ڪن
- په درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل ان جي عددي مندين جي صورت ۾ لهن

- ڏنل اصلن جي په درجي مساوات لاءِ فارمولو: $x^2 - (\text{اصلن جي جوڙ أپت})x + (\text{اصلن جي ضرب أپت}) = 0$ ناهڻ.
- په درجي أپت مساوات ناهن جنهن جا اصل هيٺيان آهن.
  - $2\alpha+1, 2\beta+1$
  - α^2, β^2
  - $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$
  - $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$
  - $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$
- جڏهن ته α، β هڪ په درجي مساوات جا اصل آهن.
- α ، β جون قيمتون لهڻ جڏهن هڪ مساوات جا اصل $\frac{1}{\alpha}$ ۽ $\frac{1}{\beta}$ آهن.
- ڪعبي يا ٽي درجي مساوات جو حل ڪن جڏهن مساوات جو هڪ اصل مليل هجي.
- چو درجي مساوات کي حل ڪن جيڪڏهن مساوات جا په حقيقي اصل مليل هجن.
- بن بدلجندڙن ۾ بن مساواتن جي مجموعي کي حل ڪرڻ جڏهن
  - هڪ مساوات هڪ درجي ۽ ٻي مساوات په درجي هجي.
  - جڏهن ٻئي مساواتون په درجي هجن
  - په درجي مساوات سان حل ٿيندڙ عام زندگي جا مسئلا حل ڪن.

20.1 ٻه درجي مساوات جي اصلن جو قسم (Nature of the Roots of a Quadratic Expression):

20.1.(i) ٻه درجي اظهار $ax^2+bx+c, a\neq 0.$ جو شناختي فرق (b^2-4ac) بيان ڪرڻ

اسانکي خبر آهي تہ ٻن درجن واري گھٽ رقمي اظهار کي ٻہ درجي اظهار چئبو آهي ٻہ درجي اظهار جي معياري صورت $ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ آهي جڏهن تہ a، b ۽ c ترتيبوار x^2 جو عددي منيءَ، x جو عددي منيءَ ۽ مستقل رقم (Constant Term) آهن.

ٻه درجي اظهار جو شناختي فرق (Discriminant):

ٻہ درجي اظهار $ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ لاءِ اظهار b^2-4ac کي ان جو شناختي فرق چئبو آهي ۽ ان کي Δ يا D سان ظاهر هر ڪبو آهي يعني $\Delta=b^2-4ac$

20.1.(ii) ڏنل ٻه درجي مساوات جو شناختي فرق لھڻ

اسين اڳيئي چاڻون ٿا تہ ٻہ درجي مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جو حل $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ آهي ۽ b^2-4ac شناختي فرق آهي

مثال $2x^2+5x-4=0$ جو شناختي فرق لھو.

حل: اسان وٽ آهي $2x^2+5x-4=0$

هتي $a=2$، $b=5$ ۽ $c=-4$

هاڻي

$$\Delta=b^2-4ac=(5)^2-4(2)(-4)$$
$$=25+32=57$$

20.1.(iii) شناختي فرق ذريعي ٻہ درجي مساوات جي اصلن جو قسم (Nature of roots) لھڻ:

اسان شناختي فرق يعني $\Delta=b^2-4ac$ جو استعمال ڪندي ٻہ درجي مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$ جي اصلن جو قسم لھي سگھون ٿا

ٻہ درجي مساوات $ax^2+bx+c=0$ جا اصل $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ۽ $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ آهن ۽ اصلن جو قسم $b^2-4ac,$ جي قيمت تي منحصر ڪري ٿو جڏهن تہ a، b ۽ c حقيقي عدد آهن

i. جيڪڏهن If $\Delta=b^2-4ac>0,$ تہ پوءِ اصل حقيقي ۽ غير مساوي هوندا

ii. جيڪڏهن $\Delta=b^2-4ac<0,$ تہ پوءِ اصل غير حقيقي (منجهيل يا خيالي) هوندا

iii. جيڪڏهن $\Delta=b^2-4ac=0,$ تہ پوءِ اصل ناطق ۽ برابر هوندا ۽ هر هڪ اصل $-\frac{b}{2a}$ جي برابر هوندو

iv. جيڪڏهن a,b,c ناطق عدد آهن ۽ $\Delta=b^2-4ac$ هڪ مڪمل چورس هجي تہ پوءِ اصل ناطق ۽ غير مساوي هوندا. ٻي صورت ۾ اصل غير ناطق هوندا.

20.1.(iv) ڏنل ٻه درجي مساوات جي اصلن جو قسم لھڻ ۽ مساوات کي حل ڪندي تصديق ڪرڻ:

مثال 1:

هيٺين مساواتن جي اصلن جو قسم لھڻ لاءِ شناختي فرق استعمال ڪريو ۽ مساوات کي حل ڪندي تصديق ڪريو

(i) $x^2+5x-14=0$ (ii) $5x^2+3x+1=0$

(iii) $x^2-9x+5=0$ (iv) $9x^2=6x-1$

KARACHIEDU.COM

حل:

$$x^2+5x-14=0 \quad \text{(i)}$$

هتي $a=1$ ۽ $b=5$ ۽ $c=-14$

$$\Delta = b^2-4ac$$

$$\therefore \quad \Delta=(5)^2-4(1)(-14)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta=25+56$$

$$\Rightarrow \quad \Delta=81=(9)^2>0,$$

جيئن ته شناختي فرق مڪمل چورس ۽ مثبت آهي تنهنڪري مساوات جا اصل، حقيقي، ناطق ۽ غير مساوي آهن.

تصديق:

$$x^2+5x-14=0$$

$$x^2+7x-2x-14=0$$

$$x(x+7)-2(x+7)=0$$

$$(x-2)(x+7)=0$$

$$x+7=0 \quad \text{يا} \quad (x-2)=0$$

$$\Rightarrow \quad x=-7 \quad \text{يا} \quad x=2$$

هتي مساوات جا اصل حقيقي غير ناطق ۽ غير مساوي آهن تصديق ٿي

حل:

$$5x^2+3x+1=0, \quad \text{(ii)}$$

هتي $a=5$ ۽ $b=3$ $c=1,$

$$\Delta = b^2-4ac$$

$$\therefore \quad \Delta=(3)^2-4(5)(1)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta=9-20$$

$$\Rightarrow \quad \Delta=-11<0, \quad \text{(يعني منفي)}$$

جيئن ته شناختي فرق منفي آهي. تنهنڪري مساوات جا اصل منجهيل آهن

تصديق:

به درجي فارمولي جو استعمال ڪندي

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-20}}{2}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2} \qquad (\because i^2=-1)$$

هتي مساوات جا اصل، منجهيل آهن تصديق ٿي.

حل:

$$x^2-9x+5=0, \quad \text{(iii)}$$

هتي $a=1$ $b=-9$ ۽ $c=5$

$$\Delta = b^2-4ac$$

$$\therefore \quad \Delta=(-9)^2-4(1)(5)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta=81-20$$

$$\Rightarrow \quad \Delta=61>0,$$

جيئن ته شناختي فرق مثبت ۽ غير مڪمل چورس آهي تنهنڪري مساوات جا اصل حقيقي ۽ غير ناطق مساوي آهن

تصديق:

$$x^2-9x+5=0,$$

به درجي فارمولي جو استعمال ڪندي

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-20}}{2}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{61}}{2}$$

هتي مساوات جا اصل حقيقي غير ناطق ۽ غير مساوي آهن تصديق ٿي

حل:

$$9x^2=6x-1 \quad \text{(iv)}$$

$$\Rightarrow 9x^2-6x+1=0$$

هتي $a=9,$ $b=-6$ ۽ $c=1$

$$\because \quad \Delta = b^2-4ac$$

$$\therefore \quad \Delta=(6)^2-4(9)(1)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta=36-36$$

$$\Rightarrow \quad \Delta=0,$$

جئين ته شناختي فرق پورو چورس ۽ پڙي آهي تنهنڪري مساوات جا اصل حقيقي، ناطق ۽ برابر آهن

تصديق:

$$9x^2-6x+1=0$$

$$(3x)^2-2(3x)(1)+(1)^2=0$$

$$(3x-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad 3x-1=0 \quad \text{يا} \quad 3x-1=0$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{3} \quad \text{يا} \quad x=\frac{1}{3}$$

هتي مساوات جا اصل حقيقي، ناطق ۽ برابر آهن تصديق ٿي.

KARACHIEDU.COM

مثال 2:

ثابت ڪري ڏيڪاريو تہ مساوات $abc^2x^2+c\left(3a^2+b^2\right)x+3a^2+b^2-ab=0$, جا اصل ناطق عدد آهن

حل:

$$abc^2x^2+c\left(3a^2+b^2\right)x+3a^2+b^2-ab=0$$

هتي $A=abc^2$, $B=c\left(3a^2+b^2\right)$ ۽ $C=3a^2+b^2-ab$

هاڻي $\Delta=B^2-4AC$

$$\Delta=\left[c\left(3a^2+b^2\right)\right]^2-4\left(abc^2\right)\left(3a^2+b^2-ab\right)$$
$$=c^2\left(3a^2+b^2\right)^2-4abc^2\left(3a^2+b^2-ab\right)$$
$$=c^2\left[\left(3a^2+b^2\right)^2-4ab\left(3a^2+b^2\right)+4a^2b^2\right]$$
$$=c^2\left[\left(3a^2+b^2\right)^2-2\left(3a^2+b^2\right)(2ab)+(2ab)^2\right] \quad \left[\because\ 4ab=2(2ab)\right]$$
$$=c^2\left[\left(3a^2+b^2-2ab\right)^2\right]$$
$$=\left[c\left(3a^2+b^2-2ab\right)\right]^2$$

جيئن تہ Δ جو ملهہ مڪمل چورس آهي
تنهنڪري مساوات جا اصل، ناطق عدد آهن

(v) 20.1 ڏنل ٻہ درجي مساوات ۾ شامل اٽڪاتل مقدارن جو ملهہ لهڻ جڏهن ان جي اصلن جو قسم مليل هجي.

ڏنل ٻہ درجي مساوات ۾ شامل اٽڪاتل مقدار جو ملهہ لهڻ لاءِ هيٺيون مثالون اسانجي مدد ڪندیون جڏهن تہ مساوات جي اصلن جو قسم مليل هجي.

مثال 1:

p جي ڪهڙي قيمت لاءِ مساوات $3x^2+5x+p=0$ ڪي

(i) مساوي اصل هوندا.

(ii) ناطق اصل هوندا.

(iii) منجهيل اصل هوندا.

حل:

$$3x^2+5x+p=0$$

هتي $a=3$ ، $b=5$ ۽ $c=p$

$\because$ $\Delta=b^2-4ac$

$\therefore$ $\Delta=(5)^2-4(3)(p)=25-12p,$

مساوي اصلن لاءِ

KARACHIEDU.COM

$$\Delta = 0$$
يعني $25-12p=0$
$$\Rightarrow \quad -12p=-25,$$
$$\Rightarrow \quad p=\frac{25}{12},$$

انهيءَ ڪري $p=\frac{25}{12}$, تي ڏنل مساوات ڪي بہ مساوي اصل هوندا

(ii) ناطق اصلن لاءِ

Δ ڪي پورو چورس هجڻ گهرجي

يعني $25-12p$ ڪي ضرور پورو چورس ٿيڻ گهرجي جيڪو هيٺين قيمتن تي ٿيندو

$p=0$، $p=2$ ۽ $p=-2$ وغيره

اهڙي طرح $p=0,2,-2$ ۽ بين قيمتن تي شناختي فرق پورو چورس ٿيندو

(iii) منجهيل اصلن لاءِ

يعني $25-12p<0$
$$\Rightarrow \quad 12p>25$$
$$\Rightarrow \quad p>\frac{25}{12}$$

اهڙي طرح ڏنل مساوات ڪي مساوي اصل هوندا

جڏهن $p>\frac{25}{12}$,

مثال 2: جيڪڏهن مساوات $x^2-15-k(2x-8)=0$
ڪي مساوي اصل هجن تہ پوءِ p جي قيمت لهو

حل: اسان وٽ آهي $x^2-15-k(2x-8)=0$, ان کي معياري صورت ۾ لکندي
اسانکي ملیو $x^2-2kx+8k-15=0$
هتي $a=1$ $b=-2k$ ۽ $c=8k-15$
$$\Delta = b^2-4ac$$
$$\therefore \quad \Delta=(-2k)^2-4(1)(8k-15)$$
$$\Rightarrow \quad \Delta=4k^2-4(8k-15)$$

مساوي اصلن لاءِ

$$\Delta = 0$$
$$\therefore \quad 4k^2-4(8k-15)=0$$
$$\Rightarrow \quad k^2-8k+15=0$$ (بنهي پاسن کي 4 سان وندينديو)
$$\Rightarrow \quad k^2-5k-3k+15=0$$
$$\Rightarrow \quad k(k-5)-3(k-5)=0$$
$$\Rightarrow \quad (k-5)(k-3)=0$$

يعني $k-5=0$ يا $k-3=0$
$$\Rightarrow \quad k=5 \qquad k=3$$
$$k=3$$

اهڙي طرح k جون قيمتون 3 ۽ 5 آهن

KARACHIEDU.COM

مثال 3:

p جي ڪهڙي قيمت لاءِ، مساوات $2x^2 - px + 18 = 0$, ڪي حقيقي ۽ غير مساوي اصل هوندا

حل:

هتي $2x^2 - px + 18 = 0,$

$a = 2,\quad b = -p$ ۽ $c = 18$

$\because \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$\therefore \quad \Delta = (-p)^2 - 4(2)(18) = p^2 - 144$

حقيقي ۽ غير مساوي اصل لاءِ

$\because \quad \Delta > 0$

$\therefore \quad p^2 - 144 > 0$

$\Rightarrow \quad p^2 > 144$

$\Rightarrow \quad p > 12$ يا $p < -12$

اهڙي طرح ڏنل مساوات ڪي مساوي اصل هوندا جيڪڏهن $p < -12$ يا $p > 12$

.COM

مشق 20.1

1. شناختي فرق جو استعمال ڪندي، هيٺين مساواتن جي اصلن جو قسم لهو

(i) $x^2 + 5x - 6 = 0$ (ii) $x^2 = 6x$ (iii) $2x^2 + 8 = 6x$

(iv) $1 + 6x + 9x^2 = 0$ (v) $24x^2 + 12x + 36 = 0$ (vi) $x = x^2 + 1$

(vii) $3x^2 + 6 = 5x$ (viii) $3x^2 + 9 = 0$

2. k جي اُها حقيقي قيمت لهو جنهن تي هيٺين ۾ درجي مساواتن ڪي (i) سڳيو حقيقي اصل هجي (ii) مختلف اصل هجي (اشارو: سڳي حقيقي حل لاءِ $\Delta = 0$ ۽ مختلف حقيقي حل لاءِ $\Delta > 0$)

(i) $x^2 - 3x + k = 0$ (ii) $x^2 + k = 4$

(iii) $x^2 + kx + 2 = 0$ (iv) $(k-1)x^2 - 4x + 2 = 0$

(v) $x^2 + kx + 4 = 0$ (vi) $9x^2 + kx = -16$

(vii) $(k-2)x^2 = 4x + (k+2)$ (viii) $x^2 + 1 = kx$

3. هيٺ ڏنل هر هڪ ۾ درجي مساوات ۾ m جو مُلهه لهو جيڪو اصلن ڪي برابر ڪري

(i) $(m+1)x^2 + 2(m+3)x + (2m+3) = 0,$ بشرطيڪ $m \neq -1$

(ii) $9x^2 + mx + 16 = 0$

4. ثابت ڪري ڏيکاريو ته هيٺين ۾ درجي مساواتن جا اصل حقيقي عدد آهن

(i) $x^2 - 2x\left(k + \frac{1}{k}\right)x + 3 = 0,\ \forall k \in \mathrm{R} - \{0\}$

(ii) $2nx^2 + 2(l+m+n)x + (l+m) = 0,\ \forall l,m,n \in \mathbb{R}$ ۽ $m \neq 0$

5. ثابت ڪري ڏيکاريو ته هيٺين ۾ درجي مساواتن جا اصل ناطق عدد آهن.

(i) $(l-m)x^2 + (m+n-l)x - n = 0,\ \forall l,m,n \in \mathbb{R}$ ۽ $l \neq m$

(ii) $(a+c-b)x^2 + 2cx + (b+c-a) = 0,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

6. p ۽ q جي کھڙين قيمتن تي ھ درجي مساوات $x^2+(2p-4)x-(3q+5)=0$ کي مساوي اصل ھوندا

7. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ ڏنل ھ درجي مساوات $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ جا اصل حقيقي آھن ۽ اھي مساوي ٿيندا جيڪڏھن $a=b=c$.

20.2 ايڪي يا ھڪ جا ٽيان مول ۽ ان جون خاصيتون (Cube Roots of Unity and their properties):

20.2. (i) ايڪي جا ٽيان مول لھڻ.

فرض ڪريو تہ x ايڪي جو ٽيون مول آھي تہ پوءِ

$$x^3=1$$

$$\Rightarrow \quad x^3-1^3=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1)=0, \qquad \left[\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)\right]$$

يعني $x-1=0$

$$\Rightarrow \quad x=1$$

يا $x^2+x+1=0,$

هتي $a=b=c=1,$

ھ درجي فارمولي جو استعمال ڪندي اسان وٽ آھي

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-1\times3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, \quad (\because i^2=-1)$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ ۽ } x=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

اھڑي طرح ايڪي جا ٽيان مول

آھن $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ۽ 1

20.2. (ii) ايڪي جي منجھيل ٽئين مولن کي ω ۽ ω^2 طور سڃاڻپ ڪرڻ:

ايڪي جا ٻہ منجھيل ٽيان مول

$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ۽ $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ آھن انھن ٻنھي منجھيل ٽئين مولن لاءِ اسين يوناني حرف "ω" جو استعمال ڪنداسين جنھنڪي اوميگا "omega" پڙھبو آھي.

فرض ڪريو تہ $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ تہ پوءِ $\omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ انھي ڪري ھاڻي ايڪي جا ٽيئان مول 1, ω ۽ ω^2 آھن.

20.2. (iii) ايڪي جي ٽئين مولن جي خاصيتن جي تصديق ڪرڻ:

ايڪي جي ٽئين مولن جون خاصيتون آھن:

(i) ايڪي جو ھر ھڪ منجھيل ٽيئون مول پيئي جو چورس آھي:

تصديق:

ايڪي جو ھڪ منجھيل ٽيئون مول $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ آھي

KARACHIEDU.COM

هاڻي

$$\therefore \quad \omega^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}+3i^2}{4} = \frac{1-2i\sqrt{3}+3(-1)}{4} \quad (\because i^2=-1)$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{2\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Now} \quad \left(\omega^2\right)^2 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+2i\sqrt{3}+3i^2}{4} = \frac{1+2i\sqrt{3}+3(-1)}{4} \quad (\because i^2=-1)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega^2\right)^2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega^2\right)^2 = \omega.$$

انهي ڪري ايڪي جوهر هڪ منجهيل ٽيئون مول ٻيئي جو چورس آهي.
تصديق ٿي.

(ii) ايڪي جي سيني ٽيئن مولن جو جوڙ ٻڙي. يعني $1+\omega+\omega^2=0$

تصديق:

L.H.S $1+\omega+\omega^2$

جڏهن ته $\left[\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ۽ } \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right]$

$$= 1+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$= \frac{2-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0 = \text{R.H.S}$$

تصديق ٿي.

(iii) ايڪي جي سيني ٽيئن مولن جي ضرب اُپٽ 1 آهي يعني $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 = 1$

تصديق:

L.H.S $\omega \cdot \omega^2 \cdot 1$

$$= 1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1-i^2 3}{4}$$

$$= \frac{1-(-1)(3)}{4}, \qquad (\because i^2=-1)$$

$$= \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$= \text{R.H.S}$$

يعني $1 \cdot \omega \cdot \omega^2 = 1$

يا $\omega^3 = 1$

تصديق ٿي.

KARACHIEDU.COM

(iv) ايڪي جو هر هڪ منجهيل ٽيون مول ٻيئي جو اُبتڙ آهي

تصديق اسان کي خبر آهي ته $\omega^3 = 1,$

$$\Rightarrow \quad \omega \cdot \omega^2 = 1,$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\omega^2} \quad \text{يا} \quad \omega^2 = \frac{1}{\omega}$$

اهڙي طرح ايڪي جو هر هڪ منجهيل ٽيئون مول ٻيئي جو اُبتڙ آهي.

(v) ω^3 جي هر هڪ سڄي سگهه، هڪ جي برابر ٿيندي.

$$\because \quad \omega^3 = 1,$$

$$\therefore \quad \left(\omega^3\right)^m = (1)^m = 1 \qquad \forall m \in Z.$$

$$\omega^{3m} = 1.$$

اهڙي طرح تصديق ڪئي ته ω^3 جي هر هڪ سڄي سگهه، هڪ جي برابر ٿيندي.

20.2. (iv) ايڪي جي ٽنئين مول جي خاصيتن جو استعمال ڪندي واسطو رکندڙ مسئلن کي حل ڪرڻ:

مثال 1: 27– جا سمورا ٽيئان مول لهو

حل: فرض ڪريو ته 27– جو ٽيون مول x آهي

$$\therefore \quad x = (-27)^{\frac{1}{3}} \quad \text{يعني}$$

$$x^3 = -27$$

$$\Rightarrow \quad x^3 + 27 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x)^3 + (3)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+3)\left(x^2 - 3x + 9\right) = 0, \qquad \left[a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^3\right)\right]$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3,$$

$$x^2 - 3x + 9 = 0 \qquad \text{يا}$$

هتي $c = 9$ ۽ $b = -3, a = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-1 \times 27}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{i^2 \times 27}}{2} \qquad \left(\because i^2 = -1\right)$$

KARACHIEDU.COM

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-(-3)\pm i3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-3\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-3\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{2} \quad \text{ءَ} \quad x=\frac{-3\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=-3\omega^2 \quad \text{ءَ} \quad x=-3\omega$$

انهي ڪري 27- جا سمورا ٽيئان مول -3، -3ω ءَ $-3\omega^2$ آهن

مثال 2: ثابت ڪري ڏيکاريو تہ

(a) $2+\omega=\frac{3}{2+\omega^2}$

(b) جزن تائين $2n=1$ جڏهن تہ $n\in N$ $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\ldots$

(a) حل:

$$L.H.S = 2+\omega$$

$$=\frac{(2+\omega)(2+\omega^2)}{(2+\omega^2)} \qquad \left(2+\omega^2\right) \text{ سان ضرب ءَ ونڊ ڪندي}$$

$$=\frac{4+2\omega+2\omega^2+\omega^3}{2+\omega^2}$$

$$=\frac{4+2(\omega+\omega^2)+1}{2+\omega^2} \qquad (\because \omega^3=1)$$

$$=\frac{5+(-1)}{2+\omega^2} \qquad (\because \omega+\omega^2=-1)$$

$$=\frac{5-2}{2+\omega^2}=\frac{3}{2+\omega^2}$$

ثابت ٿيو

(b)

$$L.H.S = (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\ldots \text{ جزن تائين } 2n \qquad \forall n\in N$$

$$=\left[(-\omega^2)(-\omega)\right]\left[(1+\omega^3\cdot\omega)(1+\omega^6\cdot\omega^2)\right]\ldots \text{ جزن تائين } n \qquad \begin{pmatrix}\because 1+\omega=-\omega^2\\ 1+\omega^2=-\omega\\ \omega^3=\omega^6=1\end{pmatrix}$$

$$=(\omega^3)\left[(1+\omega)(1+\omega^2)\right]\ldots \text{ جزن تائين } n$$

$$=(\omega^3)\left[(-\omega^2)(-\omega)\right]\ldots \text{ جزن تائين } n$$

$$=(\omega^3)(\omega^3)\ldots \text{ جزن تائين } n$$

$$=(1)(1)\ldots \text{ جزن تائين } n$$

$$=(1)^n=1.$$

انهي ڪري ثابت ٿيو

KARACHIEDU.COM

مثال 3: ثابت ڪريو تہ
ثابتي: $(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)=x^3+y^3+z^3-3xyz$,
جڏهن تہ ω ۽ ω^2 ايڪي جا منجهيل ٽئيان مول آهن.

$$\text{L.H.S} = (x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$$
$$= (x+y+z)\left[(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)\right]$$
$$= (x+y+z)\left[x^2+xy\omega^2+xz\omega+xy\omega+y^2\omega^3+yz\omega^2+xz\omega^2+yz\omega^4+z^2\omega^3\right]$$
$$= (x+y+z)\left[x^2+y^2(1)+z^2(1)+xy(\omega^2+\omega)+yz(\omega^2+\omega^4)+zx(\omega+\omega^2)\right]$$
$$= (x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2+xy(-1)+yz(-1)+zx(-1)\right],$$
$$= (x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right] \qquad (\because \omega^3=1, \omega^2+\omega=-1 \text{ ۽ } \omega^2+\omega^4=\omega+\omega^2=-1)$$
$$= x^3+y^3+z^3-3xyz.$$
$$= \text{R.H.S}$$
انهي ڪري ثابت ٿيو

مشق 20.2

1. هيٺين جا سمورا ٽيئان مول لهو
(i) 64 (ii) -125 (iii) 216

2. هيٺيان لهو
(i) $(1+\omega^2)^4$ (ii) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$
(iii) $(2+5\omega+2\omega^2)^6$ (iv) $(-1+\sqrt{-3})^4+(-1-\sqrt{-3})^4$

3. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ
(i) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)=(\omega+\omega^2)^4$
(ii) $(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)=a^3+b^3$
(iii) $(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-ab-ba-ca$
(iv) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^9+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^9-2=0$
(v) $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$

20.3. هڪ درجي مساوات جا اصل ۽ عددي مُنڊ

20.3. (i) هڪ درجي مساوات جي اصلن ۽ عددي مُنڊين جي وچ ۾ تعلق لهڻ

فرض ڪريو تہ مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جا اصل α ۽ β سان ظاهر ڪجن ٿا
تہ پوءِ $\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ۽ $\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore \quad \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a} \qquad (1)$$

$$\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \quad \text{ع}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\beta=\frac{(-b)^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a} \qquad (2)$$

تنهنڪري (1) ۽ (2) مان اسان کي هيٺيان مڪيہ تعلق ملیا

$$\text{اصلن جي جوڙ اُپت} = -\frac{x \text{ جو عددي مُنڊ}}{x^2 \text{ جو عددي منڊ}}$$

$$\text{اصلن جي ضرب اُپت} = \frac{\text{مستقل رقم}}{x^2 \text{ جو عددي منڊ}}$$

جيڪڏهن α ۽ β مساوات جا اصل آهن $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$
تہ پوءِ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad \text{۽} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

20.3. (ii) حل ڪرڻ ڪانسواءِ ڏنل ٻہ درجي مساوات جي اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت لھڻ.

مثال حل ڪرڻ ڪانسواءِ، هيٺين مساواتن مان هر هڪ جي اصلن جي جوڙ ۽ ضرب اُپت لھو

$$4x^2+6x+1=0 \quad \text{(i)} \qquad 3\left(5x^2+1\right)=17x \quad \text{(ii)}$$

حل (i):

$$4x^2+6x+1=0$$

هتي $a=4, b=6$ ۽ $c=1$

جيئن تہ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ۽ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

تنهنڪري $\alpha+\beta=-\frac{6}{4}$ ۽ $\alpha\beta=\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta=-\frac{3}{2} \quad \text{۽} \quad \alpha\beta=\frac{1}{6}$$

حل (ii):

$$3\left(5x^2+1\right)=17x$$

هتي

$$15x^2-17x+3=0$$

$a=15, b=-17$ ۽ $c=3$

جيئن تہ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ۽ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$$\alpha+\beta=-\left(\frac{-17}{15}\right) \quad \text{۽} \quad \alpha\beta=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

$$\alpha+\beta=\frac{17}{15} \quad \text{۽} \quad \alpha\beta=\frac{1}{5}$$

20.3. (iii) ڏنل ٻہ درجي مساوات ۾ شامل نامعلوم عددن جو ملهه لھڻ جڏهن

(a) اصلن جي جوڙ اُپت ۽ اصلن جي ضرب اُپت جي ڇڪ اُپت پاڻ ۾ برابر هجن.

(b) اصلن جي چورسن جي جوڙ اُپت، ڏنل عدد جي برابر هجي.

(c) اصل پاڻ ۾ ڏنل عدد جو فرق رکن.

KARACHIEDU.COM

(d) اصل ڏنل تعلق کي پورو ڪن (مثال طور تعلق $2\alpha+5\beta=7$, جڏهن ته α ۽ β مساوات جا اصل آهن)

(e) اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت ٻئي هڪ ڏنل عدد جي برابر هجن

(a) جڏهن اصلن جي جوڙ اُپت ۽ اصلن جي ضرب اُپت جي ڇڪ اُپت پاڻ ۾ برابر هجن

مثال: k جي قيمت لهو جيڪڏهن مساوات $6x^2-3kx+5=0$ جي اصلن جي جوڙ اُپت ۽ اصلن جي ضرب اُپت پاڻ ۾ برابر آهن

حل: فرض ڪريو ته مساوات $6x^2-3kx+5=0$ جا اصل α ۽ β آهن

هتي $a=6$ $b=-3$ ۽ $c=5$

هاڻي $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-3k)}{6}=\frac{3k}{6}$ ۽ $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{5}{6}$

سوال مطابق آهي ته

اصلن جي ضرب اُپت = اصلن جي جوڙ اُپت

يعني $\alpha+\beta=\alpha\beta$

$$\therefore \quad \frac{3k}{6}=\frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad k=\frac{5}{3}$$

مثال: p جي قيمت لهو جيڪڏهن مساوات $2x^2+(8-4p)x+3p=0$ جي اصلن جي جوڙ اُپت، اصلن جي ضرب اُپت جي ٻيڻ جي برابر آهي.

حل: فرض ڪريو ته مساوات $2x^2+(8-4p)x+3p=0$ جا اصل α ۽ β آهن

هتي $a=2$، $b=8-4p$ ۽ $c=3p$

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(8-4p)}{2}=2p-4$ ۽ $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{3p}{2}$

سوال ۾ ڏنل شرط موجب، اسان وٽ آهي

$$\alpha+\beta=2(\alpha\beta)$$

يعني $2p-4=2\left(\frac{3p}{2}\right)=3p$

$$\Rightarrow \quad p=-4.$$

(b) جڏهن اصلن جي چورسن جي جوڙ اُپت ڏنل عدد جي برابر هجي:

مثال: k جو ملهه لهو جيڪڏهن مساوات، $2x^2+3kx+k^2=0$ جي اصلن جي چورسن جي جوڙ اُپت 5 جي برابر آهي

حل: فرض ڪريو ته مساوات $2x^2+3kx+k^2=0$ جا اصل α ۽ β آهن

هتي $a=2$، $b=3k$ ۽ $c=k^2$

هاڻي $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{3k}{2}$ ۽ $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{k^2}{2}$

ڏنل شرط موجب

$$\alpha^2+\beta^2=5$$

KARACHIEDU.COM

$$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5 \qquad \because [a^2+b^2=(a+b)^2-2ab]$$
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{-3k}{2}\right)^2-2\left(\frac{k^2}{2}\right)=5$$
$$\Rightarrow \quad \frac{9k^2}{4}-k^2=5$$
$$\Rightarrow \quad \frac{9k^2-4k^2}{4}=5$$
$$\Rightarrow \quad 5k^2=5\times 4$$
$$\Rightarrow \quad k^2=4$$
$$\Rightarrow \quad k=\pm 2$$

(c) جڏهن اصل ڏنل عدد جو فرق رکن:

مثال: p جو ملهه لهو جيکڏهن مساوات $x^2-px+8=0$ جا اصل 2 جو فرق رکن ٿا.

حل: فرض ڪريو ته مساوات $x^2-px+8=0$ جا اصل α ۽ β آهن.

هتي $a=1$ ، $b=-p$ ۽ $c=8$

هاڻي $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-p)}{1}=p$ ۽ $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{8}{1}=8$

ڏنل شرط موجب

$$\alpha-\beta=2$$

ٻنهي پاسن جو چورس ڪرڻ سان اسان کي مليو

$$(\alpha-\beta)^2=4$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4 \qquad \left[\because (a-b)^2=(a+b)^2-4ab\right]$$
$$\Rightarrow \quad p^2-4(8)=4$$
$$\Rightarrow \quad p^2-32=4$$
$$\Rightarrow \quad p^2=36$$
$$\Rightarrow \quad p=\pm 6$$

(d) جڏهن اصل ڏنل تعلق کي پورو ڪن (مثال طور تعلق $2\alpha+5\beta=7$ جڏهن β ۽ α مساوات جا اصل آهن)

مثال: k جو ملهه لهو جيکڏهن مساوات $x^2-5x+k=0$ جا اصل β ۽ α تعلق $2\alpha+5\beta=7$ کي پورو ڪن ٿا.

حل: ڏنل مساوات $x^2-5x+k=0$ ۾

هتي $a=1$ ، $b=-5$ ۽ $c=k$

فرض ڪريو ته ڏنل مساوات جا اصل α ۽ β آهن

جيئن ته $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ۽ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ $\because$

تنهنڪري $\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{(-5)}{1}=5$

$$\Rightarrow \quad \alpha=5-\beta \qquad \cdots (i)$$

$$\alpha\beta=\frac{k}{1}=k$$

KARACHIEDU.COM

$\Rightarrow \quad \alpha\beta = k \quad \cdots$ (ii)

ءاسان کي مليل آهي تہ

$\because \quad 2\alpha + 5\beta = 7$

$\therefore \quad 2(5-\beta)+5\beta = 7$ يعني تہ

$\Rightarrow \quad 10-2\beta+5\beta = 7$

$\Rightarrow \quad 3\beta = -3$

$\Rightarrow \quad \beta = -1$

$\therefore$ مساوات (i) مان اسان وٺ آهي

$\alpha = 5-(-1) = 5+1 = 6,$

k جي قيمت لهڻ لاءِ اسين مساوات (ii) ۾ α ۽ β جون قيمتون رکنداسين ۽ اسانکي مليو:

$k = 6(-1) = -6$

$\Rightarrow \quad k = -6$

(e) جيڪڏهن اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت ٻئي هڪ ڏنل عدد جي برابر هجن:

مثال: k جو ملهه لهو جيڪڏهن مساوات $6x^2 - 3kx + 5 = 0$ ۾ اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت ٻئي $\frac{5}{6}$ جي برابر آهن

حل: فرض ڪريو تہ مساوات $6x^2 - 3kx + 5 = 0,$ جا اصل α ۽ β آهن

تہ پوءِ

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad -\frac{(-3k)}{6} = \frac{k}{2} \quad \cdots$ (i)

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{6}$ ۽ $\cdots$ (ii)

ڏنل شرط موجب، اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت $\frac{5}{6}$ جي برابر آهن

يعني تہ $\alpha + \beta = \alpha\beta = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \quad \frac{k}{2} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \quad k = \frac{5}{3}$

انهي ڪري $k = \frac{5}{3}$ تي ڏنل مساوات جي اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت ٻئي $\frac{5}{6}$ جي برابر آهن.

KARACHIEDU.COM

مشق 20.3

1. حل ڪرڻ ڪانسواءِ، هيٺ ڏنل هر هڪ ۾ درجي مساوات جي اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت لهو.

(i) $x^2 - x - 1 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x - 4 = 0$

(iii) $x^2 - \frac{3}{4}a^2 = ax$ (iv) $7x^2 - 5kx + 7k = 0$

2. m جو ملهه لهو جيڪڏهن

(i) مساوات $x^2 + (3m-7)x + 5m = 0$ جي اصلن جي جوڙ اُپت ان جي ضرب اُپت جو $\frac{3}{2}$ ييرا آهي

(ii) مساوات $2x^2 - 3x + 4m = 0$ جي اصلن جي جوڙ اُپت ان جي ضرب اُپت جو 6 ييرا آهي.

3. p جي قيمت لهو جيڪڏهن

(i) مساوات $x^2 - px + 6 = 0$ جي اصلن جي چورسن جي جوڙ اُپت 13. جي برابر آهي.

(ii) مساوات $x^2 - 2px + (2p-3) = 0$ جي اصلن جي چورسن جي جوڙ اُپت 6 آهي

4. m جو ملهه لهو جيڪڏهن

(i) مساوات $x^2 - 5x + 2m = 0$ جا اصل پاڻ ۾ 1 جو فرق رکن ٿا.

(ii) مساوات $x^2 - 8x + m + 2 = 0$ جا اصل پاڻ ۾ 2 جو فرق رکن ٿا.

5. k جو ملهه لهو جيڪڏهن

(i) مساوات $5x^2 - 7x + k - 2 = 0$ جا اصل تعلق $2\alpha + 5\beta = 1$ کي پورو ڪن ٿا.

(ii) مساوات $3x^2 - 2x + 7k + 2 = 0$ جا اصل تعلق $7\alpha - 3\beta = 18$. کي پورو ڪن ٿا.

6. p جو ملهه لهو جيڪڏهن هيٺين ۾ درجي مساواتن جي اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت ٻئي ڏنل عدد 4 جي برابر آهن.

(i) $(2p+3)x^2 + (7p-5)x + (3p-10) = 0$

(ii) $4x^2 - (5p+3)x + 17 - 9p = 0$

20.4 هڪ ۾ درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل (Symmetric function of roots of quadratic equation):

20.4.(i) هڪ ۾ درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل بيان ڪرڻ:

فرض ڪريو ته α ۽ β هڪ ۾ درجي مساوات جا اصل آهن ته پوءِ α ۽ β ۾ هڪ عمل f کي همشڪلي عمل (Symmetric Function) ڪوٺبو جيڪڏهن α ۽ β کي بدلائڻ سان اهو عمل ساڳيو رهي. يعني ته $f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$. $\alpha + \beta$ ۽ $\alpha\beta$ کي α ۽ β جا بنيادي همشڪلي عمل چئبو آهي.

اها ڳالهه ڏيان ۾ رکجي ته، $\alpha - \beta \neq \beta - \alpha$, انهيءَ لاءِ $\alpha - \beta$ اصلن جو همشڪلي عمل نه آهي.

$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ۽ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ جو استعمال ڪندي، اسين ۾ درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل لهي سگهون ٿا جيڪو مساوات جي عددي منڊن جي صورت ۾ هوندو

همشڪلي عمل $\alpha + \beta$ ۽ $\alpha\beta$ جي صورت ۾ ظاهر ڪري سگهجن ٿا.

همشڪلي عمل جو مُلهه لهڻ لاءِ اسين ان عمل کي $\alpha+\beta$ ۽ $\alpha\beta$ جي صورت ۾ ظاهر ڪنداسين.

همشڪلي عملن جون مثالون هيٺين ريت آهن

- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
- $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]^2-2(\alpha\beta)^2$

مثال: $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ جو ملهه لهو جيڪڏهن $\alpha=2$ ۽ $\beta=3$ ۽ ثابت ڪري ڏيکاريو ته اهو α ۽ β جو همشڪلي عمل آهي. جڏهن ته α ۽ β ۾ درجي مساوات جا اصل آهن.

حل: فرض ڪريو ته $f(\alpha,\beta)=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$,

ڏنل آهي ته $\alpha=2$ ۽ $\beta=3$

$\therefore \quad f(2,3)=2^2+3^2+(2)(3)=4+9+6=19$

هاڻي

$$f(\beta,\alpha)=\beta^2+\alpha^2+\beta\alpha=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=f(\alpha,\beta)$$

جيئن ته $\because \quad f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$

تنهنڪري f همشڪلي عمل آهي $\therefore$

انهيءَ ڪري ڏنل اظهار اصلن α ۽ β جو همشڪلي عمل آهي.

ثابت ٿيو

4 20 (ii) همشڪلي عمل کي گراف وسيلي ظاهر ڪرڻ:

آرٽيڪل 20.4.1 ۾ اسين اڳيئي ٻه درجي مساوات جي اصلن جا همشڪلي عمل بيان ڪري چڪا آهيون، مثال طور $\alpha+\beta,\ \alpha\beta,\ \alpha^3+\beta^3,\ 2\alpha\beta,\ \alpha^2+\beta^2,\ \alpha^3+\beta^3$ وغيره

جڏهن ڪو همشڪلي عمل (اظهار) کي مستقل $c\in\mathbb{R}$ جي برابر ڪيو وڃي ته اسان کي همشڪلي مساوات ملندي جيڪا اسان هن ريت لکنداسين $f(\alpha,\beta)=c.$ هر مساوات کي گراف ۾ ٿبڻ جي سيٽ طور ظاهر ڪري سگهجي ٿو، جنهن کي $G(f)$ سان ظاهر ڪبو آهي ۽ هن ريت بيان ڪبو

$$G(f)=\{(\alpha,\beta)\mid f(\alpha,\beta)=c\wedge\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

مثال 1: مساوات $\alpha^2+\beta^2=9$ کي گراف واري صورت ۾ ظاهر ڪريو ۽ ان جو گراف ناهيو

حل: ڏنل آهي ته $\alpha^2+\beta^2=9$

$$\Rightarrow \quad \beta=\pm\sqrt{9-\alpha^2}$$

گراف ڪڍڻ لاءِ اسين ڪجهه ٽيڪا ڪٽنداسين. α جون مختلف قيمتون لڳائيندي. اسان کي β جون واسطيدار قيمتون ملن ٿيون.

α	0	1	2	3	-1	-2	-3
β	±3	±2.828	±2.2360	0	±2.828	±2.2360	0

اهڙي طرح همشڪلي عمل $\alpha^2+\beta^2$ هڪ گول کي ظاهر ڪري ٿو جڏهن اهو مستقل $c=9$ جي برابر ڪيو ويو

SINDHACHIEDU.COM

20.4. (iii) ٻه درجي مساوات جي اصلن جو همشڪلي عمل ان جي عددي منڊين جي صورت ۾ لکڻ

فرض ڪريو ته مساوات

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0 \quad \text{(i)}$$

جا اصل α ۽ β آهن ته پوءِ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad \cdots \text{(ii)}$$

۽

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \quad \cdots \text{(iii)}$$

مٿيون مساواتون (ii) ۽ (iii)، (iv) ٻه درجي مساوات (i) جي اصلن جا بنيادي همشڪلي عمل ظاهر ڪن ٿيون

مثال: جيڪڏهن مساوات $x^2-px+q=0$, جا اصل α ۽ β آهن ته پوءِ هيٺين جو ملهه لهو

(i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

حل: ڏنل آهي ته مساوات $x^2-px+q=0$ جا اصل α ۽ β آهن.

هتي $a=1, b=-p$ ۽ $c=q$

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{(-p)}{1}=p$$

۽

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{q}{1}=q$$

هاڻي

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \quad \cdots \text{(i)}$$

$$=(p)^2-2q \qquad (\because \alpha\beta=q \text{ ۽ } \alpha+\beta=p)$$

$$=p^2-2q$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \quad \cdots \text{(ii)}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{p^2-2q}{q} \qquad (\because \alpha\beta=q \text{ ۽ } \alpha+\beta=p)$$

KARACHIEDU.COM

مشق 20.4

1. جيڪڏهن α ۽ β هڪ ٻ درجي مساوات جا اصل آهن تہ پوءِ هيٺين همشڪلي عملن کي $\alpha+\beta$ ۽ $\alpha\beta$. جي صورت ۾ لکو

(i) $(\alpha-\beta)^2$ (ii) $(\alpha+\beta)^3$ (iii) $\alpha^2\beta^{-1}+\beta^2\alpha^{-1}$

(iv) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3$ (v) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$ (vi) $\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)^2$

2. جيڪڏهن مساوات $2x^2-3x+7=0$ جا اصل α ۽ β آهن تہ پوءِ هيٺين همشڪلي عملن جون قيمتون لهو.

(i) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta^2}+\frac{\beta}{\alpha^2}$ (iii) $\frac{1}{a\alpha+1}+\frac{1}{a\beta+1}$

3. جيڪڏهن مساوات $px^2+qx+q=0, p\neq 0$ جا اصل α ۽ β آهن تہ پوءِ $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ جو مُلهہ لهو.

4. همشڪلي مساوات $\alpha+\beta=8$ کي گراف وسيلي ظاهر ڪريو جڏهن تہ α ۽ β ٻ درجي مساوات جا اصل آهن ۽ گراف پڻ ٺاهيو.

20.5 ٻ درجي مساواتن جي جوڙجڪ

20.5.(i) ڏنل اصلن جي ٻ درجي مساوات لاءِ فارمولو

x^2- (اصلن جي جوڙ اُپت) $x+$ (اصلن جي ضرب اُپت) $=0$ ٺاهڻ:

فرض ڪريو تہ مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جا اصل α ۽ β آهن

تہ پوءِ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ۽ $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

هاڻي مساوات (i) کي هيٺين ريت ٻيهر لکو

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \text{بشرطيڪ} \quad a\neq 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-(\text{اصلن جي جوڙ اُپت})x+(\text{اصلن جي ضرب اُپت})=0$$

جڏهن تہ $\frac{-b}{a}$ ۽ $\frac{c}{a}$ ترتيبوار اصلن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت کي ظاهر ڪن ٿا.

هاڻي ان کي ٺيڪ هيٺين ريت لکي سگهون ٿا

$x^2-Sx+P=0$ جڏهن تہ P ۽ S ڏنل ٻ درجي مساوات جي اصلن جي ترتيب وار جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت کي ظاهر ڪن ٿا.

مثال: ٻ درجي مساوات ٺاهيو جنهن جا اصل آهن:

(i) $-\frac{4}{5}, \frac{3}{7}$ (ii) $7\pm 2\sqrt{5}$

KARACHIEDU

حل (i): فرض ڪريو تہ $\alpha = -\frac{4}{5}$ ۽ $\beta = \frac{3}{7}$

$$\therefore \quad S = \alpha + \beta = -\frac{4}{5} + \frac{3}{7} = \frac{-28+15}{35} = \frac{-13}{35}$$

$$P = \alpha\beta = \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{-12}{35} \quad \text{۽}$$

جڏهن اصل مليل هجن تہ مساوات ٿيندي:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$\text{i.e,} \quad x^2 - \left(\frac{-13}{35}\right)x + \left(\frac{-12}{35}\right) = 0 \quad \text{يعني تہ}$$

$$\Rightarrow \quad 35x^2 + 13x - 12 = 0.$$

اها گهربل مساوات آهي.

حل (ii): فرض ڪريو تہ $\alpha = 7 + 2\sqrt{5}$ ۽ $\beta = 7 - 2\sqrt{5}$

$$\therefore \quad S = \alpha + \beta = 7 + 2\sqrt{5} + 7 - 2\sqrt{5} = 14$$

$$P = \alpha\beta = \left(7 + 2\sqrt{5}\right)\left(7 - 2\sqrt{5}\right) = 49 - 20 = 29 \quad \text{۽}$$

جڏهن اصل مليل هجن تہ مساوات ٿيندي:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 14x + 29 = 0$$

اها گهربل مساوات آهي.

20.5.(ii) هيٺ درجي مساوات ٺاهيو جنهن جا اصل هيٺيان آهن:

(a) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (b) α^2, β^2 (c) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ (d) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (e) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},$

جڏهن تہ α, β هڪ هيٺ درجي مساوات جا اصل آهن.

مثال: جيڪڏهن مساوات $x^2 - 5x + 6 = 0$ جا اصل α, β آهن تہ پوءِ هڪ مساوات ٺاهيو جنهن جا اصل هيٺ ڏنل آهن.

(i) $2\alpha+1, 2\beta+1$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

حل (i): جيئن تہ مساوات $x^2 - 5x + 6 = 0$ جا اصل α, β آهن ۽ هتي $a = 1, b = -5$ ۽ $c = 6$ تنهنڪري

$$\therefore \quad \alpha\beta = -\frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6, \text{ ۽ } \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{1} = 5$$

گهربل مساوات جا اصل $2\alpha+1$ ۽ $2\beta+1$ آهن.

هاڻي اسين انهن جي جوڙ اُپت ۽ ضرب اُپت لهنداسين.

KARACHIEDU.COM

$$S=(2\alpha+1)+(2\beta+1)$$

$\Rightarrow$ $S=2(\alpha+\beta)+2$

$\Rightarrow$ $S=2(5)+2$ $\quad(\because\ \alpha+\beta=5)$

$\Rightarrow$ $S=10+2=12$

$P=(2\alpha+1)(2\beta+1)$ هاڻي

$P=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$

$\Rightarrow$ $P=4(6)+2(5)+1$ $\quad(\because \alpha\beta=6$ ۽ $\alpha+\beta=5)$

$\Rightarrow$ $P=24+10+1=35$

گهربل مساوات آهي $x^2+12x+35=0$.

حل(ii): گهربل مساوات جا اصل α^2 ۽ β^2 آهن.

$S=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(5)^2-2(6)=25-12=13,\ (\because \alpha\beta=6$ ۽ $\alpha+\beta=5)$

$P=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(6)^2=36$ ۽

$\because$ $x^2-Sx+P=0$

$\therefore$ $x^2-13x+36=0,$

اها گهربل مساوات آهي

حل(iii): گهربل مساوات جا اصل $\frac{1}{\alpha}$ ۽ $\frac{1}{\beta}$ آهن.

$S=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{6},$ $\quad(\because \alpha\beta=6$ ۽ $\alpha+\beta=5)$

$P=\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{6}$ ۽

$x^2-Sx+P=0$

$\therefore$ $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$

$\Rightarrow$ $6x^2-5x+1=0,$

اها گهربل مساوات آهي.

حل(iv): گهربل مساوات جا اصل $\frac{\alpha}{\beta}$ ۽ $\frac{\beta}{\alpha}$ آهن.

$S=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$ $\quad(\because \alpha\beta=6$ ۽ $\alpha+\beta=5)$

$=\frac{25-2(6)}{6}=\frac{25-12}{6}=\frac{13}{6},$

$P=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{6}=1$ ۽

$x^2-Sx+P=0$

$\therefore$ $x^2-\frac{13}{6}x+1=0$

$\Rightarrow$ $6x^2-13x+6=0,$

اها گهربل مساوات آهي.

KARACHIEDU.COM

حل (V): گهربل مساوات جا اصل $\alpha+\beta$ ۽ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ آهن.

$$S=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)$$
$$=5\left(1+\frac{1}{6}\right)=5\left(\frac{7}{6}\right)=\frac{35}{6} \qquad (\because \alpha\beta=6 \text{ ۽ } \alpha+\beta=5)$$
$$P=(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}=\frac{25}{6} \qquad (\because \alpha\beta=6 \text{ ۽ } \alpha+\beta=5)$$

$$x^2-Sx+P=0$$
$$\therefore \quad x^2-\frac{35}{6}x+\frac{25}{6}=0$$
$$\Rightarrow \quad 6x^2-35x+25=0,$$

اها گهربل مساوات آهي.

20.5.(iii) α، β جون قيمتون لهڻ جڏهن هڪ مساوات جا اصل $\frac{1}{\alpha}$ ۽ $\frac{1}{\beta}$ آهن.

مثال: جيڪڏهن مساوات $x^2-6x+8=0$ جا اصل $\frac{1}{\alpha}$ ۽ $\frac{1}{\beta}$ آهن تہ پوءِ α ۽ β جون قيمتون لهو.

حل: جيئن تہ مساوات $x^2-6x+8=0$ جا اصل $\frac{1}{\alpha}$ ۽ $\frac{1}{\beta}$ آهن.

هتي $a=1$ ، $b=-6$ ۽ $c=8$

تنهنڪري $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{a}=-\left(\frac{-6}{1}\right)=6,$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6$$
$$\Rightarrow \quad \alpha+\beta=6\alpha\beta \qquad \ldots \text{(i)}$$

۽ $\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{c}{a}=\frac{8}{1}=8$

$$\Rightarrow \quad \alpha\beta=\frac{1}{8} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

مساوات (i) مان، اسان کي ملیو.

$$\beta=6\left(\frac{1}{8}\right)-\alpha=\frac{3-4\alpha}{4} \qquad \ldots \text{(iii)}$$

KARACHIEDU.COM

مساوات (ii) ۾ β جي قيمت رکڻ سان اسان کي مليو.

$$\alpha\left(\frac{3-4\alpha}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8\alpha}{4}(3-4\alpha)-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha(3-4\alpha)-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 6\alpha-8\alpha^2-1=0$$

$$\Rightarrow \quad 8\alpha^2-6\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow \quad 8\alpha^2-4\alpha-2\alpha+1=0$$

$$\Rightarrow \quad 4\alpha(2\alpha-1)-1(2\alpha-1)=0$$

$$\Rightarrow \quad (2\alpha-1)(4\alpha-1)=0$$

$$2\alpha-1=0 \qquad \text{يا} \qquad 4\alpha-1=0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha=\frac{1}{2} \qquad \text{يا} \qquad \alpha=\frac{1}{4},$$

تہ پوءِ مساوات (iii) مان اسان کي ملي:

$$\beta=\frac{3-4\left(\frac{1}{2}\right)}{4}=\frac{1}{4} \qquad \text{يا} \qquad \beta=\frac{3-4\left(\frac{1}{4}\right)}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$\beta=\frac{1}{2}$ ۽ $\alpha=\frac{1}{4}$ يا $\beta=\frac{1}{4}$ ۽ $\alpha=\frac{1}{2}$ لهي ٿ ڪري

مشق 20.5

1. مساواتون ناهيو جن جا اصل آهن:

(i) $2,-3$ (ii) ω,ω^2 (iii) $2+i,2-i$ (iv) $2\sqrt{2},-2\sqrt{2}$

2. جيڪڏهن مساوات $6x^2-3x+1=0$ جا اصل α ۽ β آهن تہ پوءِ اُهي مساواتون ناهيو جن جا اصل هيٺ ڏنل آهن.

(i) $2\alpha+1,2\beta+1$ (ii) α^2,β^2 (iii) $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$

(iv) $\frac{\alpha}{\beta},\frac{\beta}{\alpha}$ (v) $\alpha+\beta,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

3. أها مساوات لهو جنهن جا اصل ڏنل مساوات $px^2-qx+r=0, p\neq 0$ جي اصلن جا اُبتڙ هجن.

4. أها مساوات لهو جنهن جا اصل ڏنل مساوات $x^2-px+q=0$ جي اصلن جي ٻيڻ جي برابر هجن.

5. أها مساوات لهو جنهن جا اصل ڏنل مساوات $px^2+qx+r=0$ جي اصلن کان 2 وڌيڪ هجن.

6. أها شرط لهو جڏهن مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جو هڪ اصل

(i) ٻيئي جو ٽيٽو هجي. (iii) ٻيئي جو جمعي ابتڙ هجي.

(ii) ٻيئي جو چورس هجي. (iv) ٻيئي جو ضربي ابتڙ هجي.

SINDHEDU.COM

20.6 هن درجي صورت ۾ ايندڙ وڌن درجن واريون مساواتون:

20.6.(a) ڪعبي يا ٽي درجي مساوات حل ڪرڻ جڏهن مساوات جو هڪ اصل مليل هجي.

فرض ڪريو ته $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ هڪ ڪعبي مساوات آهي، جنهن جو هڪ اصل α آهي.

فرض ڪريو ته $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$

۽ فرض ڪريو ته $f(x)=0$ جو هڪ اصل α آهي ته پوءِ

$f(x)=(x-\alpha)\cdot f_1(x)$ جڏهن ته هڪ $f_1(x)$ هڪ هن درجي اظهار آهي.

مثال: $x^3-6x^2+11x-6=0$ کي حل ڪريو جيڪڏهن ان مساوات جو هڪ اصل 1 آهي.

حل: $x^3-6x^2+11x-6=0$

اهو ڏنل آهي ته هڪ اصل 1 آهي.

يعني $x=1$ هڪ ضرب ڏيندڙ جُزو آهي.

مصنوعي ورهاست واري طريقي موجب

1	1	−6	11	−6
	↓	1	−5	6
	1	−5	6	0 = پاڇي

اهڙي طرح اسان وٽ هڪ هن درجي مساوات هيٺين ريت آهي.

$$x^2-5x+6=0$$
$$\Rightarrow\quad x^2-2x-3x+6=0$$
$$\Rightarrow\quad x(x-2)-3(x-2)=0$$
$$\Rightarrow\quad (x-2)(x-3)=0$$
$$\text{i.e,}\quad x-2=0 \quad \text{يا} \quad x-3=0$$
$$\Rightarrow\quad x=2 \quad \text{يا} \quad x=3$$

تنهنڪري حل سيٽ $=\{1,2,3\}$

20.6.(b) چو درجي مساوات کي حل ڪرڻ جيڪڏهن مساوات جا هن حقيقي اصل مليل هجن.

فرض ڪريوته $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0, a_0\neq 0$ هڪ چو درجي مساوات آهي ۽ ان جا هن حقيقي اصل α ۽ β آهن.

جيڪڏهن α ۽ β، $f(x)=0$ جا هن اصل آهن ته پوءِ

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdot f_1(x)$$

جڏهن ته $f_1(x)$ هن درجي اظهار آهي.

مثال: چو درجي مساوات $x^4-9x^3+19x^2+9x-20=0$ جا باقي رهيل اصل لهو جيڪڏهن هن اصل 5 ۽ 1 آهن.

حل: ڏنل مساوات $x^4-9x^3+19x^2+9x-20=0$ آهي، جنهن جا ڏنل اصل 1 ۽ 5 آهن يعني ته ضرب ڏيندڙ جُزا 5 ۽ 1 آهن.

مصنوعي ورهاست واري طريقي موجب

اسان وٽ آهي.

5	1	−9	19	9	−20
	↓	5	−20	−5	20
1	1	−4	−1	4	0 = پاڇي
	↓	1	−3	−4	
	1	−3	−4	0 = پاڇي	

اهڙي طرح اسان وٽ هن درجي مساوات هيٺين ريت آهي.

$$x^2-3x-4=0$$
$$\Rightarrow\quad x^2-4x+x-4=0$$
$$\Rightarrow\quad x(x-4)+1(x-4)=0$$
$$\Rightarrow\quad (x-4)(x+1)=0$$

يعني ته $x-4=0$ يا $x+1=0$

$$\Rightarrow\quad x=4 \quad \Rightarrow\quad x=-1$$

تنهنڪري باقي رهيل اصل 4 ۽ -1 آهن.

KARACHIEDU.COM

مشق 20.6

1. هيٺين ڪعبي مساواتن جا باقي رهيل ٻه اصل لهو جيڪڏهن هڪ اصل مليل آهي.

(i) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ ۽ $x = 1$

(ii) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ ۽ $x = 3$

(iii) $x^3 - 28x + 48 = 0$ ۽ $x = 2$

2. هيٺين چو درجي مساواتن جا باقي رهيل اصل لهو جيڪڏهن ان جا ٻه اصل ڏنل آهن.

(i) $12x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$ ۽ $x = 1, -\frac{1}{2}$

(ii) $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ ۽ $x = 1, -1$

(iii) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ ۽ $x = 3, -4$

3. m جو ملهه لهو ۽ مساوات $2x^3 - 3mx^2 + 9 = 0$ جا باقي رهيل اصل ٻه لهو جيڪڏهن ان جو هڪ اصل 3 آهي.

4. جيڪڏهن مساوات $x^3 - 3ax^2 - x + 6 = 0$ جو هڪ اصل 1 آهي تہ پوءِ a جي قيمت لهو. ان جا باقي رهيل اصل پڻ لهو.

5. a ۽ b جون قيمتون لهو جيڪڏهن مساوات $x^4 - ax^2 + bx + 252 = 0$ جا اصل 6 ۽ -2 آهن، ان جا باقي رهيل اصل پڻ لهو.

20.7 همزاد مساواتون (Simultaneous Equations):

ٻہ يا ٻہ کان وڌيڪ مساواتون گڏجي همزاد مساواتن جو مجموعو ناهين ٿيون، ٻن بدلجندڙن جون قيمتون لهڻ لاءِ اسان کي مساواتن جو جوڙو کپي ٿو.

انهن سيني ترتيب ڏنل جوڙن (x, y) جو سيٽ جيکي مساواتن جي مجموعي کي پورو کن ٿا، ان کي مجموعي جو حل سيٽ چئبو آهي.

20.7.(i)(a) ٻن بدلجندڙن ۾ ٻن مساواتن جي مجموعي کي حل ڪرڻ جڏهن هڪ مساوات هڪ درجي ۽ ٻي مساوات ٻه درجي هجي.

مساواتن جي مجموعي کي حل ڪرڻ جو مڪمل طريقو هيٺين مثالن سان واضح بيان ڪجي ٿو. جڏهن هڪ مساوات هڪ درجي ۽ ٻي مساوات ٻه درجي هجي.

مثال 1: مساواتن $2x + y = 10$ ۽ $4x^2 + y^2 = 68$ جي مجموعي کي حل ڪريو.

حل:

$$2x + y = 10 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$4x^2 + y^2 = 68 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$ ۽

مساوات (i) مان اسان کي ملیو.

$$y = 10 - 2x \quad \text{(iii)}$$

هاڻ y جي رقم مساوات (ii) ۾ رکڻ سان اسان کي ملیو:

$$4x^2 + (10 - 2x)^2 = 68$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 100 - 40x + 4x^2 - 68 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 8x^2 - 40x + 32 = 0$$

KARACHI

$\Rightarrow \quad x^2-5x+4=0$

$\Rightarrow \quad x^2-4x-x+4=0$

$\Rightarrow \quad (x-4)(x-1)=0$

$\Rightarrow \quad x-4=0 \quad$ يا $\quad x-1=0$

$\Rightarrow \quad x=4 \quad$ يا $\quad x=1$

مساوات (iii) ۾ x جون اهي قيمتون رکڻ سان

جڏهن $x=4$ تہ پوءِ $y=10-2(4)=2$

جڏهن $x=1$ تہ پوءِ $y=10-2(1)=8$

اهڙي طرح حل سيٽ $\{(4,2),(1,8)\}$ آهي.

مثال 2: مساوات $3x-2y=7$ ۽ $xy=20$ جي مجموعي کي حل ڪريو.

حل:

$3x-2y=7 \quad \cdots$ (i)

$xy=20 \quad \cdots$ (ii) ۽

مساوات (i) مان اسان وٺ آهي.

$x=\frac{7+2y}{3} \quad$ (iii)

x جي اها رقم مساوات (ii) ۾ رکندي. اسان کي مليو.

$\left(\frac{7+2y}{3}\right)y=20$

$\Rightarrow \quad 7y+2y^2=20\times 3=60$

$\Rightarrow \quad 2y^2+7y-60=0$

$\Rightarrow \quad 2y^2-8y+15y-60=0$

$\Rightarrow \quad 2y(y-4)+15(y-4)=0$

$\Rightarrow \quad (y-4)(2y+15)=0$

$2y+15=0 \quad$ يا $\quad y-4=0 \quad$ يعني

$\Rightarrow \quad y=-\frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad y \quad 4$

y جون اهي قيمتون مساوات (iii) ۾ رکندي

جيڪڏهن $y=4$ تہ پوءِ $x=\frac{7+2(4)}{3}=\frac{15}{3}=5$

جيڪڏهن $y=-\frac{15}{2}$ تہ پوءِ $x=\frac{7+2\left(\frac{-15}{2}\right)}{3}=-\frac{8}{3}$

اهڙي طرح حل سيٽ $\left\{(5,4),\left(-\frac{8}{3},-\frac{15}{2}\right)\right\}$ آهي.

KARACHIEDU.COM

20.7.(i) (b) جڏهن ٻئي مساواتون ٻه درجي آهن:

اسين هيٺين مثالن جي ذريعي مساواتن جي ان مجموعي جي حل جي طريقي جي وضاحت ڪريون ٿا جنهن ۾ ٻئي مساواتون ٻه درجي آهن.

مثال 3: مساواتن $x^2+y^2=4$ ۽ $2x^2-y^2=8$ جي مجموعي کي حل ڪريو.

حل:

$$x^2+y^2=4 \quad \cdots \text{(i)}$$
$$2x^2-y^2=8 \quad \cdots \text{(ii)}$$ ۽

y^2 کي خارج ڪرڻ لاءِ، اسين مساواتن (i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪريون ٿا ۽ اسان کي ملي ٿو.

$$\therefore \quad 3x^2=12$$
$$\Rightarrow \quad x^2=4$$
$$\Rightarrow \quad x=\pm 2,$$

$\therefore$ مساوات (i) ۾ $x=\pm 2$ جو استعمال ڪندي اسان کي ملي ٿو.

$(2)^2+y^2=4$	$(-2)^2+y^2=4$
$\Rightarrow \quad 4+y^2=4$	$\Rightarrow \quad 4+y^2=4$
$\Rightarrow \quad y^2=4-4=0$	$\Rightarrow \quad y^2=4-4=0$
$\Rightarrow \quad y=0$	$\Rightarrow \quad y=0$

اهڙي طرح $\{(-2,0),(2,0)\}$ حل سيٽ آهي.

مثال 4: مساواتن $x^2+y^2=13$ ۽ $xy=6$ جي مجموعي کي حل ڪريو.

حل:

$$x^2+y^2=13 \quad \cdots \text{(i)}$$
$$xy=6 \quad \cdots \text{(ii)}$$ ۽

ان قسمن جي مساواتن مان اسان مستقل رقم کي خارج ڪنداسين.

مساوات (i) کي 6 سان ۽ مساوات (ii) کي 13 سان ضرب ڪندي اسان حاصل ڪيو.

$$\therefore \quad 6x^2+6y^2=78 \quad \cdots \text{(iii)}$$
$$13xy=78 \quad \cdots \text{(iv)}$$ ۽

مساوات (iii) مان مساوات (iv) کي ڪٽ ڪندي اسان حاصل ڪيو.

$$6x^2-13xy+6y=0$$
$$\Rightarrow \quad 6x^2-9xy-4xy+6y^2=0$$
$$\Rightarrow \quad 3x(2x-3y)-2y(2x-3y)=0$$
$$2x-3y=0 \quad \text{يا} \quad 3x-2y=0$$
$$\Rightarrow \quad x=\frac{3y}{2} \quad \text{يا} \quad x=\frac{2y}{3}$$

KARACHIEDU.COM

اهڙي طرح اسان وٽ مساواتن جا ٻه جوڙا آهن.

$$\left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ x &= \frac{3y}{2} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

۽

$$\left.\begin{aligned} xy &= 6 \\ x &= \frac{2y}{3} \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

مجموعي (A) ۾

$$\left(\frac{3y}{2}\right)y = 6, \qquad \left(\because\ x = \frac{3y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 3y^2 = 2\times 6$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{2\times 6}{3} = 4$$

$$y = \pm 2$$

جڏهن $y = \pm 2$ ته پوءِ $x = \frac{3}{2}(\pm 2) = \pm 3$

مجموعي (B) ۾

$$\left(\frac{2y}{3}\right)\cdot y = 6 \qquad \left(\because\ x = \frac{2y}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2y^2 = 3\times 6$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{3\times 6}{2} = 9$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm 3,$$

جڏهن $y = \pm 3$ ته پوءِ $x = \frac{2}{3}(\pm 3) = \pm 2$

اهڙي طرح حل سيٽ آهي

$$\{(3,2),(-3,-2),(2,3),(-2,-3)\}.$$

20.7.(ii) ٻه درجي مساوات سان حل ٿيندڙ عام زندگي جا مسئلا حل ڪرڻ:

مثال 1: ٻه لاڳيتا يا سلسليوار واڌو سڃا عدد لهو، جنهن جي ضرب اپت 72 آهي.

حل: فرض ڪريو ته x ۽ $x+1$ ٻه لاڳيتا واڌو سڃا عدد آهن.

ڏنل شرط موجب

$$x(x+1) = 72$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x - 72 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+9)(x-8) = 0 \quad \text{(جُزن وسيلي)}$$

$$\Rightarrow \quad x+9 = 0 \quad \text{يا} \quad x-8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -9 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

منفي عدد $x = -9$ کي نظرانداز ڪندي.

گهربل لاڳيتا عدد 8 ۽ 9 آهن.

مثال 2: هڪ مستطيلي زمين جي ٽڪري جي ايراضي 320 چورس ميٽر آهي. زمين جي ٽڪري جي ويڪرائي ان جي ڊيگهه کان 4 ميٽر گهٽ آهي. زمين جي ٽڪري جي ڊيگهه ۽ ويڪرائي لهو.

حل: فرض ڪريو ته زمين جي ٽڪري جي ڊيگهه x آهي ته پوءِ ان جي ويڪر $x-4$ ٿيندي.

ڏنل آهي ته:

$$\text{زمين جي ٽڪري جي ايراضي} = 320m^2$$

$$\Rightarrow \quad x(x-4) = 320 \qquad [\because \text{ايراضي} = \text{ويڪر} \times \text{ڊيگهه}]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x - 320 = 0$$

KARACHIEDU.COM

$\Rightarrow \quad x^2 - 20x + 16x - 320 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x-20) + 16(x-20) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-20)(x+16) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 20 = 0 \quad$ يا $\quad x + 16 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = -16$

$x = -16$ کي نظرانداز ڪندي چاڪاڻ ته ڊيگهه هميشه واڌو هوندي آهي.

اهڙي طرح زمين جي ٽڪري جي ڊيگهه 20 ميٽر ۽ ويڪرائي 16 ميٽر آهي.

مشق 20.7

مساواتن جي هيٺين مجموعن کي حل ڪريو.

1. $2x - y = 3$ ۽ $x^2 + y^2 = 2$
2. $2x + y = 4$ ۽ $x^2 - 2x + y^2 = 0$
3. $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 2$ ۽ $4x + 3y = 25$
4. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ ۽ $x^2 + (y+1)^2 = 10$
5. $x^2 + y^2 = 25$ ۽ $(4x - 3y)(x - y - 5) = 0$
6. $x^2 + y^2 = 16$ ۽ $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$
7. $x^2 + y^2 = 5$ ۽ $xy = 2$
8. $x^2 + xy = 5$ ۽ $x^2 - 2xy = 2$
9. $x + \frac{4}{y} = 1$ ۽ $y + \frac{4}{x} = 25$
10. 12 کي بن حصن ۾ ورهايو، اهڙي طرح جو انهن جي چورسن جي جوڙ اُپت انهن جي ضرب اپت جي ٻيڻ کان 4 وڌيڪ آهي.
11. هڪ عبادت گاهه جي ڊيگهه ان جي ويڪر کان 4 ميٽر وڌيڪ آهي، جيڪڏهن عبادت گاهه جي ايراضي $36m^2$ آهي ته پوءِ ان جي ڊيگهه ۽ ويڪر لهو.
12. بن عددن جي چورسن جي جوڙ اُپت 100 آهي. هڪ عدد ٻيئي کان 2 وڌيڪ آهي ته پوءِ عددن جا مُلهه لهو.
13. گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي پايي جي ڊيگهه عمود جي ڊيگهه کان 3 وڌيڪ آهي. جيڪڏهن ٽڪنڊي جو هئپاٽينيوز 34 آهي ته پوءِ پايو ۽ عمود لهو.
14. ٻيور پاسي ٽڪنڊي جو عمود $12cm$ آهي، ٽڪنڊي جي غير مساوي پاسي جي اوچائي $12cm$ آهي، ٽڪنڊي جي ٽنهي پاسن جي ڊيگهه لهو.
15. بن عددن جو فرق 5 آهي ۽ انهن جي چورسن جو فرق 275 آهي ته پوءِ عدد لهو.

جائزي واري مشق 20

1. درست جواب چونڊيو

i. جيڪڏهن مساوات $2x^2+5x+3=0$ جا حاصل p ۽ q آهن تہ پوءِ $p+q=$ _____

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) $-\frac{5}{2}$

ii. جيڪڏهن مساوات $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ جا اصل $\frac{1}{\beta}$ ۽ $\frac{1}{\alpha}$ آهن تہ پوءِ $\alpha+\beta=$ _____

(a) $-\frac{b}{a}$ (b) $\frac{b}{c}$ (c) $-\frac{b}{c}$ (d) $-\frac{c}{b}$.

iii. جيڪڏهن مساوات $(p+1)x^2+(2p+3)x+(3p+4)=0$ جي اصلن جي جوڑ أپت -1 آهي تہ پوءِ اصلن جي ضرب أپت _____ آهي.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

iv. مساوات $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ جي اصلن جو قسم _____ سان حاصل ٿيندو.

(a) اصلن جي جوڑ أپت (b) اصلن جي ضرب أپت

(c) شناختي فرق (c) ڪوبہ نہ

v. جيڪڏهن بہ درجي مساوات جي اصلن جي جوڑ أپت $\frac{b}{a}$ آهي ۽ اصلن جي ضرب أپت $\frac{c}{a}$ آهي تہ پوءِ مساوات _____ آهي.

(a) $ax^2+bx+c=0$ (b) $ax^2+bx-c=0$

(c) $ax^2-bx+c=0$ (d) $ax^2-bx-c=0$

vi. گهربل مساوات _____ ٿيندي جنهن جا اصل ڏنل مساوات $ax^2+bx+c=0$ جي اصلن جا اُبتڙ آهن.

(a) $ax^2+bx+c=0$ (b) $cx^2+bx+a=0$

(c) $cx^2+ax+b=0$ (d) $cx^2-bx-a=0$

vii. جيڪڏهن مساوات $x^2-2x-15=0$ جا اصل α ۽ β آهن تہ پوءِ $\alpha^2+\beta^2=$ _____

(a) 34 (b) -34 (c) 26 (d) -26

viii. جيڪڏهن حقيقي عددي مُندين واري بہ درجي مساوات جو $\Delta=b^2-4ac$ هڪ پورو چورس آهي تہ پوءِ اصلن جو قسم _____ آهي.

(a) حقيقي ۽ مساوي (b) حقيقي، ناطق ۽ غير مساوي

(c) حقيقي، غير ناطق ۽ غير مساوي (d) خيالي

ix. جيڪڏهن بہ درجي مساوات جو هڪ اصل $2+\sqrt{3}$ آهي تہ پوءِ ٻيو اصل _____ ٿيندو.

(a) 2 (b) $-2+\sqrt{3}$ (c) $2-\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

x. بہ درجي مساوات _____ ٿيندي جنهن جا اصل ايڪي جا منجهيل ٽيان مول آهن.

(a) $x^2-x-1=0$ (b) $x^2-x+1=0$

(c) $x^2+x+1=0$ (d) $x^2+x-1=0$

2. هيٺين ۾ درجي مساواتن جي اصلن جو قسم لهو.

i) $x^2-7x+12=0$ ii) $x^2-14x+49=0$

iii) $x^2-x+7=0$ iv) $x^2-5=0$

3. k جي ڪهڙي قسم لاءِ، مساوات $x^2+kx+4=0$ کي

i) مساوي اصل آهن ii) منجهيل اصل آهن

iii) حقيقي اصل آهن iv) ناطق اصل آهن

4. 729 جا ٽيان مول لهو.

5. هيٺين ۾ درجي مساواتن جي اصلن جي جوڙ اُپٽ ۽ ضرب اُپٽ لهو.

i) $x^2-7x+29=0$ ii) $x^2-px+q=0$

iii) $7x-8=5x^2$ iv) $11x=9x^2-28$

6. ۾ درجي مساوات جي اصلن جي همشڪلي عمل کي بيان ڪريو.

7. اها ۾ درجي مساوات لهو جنهن جا اصل $1-\sqrt{3}$ ۽ $1+\sqrt{3}$ آهن.

8. اها مساوات لهو جنهن جا اصل ڏنل مساوات $x^2-10x+16=0$ جي اصلن جا ابتڙ آهن.

9. هيٺ ڏنل هر هڪ مساواتن جي مجموعي کي حل ڪريو.

i) $x^2+y^2=10$, $x+y=3$ ii) $x^2+y^2=37$, $2x+5y=32$

خلاصو

- ۾ درجي مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جو شناختي فرق $\Delta=b^2-4ac$ آهي.
  - i. جيڪڏهن $\Delta=b^2-4ac>0$ تہ پوءِ اصل حقيقي ۽ غير مساوي هوندا.
  - ii. جيڪڏهن $\Delta=b^2-4ac<0$ تہ پوءِ اصل غير حقيقي (منجهيل يا خيالي) هوندا.
  - iii. جيڪڏهن $\Delta=b^2-4ac=0$ تہ پوءِ اصل ناطق ۽ برابر هوندا ۽ هر هڪ $-\frac{b}{2a}$ جي برابر هوندو.
  - iv. جيڪڏهن a,b,c ناطق آهن ۽ $\Delta=b^2-4ac$ هڪ مڪمل چورس آهي تہ پوءِ اصل ناطق ۽ غير مساوي هوندا نہ تہ پوءِ غير ناطق هوندا.
- ايڪي جا ٽيان مون 1، ω ۽ ω^2 آهن.
- ايڪي جي ٽئين مولن جون خاصيتون
  - i. ايڪي جو هر هڪ منجهيل ٽيون مول ٻيئي جو چورس آهي.
  - ii. ايڪي جي ٽنهي ٽئين مولن جي جوڙ اُپٽ ٻُڙي آهي
  - iii. ايڪي جي ٽنهي ٽيئن مولن جي ضرب اُپٽ 1 آهي.
  - iv. ايڪي جو هر هڪ منجهيل ٽيون مول ٻيئي جو اُبتڙ آهي.
- جيڪڏهن ۾ درجي مساوات $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ جا اصل α ۽ β آهن: تہ پوءِ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad \text{۽} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

- ۾ درجي مساوات جي اصلن جا همشڪلي عمل اُهي عمل هوندا آهن جيڪي ساڳيا رهندا جيڪڏهن اصلن کي بدلايو وڃي. يعني $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$

جزوي پاڳا
PARTIAL FRACTION



شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- واجب، غير واجب ۽ ناطق اٽپورن کي بيان ڪن.
- هڪ آلجبرائي اٽپور کي ان جي جزوي پاڳن ۾ ورهائن جڏهن ان جو چيد مشتمل هجي.
  - هڪ درجي اڻ ورجايل جزن تي
  - هڪ درجي ورجايل جزن تي
  - ٻہ درجي اڻ ورجايل جزن تي
  - ٻہ درجي ورجايل جزن تي

تعارف: ڪنهن ناطق اٽپور کي ٻن يا وڌيڪ پاڳن جي جوڙ اُپت يا تفاوت ۾ ٽوڙجي ته انهن پاڳن کي جزوي پاڳا چئبو آهي. جزوي پاڳا تڏهن ئي لهي سگهجن ٿا جڏهن انس واري گهٽ رقمي جو درجو چيد واري گهٽ رقمي جي درجي کان لازمي طور ننڍو هجي.

مثال طور

(i) $\frac{2x+3}{(x-1)(x+4)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+4}$

(ii) $\frac{-(4x^2+x+11)}{(x^2+1)(x-3)}=\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{5}{x-3}$

21.1 واجب، غير واجب ۽ ناطق اٽپورن کي بيان ڪرڻ .

واجب اٽپور (Rational Fraction):

اسين جاڻون ٿا ته $\frac{p}{q}$ صورت وارو عدد ناطق عدد ڪوٺبو آهي

جيڪڏهن $p,q\in Z$ ۽ $q\neq 0$

ساڳي ريت ٻن گهٽ ڏسمين جي وچ واري اُپت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کي آلجبرائي ناطق اظهار ڪوٺبو جيڪڏهن $Q(x)\neq 0$ ۽ ان کي عام طرح سان ناطق اظهار چئبو آهي.

مثال:

(i) $\frac{2x^3-5x^2-3x-10}{x^2-1}$ (ii) $\frac{5x+8}{3x^2-2x-1}$

واجب اٽپور (Proper fraction):

هڪ ناطق اٽپور $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کي واجب اٽپور ڪوٺبو جيڪڏهن انس $P(x)$ جو درجو، چيد $Q(x)$ جي درجي کان ننڍو هجي.

مثال:

(i) $\frac{9x^2-9x+6}{(x-1)(2x-1)(x+2)}$ (ii) $\frac{6x+27}{3x^3-9x}$

غير واجب اٽپور (Improper fraction):

هڪ ناطق اٽپور $\frac{P(x)}{Q(x)}$ غير واجب اٽپور ڪوٺبو جيڪڏهن انس $P(x)$ جو درجو چيد $Q(x)$ جي درجي جي برابر هجي يا ان کان وڏو هجي .

مثال:

(i) $\frac{2x^3-5x^2-3x-10}{x^2-1}$ (ii) $\frac{6x^3-5x^2-7}{3x^2-2x-1}$

(iii) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

KARACHIEDU.COM

ڪوبہ غير واجب اٽپور هڪ گهڻ رقمي ۽ واجب اٽپور جي جوڙ اُپت ۾ ورهائي سگهجي ٿو

مثال طور:

$$\frac{3x^2-2x+1}{x+2}=3x-8+\frac{17}{x+2}$$

هتي $\frac{3x^2-2x+1}{x+2}$ هڪ غير واجب اٽپور. $3x-8$ هڪ گهڻ رقمي ۽ $\frac{17}{x+2}$ هڪ واجب اٽپور آهي

هڪ غير واجب اٽپور کي گهڻ رقمي ۽ واجب اٽپور جي جوڙ اُپت ۾ رهائڻ لاءِ اسان کي انس کي چند سان وند ڪرڻ جي ضرورت پوندي.

21.2 جزوي پاڳن ۾ هڪ اٽپور جي تحليل:

هڪ ناطق اٽپور کي جزوي پاڳن ۾ ورهائڻ لاءِ، اهو لازمي آهي تہ ناطق اٽپور واجب اٽپور هجي جيڪڏهن اهو نہ آهي تہ پوءِ ان کي لازمي طور واجب اٽپور ۾ وند وسيلي بدلائبو.

21.2.(i) هڪ آلجبرائي اٽپور کي ان جي جزوي پاڳن ۾ ورهائڻ جڏهن ان جو چيد مشتمل هجي.

- هڪ درجي اڪ ورجايل جزن تي (Non- repeated linear factors):
- هڪ درجي ورجايل جزن تي (Repeated linear factors):
- ٻہ درجي اڪ ورجايل جزن تي (Non- repeated quadratic factors):
- ٻہ درجي ورجايل جزن تي (Repeated quadratic factors):

صورتI : جڏهن چيد هڪ درجي اڪ ورجايل جزن تي مشتمل هجي.

فرض ڪريو تہ $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هڪ ناطق اٽپور آهي جڏهن تہ ان جو چيد $Q(x)$ هڪ درجي اڪ ورجايل جُزن جو ضرب اُپت هجي جيڪو هيٺين ريت لکبو

$$Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3).....(x-a_n)$$

هاڻي $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هيٺين ريت ورهائي سگهجي ٿو

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{A_3}{x-a_3}+...+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

هتي مستقلن $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ کي

ڳوليو ويندو. هيٺين مثالن ذريعي ان طريقي جي وضاحت ڪجي ٿي،

مثال 1:

$\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}$ کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو

حل:

فرض ڪريو تہ $\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{A_1}{(x-1)}+\frac{A_2}{(x+3)}$ ... (i)

هتي A_1 ۽ A_2 نامعلوم مستقل آهن جن کي معلوم ڪبو مساوات (i) مان

KARACHIEDU.COM

مساوات (i) مان،

$$\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{A_1(x+3)+A_2(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

بنهي پاسن کي $(x-1)(x+3)$ سان ضرب ڪندي، اسان حاصل ڪيو

$$11-3x=A_1(x+3)+A_2(x-1) \quad \cdots \text{(ii)}$$

مستقل A_1 ۽ A_2 لهڻ لاءِ x جون قيمتون چونڊيون

A_1 حاصل ڪرڻ لاءِ، اسين مساوات (ii) جي بنهي پاسن ۾ $x=1$ رکنداسين

اسان کي مليو $11-3(1)=A_1(1+3)+A_2(0)$

$$\Rightarrow \quad 8=4A_1$$

$$\Rightarrow \quad A_1=2$$

A_2 حاصل ڪرڻ لاءِ اسين مساوات (ii) ۾ $x=-3$, رکنداسين

اسان کي مليو $11-3(-3)=A_1(0)+A_2(-3-1)$

$$\Rightarrow \quad 20=-4A_2$$

$$\Rightarrow \quad A_2=-5$$

آخر ۾ مساوات (i) ۾ A_1 ۽ A_2 جون قيمتون رکندي

اسان حاصل ڪيو. $\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{2}{x-1}+\frac{-5}{x+3}$

مثال 2: $\frac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1}$ کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو.

حل: جيئن ته ڏنل ناطق اٽپور هڪ غير واجب اٽپور آهي. انهي ڪري انس کي چيد سان وند ڪندي. اهو اٽپور، واجب اٽپور ۾ بدلائبو. جيڪو هيٺ ڏنل آهي

$$\frac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1}=\frac{6x^3+5x^2-7}{(x-1)(2x+1)}=3x+4+\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)} \quad \cdots \text{(i)}$$

هاڻي اسين اظهار $\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}$ کي جزوي پاڳن ۾ ورهائڻ لاءِ ڪٽون ٿا.

فرض ڪريو ته $\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{2x+1} \quad \cdots \text{(ii)}$

هتي A_1 ۽ A_2 نامعلوم مستقل آهن جيڪي معلوم ڪبا.

مساوات (ii) مان

$$\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}=\frac{A_1(2x+1)+A_2(x-1)}{(x-1)(2x+1)}$$

KARACHIEDU.COM



ٻنهي پاسن کي $(x-1)(2x+1)$ سان ضرب ڪندي
اسان کي ملیو

$$7x-3=A_1(2x+1)+A_2(x-1) \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

مستقل A_1 ۽ A_2 معلوم ڪرڻ لاءِ، x جون قيمتون چونڊيون
A_1 جو ملهه لهڻ لاءِ، مساوات (iii) ۾ $x=1$, رکندي

اسانکي ملیو $7(1)-3=A_1(2+1)+A_2(0)$

$$4=3A_1$$

$$A_1=\frac{4}{3}$$

A_2 جو ملهه لهڻ لاءِ مساوات (iii) ۾ $x=-\frac{1}{2}$, رکندي

اسانکي ملیو $7\left(-\frac{1}{2}\right)-3=A_1(0)+A_2\left(-\frac{1}{2}-1\right)$

$$-\frac{13}{2}=-\frac{3}{2}A_2$$

$$A_2=\frac{13}{3}$$

مساوات (ii) ۾ مستقلن A_1 ۽ A_2 جون قيمتون رکندي، اسان کي ملیو

$$\frac{7x-3}{(x-1)(2x+1)}=\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{3(2x+1)}$$

آخر ۾، مساوات (i) هن ريت ٿيندي.

$$\frac{6x^3+5x^2-7}{2x^2-x-1}=3x+4+\frac{4}{3(x-1)}+\frac{13}{3(2x+1)}$$

مشق 21.1

هيٺين کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو.

1. $\frac{12}{x^2-9}$
2. $\frac{4(x-4)}{x^2-2x-3}$
3. $\frac{x^2-3x+6}{x(x-2)(x-1)}$
4. $\frac{3(2x^2-8x-1)}{(x+4)(x-1)(2x-1)}$
5. $\frac{x^2+9x+8}{x^2+x-6}$
6. $\frac{x^2-x-14}{x^2-2x-3}$
7. $\frac{3x^3-2x^2-16x+20}{(x-2)(x+2)}$

SINDHACHIEDU.COM

صورت II: جڏهن چيد هڪ درجي ورجايل جزن تي مشتمل هجي.

فرض ڪريو تہ $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هڪ ناطق اٽپور آهي جڏهن تہ ان جو چيد $Q(x)$ هڪ درجي ورجايل جزن جي ضرب اُپت آهي جنهن کي هن ريت لکي سگهجي ٿو: $Q(x)=(x-a)^n$

هاڻي $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هيٺين ريت ورهائبو:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^1}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+...+\frac{A_n}{(x-a)^n}$$

هتي مستقل $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ معلوم ڪري سگهجن ٿا. اهو طريقو هيٺين مثالن ذريعي واضح ڪيو ويو آهي.

مثال 1:

$\frac{2x+3}{(x-2)^2}$ کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو.

حل:

فرض ڪريو تہ (i)... $\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{A_1}{(x-2)}+\frac{A_2}{(x-2)^2}$

هتي A_1 ۽ A_2 نامعلوم مستقل آهن جيڪي معلوم ڪبا

مساوات (i) مان

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{A_1(x-2)+A_2}{(x-2)^2}$$

بنهي پاسن کي $(x-2)^2$ سان ضرب ڪندي

اسان کي مليو $2x+3=A_1(x-2)+A_2$

$$2x+3=A_1x-2A_1+A_2 \qquad \text{(ii)}$$

مستقل A_1 ۽ A_2 لهڻ لاءِ اسان مساوات (ii) جون ساڳيون رقمون برابر رکنداسين

هاڻي مساوات (ii) ۾ x جا عددي منڊ برابر رکندي، اسانکي مليو

$$2=A_1$$

وري مساوات (ii) ۾ مستقلن کي برابر رکندي، اسان حاصل ڪيو.

$$3=-2A_1+A_2$$

$$\Rightarrow \quad 3=-2(2)+A_2 \qquad (\because A_1=2)$$

$$\Rightarrow \quad 7=A_2$$

آخر ۾ مساوات (i) ۾ A_1 ۽ A_2 جون قيمتون رکندي اسان حاصل ڪيو

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2}=\frac{2}{(x-2)}+\frac{7}{(x-2)^2}$$

KARACHIEDU.COM

مثال 2:

$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}$ کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو

حل: فرض ڪريو ته

$$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{A_1}{(x+3)}+\frac{A_2}{(x-1)}+\frac{A_3}{(x-1)^2} \cdots \text{(i)}$$

هتي A_1, A_2, A_3 نامعلوم مستقل آهن جن جون قيمتون معلوم ڪبيون.

مساوات (i) جي ٻنهي پاسن کي $(x+3)(x-1)^2$ سان ضرب ڪندي،

$$5x^2-2x-19=A_1(x-1)^2+A_2(x+3)(x-1)+A_3(x+3) \cdots \text{(ii)}$$

$$\Rightarrow \quad 5x^2-2x-19=A_1x^2+2A_1x+A_1+A_2x^2+2A_2x-3A_2+A_3x+3A_3$$

$$5x^2-2x-19=(A_1+A_2)x^2+(A_3+2A_2-A_1)x+(A_1-3A_2+3A_3) \cdots \text{(iii)}$$

مستقلن A_1, A_2, A_3 کي لهڻ لاءِ، x جون قيمتون چونڊيبيون. A_1 جي قيمت لهڻ لاءِ، آسان مساوات (ii) ۾ $x=-3$ رکندا سين ته آسان ڪي ملي.

$$5(-3)^2-2(-3)-19=A_1(-4)^2+A_2(0)(-4)+A_3(0)$$

$$\Rightarrow \quad 32=16A_1$$

$$\Rightarrow \quad A_1=2$$

هاڻي مساوات (iii) جي ٻنهي پاسن جي ساڳي رقمن کي برابر رکندا سين

مساوات (iii) جي x^2 جي عددي منڊن کي برابر رکندي، آسان حاصل ڪيو

$$5=A_1+A_2$$

$$\Rightarrow \quad 5=2+A_2 \qquad (\because A_1=2)$$

$$\Rightarrow \quad A_2=3$$

وري مساوات (iii) ۾ x جي عددي منڊن کي برابر رکندي، آسان حاصل ڪيو

$$-2=A_3+2(3)-2(2)$$

$$-2=A_3+2$$

$$A_3=-4$$

آخر ۾ مستقلن A_1, A_2, A_3 جون قيمتون مساوات (i) ۾ رکڻ سان، آسان حاصل ڪيو

$$\frac{5x^2-2x-19}{(x+3)(x-1)^2}=\frac{2}{(x+3)}+\frac{3}{(x-1)}-\frac{4}{(x-1)^2}$$

مشق 21.2

هيٺين کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو

1. $\frac{4x-3}{(x+1)^2}$
2. $\frac{x^2+7x+3}{x^2(x+3)}$
3. $\frac{5x^2-30x+44}{(x-2)^3}$
4. $\frac{18+21x-x^2}{(x-5)(x+2)^2}$
5. $\frac{x^2-x+3}{(x-1)^3}$

KARACHIEDU.COM

صورتIII: جڏهن چيد ۾ درجي اڻ ورجايل جزن تي مشتمل هجي.

فرض ڪريو ته $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هڪ ناطق اڻپور آهي جڏهن ته ان جو چيد $Q(x)$ ۾ درجي ناقابل تخفيف ۽ اڻ ورجايل جزن جو ضرب اُپت آهي.

هاڻي $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هن هيٺين ريت ورهائبو

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+A_2}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_3x+A_4}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\ldots+\frac{A_{2n-1}x+A_{2n}}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

هتي مستقلن $A_{2n},\ldots,A_3,A_2,A_1$ کي معلوم ڪبو

هيٺين مثالن ذريعي طريقي کي واضح ڪيو ويو آهي.

مثال 1:

$\frac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}$ کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو.

حل:

فرض ڪريو ته

$$\frac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2x+A_3}{x^2+2} \quad \cdots \text{(i)}$$

هتي A_1, A_2 ۽ A_3 نامعلوم مستقل آهن جيڪي معلوم ڪبا.

مساوات (i) جي ٻنهي پاسن کي $(x+1)(x^2+2)$ سان ضرب ڪندي، اسان حاصل ڪيو

$$7x^2+5x+13=A_1(x^2+2)+(A_2x+A_3)(x+1) \cdots \text{(ii)}$$

$$\Rightarrow 7x^2+5x+13=A_1x^2+2A_1+A_2x^2+A_2x+A_3x+A_3$$

$$\Rightarrow 7x^2+5x+13=(A_1+A_2)x^2+(A_2+A_3)x+(2A_1+A_3) \cdots \text{(iii)}$$

مستقلن A_1, A_2 ۽ A_3 کي لهڻ لاءِ x، جون قيمتون چونڊيبيون. A_1 کي لهڻ لاءِ اسين مساوات (ii) ۾ $x=-1$, رکي حاصل ڪيون ٿا.

$$7(-1)^2+5(-1)+13=A_1((-1)^2+2)+(A_2(-1)+A_3)(-1+1)$$

$$\Rightarrow \quad 15=3A_1$$

$$\Rightarrow \quad A_1=5$$

مساوات (iii) جي ساڳي رقمن کي برابر رکندي اسان حاصل ڪيو

$$7=A_1+A_2 \quad \text{۽} \quad 5=A_2+A_3$$

$$\Rightarrow 7=5+A_2 \quad \Rightarrow 5=2+A_3$$

$$\Rightarrow A_2=2 \quad \Rightarrow A=3$$

آخر ۾ مساوات (i) ۾ A_1, A_2 ۽ A_3 جون قيمتون رکندي اسان حاصل ڪيو

$$\frac{7x^2+5x+13}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{5}{(x+1)}+\frac{2x+3}{(x^2+2)}$$

KARACHIEDU.COM

مثال 2:

$\frac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)}$ کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو

حل:

فرض ڪريو ته

$$\frac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)} = \frac{A_1x+A_2}{x^2+3} + \frac{A_3x+A_4}{x^2+6} \quad \cdots (i)$$

هتي A_1, A_2, A_3, A_4 نامعلوم مستقل آهن جيڪي معلوم ڪبا

مساوات (i) جي ٻنهي پاسن کي $(x^2+3)(x^2+6)$ سان ضرب ڪندي اسان حاصل ڪيو

$$2x+7 = (x^2+6)(A_1x+A_2)+(x^2+3)(A_3x+A_4)$$

$$\Rightarrow 2x+7 = (A_1+A_3)x^3+(A_2+A_4)x^2+(6A_1+3A_3)x+(6A_2+3A_4) \cdots (ii)$$

مساوات (ii) جي ٻنهي پاسن جي ساڳي رقمن کي برابر رکندي، اسان حاصل ڪيو.

$$A_1 + A_3 = 0 \quad \cdots (iii)$$
$$A_2 + A_4 = 0 \quad \cdots (iv)$$
$$6A_1 + 3A_3 = 2 \quad \cdots (v)$$
$$6A_2 + 3A_4 = 7 \quad \cdots (vi)$$

مساوات (iii) ۽ (v) کي گڏ حل ڪندي اسانکي ملي ٿو $A_1 = \frac{2}{3}$ ۽ $A_3 = -\frac{2}{3}$

ساڳي ريت $A_2 = \frac{7}{3}$ ۽ $A_4 = -\frac{7}{3}$

آخر ۾ مستقلن A_1, A_2, A_3 ۽ A_4 جون قيمتون مساوات (i) ۾ رکندي اسان حاصل ڪيو

$$\frac{2x+7}{(x^2+3)(x^2+6)} = \frac{\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}}{x^2+3} + \frac{-\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}}{x^2+6} = \frac{2x+7}{3(x^2+3)} + \frac{2x\ \ 7}{3(x^2+6)}$$

مشق 21.3

هيٺين کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو

1. $\frac{x^2-x-13}{(x^2+7)(x-2)}$
2. $\frac{6x-5}{(x^2+10)(x+1)}$
3. $\frac{15+5x+5x^2-4x^3}{x^2(x^2+5)}$
4. $\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+3)}$
5. $\frac{x^2-x+2}{(x+1)(x^2+3)}$

صورت Iv: جڏهن چيد ۾ درجي ورجايل جزُن تي مشتمل هجي.

فرض ڪريو ته $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ هڪ ناطق اڻپور آهي جڏهن ته ان جي چيد $Q(x)$ کي ۾ درجي ناقابل تخفيف ۽ ورجايل جزا آهن. سولائي خاطر ان کي هن ريت ڪٽبو $Q(x) = (ax^2+bx+c)^n$

ACHIEDU.COM

هاڻي $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ هيٺين ريت ورهائبو

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+A_2}{ax^2+bx+c}+\frac{A_3x+A_4}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_{2n-1}x+A_{2n}}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

هتي مستقل $A_n,\ldots,A_3,A_2,A_1$ معلوم ڪبا

هيٺين مثالن جي ذريعي طريقي کي واضح ڪجي ٿو.

مثال 1:

$\frac{5x^2+2}{(x^2+x+1)^2}$ کي جُزوي پاڳن ۾ ورهايو

حل: فرض ڪريو ته

$$\frac{5x^2+2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{A_1x+A_2}{x^2+x+1}+\frac{A_3x+A_4}{(x^2+x+1)^2}\quad\cdots\quad(i)$$

هتي A_4 ۽ A_3,A_2,A_1 نامعلوم مستقل آهن جيڪي معلوم ڪبا

مساوات (i) جي ٻنهي پاسن کي $(x^2+x+1)^2$ سان ضرب ڪندي اسان حاصل ڪيو

$$5x^2+2=(x^2+x+1)(A_1x+A_2)+A_3x+A_4$$

$$\Rightarrow\quad 5x^2+2=x^3A_1+x^2A_1+x^2A_2+xA_1+xA_2+xA_3+A_2+A_4$$

$$\Rightarrow\quad 0.x^3+5x^2+0.x+2=x^3A_1+x^2(A_1+A_2)+x(A_1+A_2+A_3)+(A_2+A_4)\cdots(ii)$$

مساوات (ii) جي ٻنهي پاسن جي ساڳي رقمن کي برابر ڪندي، اسان کي مليو

$$A_1=0\quad\cdots\quad(iii)$$
$$A_1+A_2=5\quad\cdots\quad(iv)$$
$$A_1+A_2+A_3=0\quad\cdots\quad(v)$$
$$A_2+A_4=2\quad\cdots\quad(vi)$$

مساوات (iv) ۾ $A_1=0$, رکندي اسان کي مليو $A_2=5$

ساڳي ريت مساوات (v) ۾ A_1 ۽ A_2 جي قيمت رکندي، اسانکي مليو

$$0+5+A_3=0$$
$$\Rightarrow\quad A_3=-5$$

وري، مساوات (vi) ۾ A_2 جي قيمت رکڻ سان

$$5+A_4=2$$
$$\Rightarrow\quad A_4=-3$$

آخر ۾ مساوات (i), ۾ مستقلن A_4 ۽ A_3,A_2,A_1 جون قيمتون رکڻ سان، اسانکي مليو

$$\frac{5x^2+2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{0.x+5}{x^2+x+1}+\frac{-5x-3}{(x^2+x+1)^2}$$

KARACHIEDU.COM

مثال 2:

$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}$ کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو.

حل:

فرض ڪريو ته

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2x+A_3}{\left(x^2+1\right)}+\frac{A_4x+A_5}{\left(x^2+1\right)^2} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

هتي A_1, A_2, A_3, A_4 ۽ A_5 نامعلوم مستقل آهن جيڪي معلوم ڪبا

مساوات (i) جي ٻنهي پاسن کي $x\left(x^2+1\right)^2$ سان ضرب ڪندي اسان حاصل ڪيو

$$x^4+x^3+x^2+x+1=A_1\left(x^2+1\right)^2+x\left(A_2x+A_3\right)\left(x^2+1\right)+x\left(A_4x+A_5\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^4+x^3+x^2+x+1=A_1x^4+2A_1x^2+A_1+A_2x^4+A_2x^2+A_3x^3+A_3x+A_4x^2+A_5x$$

$$\Rightarrow \quad x^4+x^3+x^2+x+1=\left(A_1+A_2\right)x^4+A_3x^3+\left(2A_1+A_2+A_4\right)x^2+\left(A_3+A_5\right)x+A_1 \quad \cdots \text{(ii)}$$

مستقل A_1, A_2, A_3, A_4 ۽ A_5 لهڻ لاءِ اسان مساوات (ii) جي ساڳي رقمن کي برابر رکنداسين هاڻي اسان وٽ آهي

$$1=A_1+A_2 \quad \cdots \text{(iii)}$$
$$1=A_3 \quad \cdots \text{(iv)}$$
$$1=2A_1+A_2+A_4 \quad \cdots \text{(v)}$$
$$1=A_3+A_5 \quad \cdots \text{(vi)}$$
$$1=A_1 \quad \cdots \text{(vii)}$$

مساوات (iii) ۾ A_1 جي قيمت رکندي، اسان کي ملي

$$1=A_1+A_2$$
$$\Rightarrow \quad 1=1+A_2$$
$$\Rightarrow \quad A_2=0$$

مساوات (vi) ۾ A_3 جي قيمت رکندي، اسان کي ملي

$$1=1+A_5$$
$$A_5=0$$

مساوات (v) ۾ A_1 ۽ A_2 جون قيمتون رکندي، اسان کي ملي

$$1=2(1)+(0)+A_4$$
$$A_4=-1$$

آخر ۾ مساوات (i) ۾ A_1, A_2, A_3, A_4 ۽ A_5 جون قيمتون رکندي. اسان حاصل ڪيو

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\left(x^2+1\right)}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

KARACHIEDU.COM

مشق 21.4

هيٺين کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو

1. $\dfrac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2\left(1-x\right)}$

2. $\dfrac{x^2+x+2}{x^2\left(x^2+3\right)^2}$

3. $\dfrac{x^2}{(1+x)\left(1+x^2\right)^2}$

4. $\dfrac{7}{(x+1)\left(2+x^2\right)^2}$

5. $\dfrac{49}{(x-2)\left(3+x^2\right)^2}$

جائزي واري مشق 21

1. دُرست جواب چونڊيو

i. هڪ غير واجب اٽپور _____ جي ذريعي واجب اٽپور ۾ آڻي سگهجي ٿو.

(a) جوڙ (b) ضرب

(c) ڪٽ (d) وڌ

ii. $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ جي جزوي پاڳن جي صورت _____ آهي.

(a) $\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}+\dfrac{C}{x+c}$ (b) $\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$

(c) $\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x+c}$ (d) ڪوبہ نہ

iii. $\dfrac{x-3}{x^3+3x}$ جا جزوي پاڳا _____ آهن

(a) $\dfrac{-1}{x}-\dfrac{x-1}{x^2+3}$ (b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+1}{x^2+3}$

(c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+1}{x^2+3}$ (d) $\dfrac{-1}{x}+\dfrac{x+1}{x^2+3}$

iv. $\dfrac{x^3+1}{(x-1)(x+2)}$، هڪ _____ آهي.

(a) واجب اٽپور (b) غير واجب اٽپور

(c) هڪ ذاتي عنصر (d) مستقل رقم

v. اٽپور $\dfrac{2x+5}{x^2+5x+6}$ کي _____ چئبو آهي.

(a) واجب اٽپور (b) غير واجب اٽپور (c) ٻئي واجب ۽ غير واجب اٽپور (d) ڪوبہ نہ

2. واجب، غير واجب ۽ ناطق اٽپور کي بيان ڪريو

3. هيٺين کي جزوي پاڳن ۾ ورهايو

(i) $\frac{5x+8}{(x-1)(x+2)}$ (ii) $\frac{9x^2+5x+7}{x(x+2)(x-5)}$

(iii) $\frac{x^2+2x+3}{(x^2+1)(x-2)}$ (iv) $\frac{x^3+8x^2+9}{(x^2+x+1)(x+1)}$

(v) $\frac{x+5}{(x^2+1)^2(x-3)}$ (vi) $\frac{7x+3}{(x-1)^2(x+2)}$

KARACHIEDU.CO

بنيادي شماريات
BASIC STATISTICS

يونٽ 22

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هي يونٽ پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- تعددي تقسيم جي باري ۾ جاڻن ۽ سکن تہ ڪئين:
  - گروهي تعددي جدول جي جوڙجڪ ڪجي.
  - برابر جماعتي وقفن وارا ڪالمي نقشا ناهجن.
  - غير مساوي جماعتن وارا ڪالمي نقشا ناهجن.
  - تعددي گهٽ پاسي جي جوڙجڪ ڪجي.
- مجموعي تعددي ورهاست جي باري ۾ جاڻن ۽ سکن تہ ڪئين :
  - هڪ مجموعي تعددي جدول جي جوڙجڪ ڪجي.
  - مجموعي تعددي گهٽ پاسو ناهجي.
- مرڪزي رجحانن جي ماپن جي باري ۾ جاڻن ۽ سکن تہ ڪيئن
  - گروهي ۽ غير گروهي مواد لاءِ هيٺيان لهجن.
  - حسابي سراسري وصف وسيلي ۽ فرض سراسري کان انحرافن جو استعمال ڪندي.
  - مڊياني سراسري، ڪثرتي سراسري، مهندسي سراسري ۽ هارموني سراسري.
- حسابي سراسري جي خاصيتن جي سجاڻپ ڪن.
- قدري سراسري ۽ متحرڪ سراسري لهن.
- مڊيان، چوٿائي ڪندڙ مشاهدن ۽ ڪثرتي سراسري جو گراف وسيلي اندازو لڳائين.
- پکڙجڻ جي پيمانن جي باري ۾ جاڻن ۽ سکن تہ ڪيئن:
  - وسعت جي وصف بيان، سجاڻپ ۽ ماپ ڪجي. تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهجي.

تعارف(Introduction):

شماريات (Statistics) رياضي جي هڪ مکيه شاخ آهي جنهن جو واسطو مواد جي ميڙ، ترتيب، اظهار، تشريح ۽ تجزيئي سان هوندو آهي ته جيئن بامعني نتيجا ۽ نمونا کڍيا وڃن. جيڪي دانشمنداڻا فيصلا ۽ ڪارگر حڪمت عملي ناهڻ ۾ مدد ڏين ٿا.اسين اڳيئي سادي مواد جي درجه بندي، گراف ذريعي اظهار ۽ ڪجهه مرڪزي رجحان جي ماپن واري بنيادي تصورن سان واقف آهيون. هتي اسين انهن جي تفصيل سان کوجنا ڪنداسين ۽ تصورن کي متحرڪ سراسريون ۽ پکڙجڻ جي ماپن ڏانهن وڌائينداسين.

مواد (Data) ڪنهن به شمارياتي‌جاچ جو بنياد آهي ۽ اهو دلچسپي واري بدلجندڙ تي سوال پڇڻ، ڳٽڻ ۽ ماپ ڪرڻ، رپورٽس، خبرون، مضمون ڏسڻ سان گڏ ٿيندو آهي. مواد جي بلڪل بنيادي صورت خام مواد (Raw data) آهي جيڪو غير جماعتي يا غير گروهي (Unclassified/ungrouped) آهي ۽ ان مان سڌي ريت کو بامعني نتيجو ڪڍڻ مشڪل آهي.

اهڙو مواد جائزن، گالهه ٻولهه (انترويوز) ۽ سوالنامن جو استعمال ڪندي حاصل ٿيئي ٿو انهن کي مواد جا بنيادي ذريعا (Primary sources) پڻ چئبو آهي. خام يا غير گروهي مواد جي درجه بندي ڪرڻ ۽ ترتيب ڏيڻ کانپوءِ اسين گروهي يا درجه بندي ٿيل مواد (Grouped or classified data) ذريعي کارائتي معلومات حاصل ڪري سگهون ٿا. اخبارن، رپورٽن ۽ مضمونن کي ثانوي مواد جا ذريعا (Secondary sources) کوٽبو آهي چاڪاڻ ته اهي درجه بندي ٿيل مواد ڏانهن وڃي ٿا.

مواد بن قسمن ۾ ورهايل آهي: خاصيتي مواد (Quantitative /Categorical data) ۽ مقداري مواد (Quantitative /numeric data) جنس، رت جو گروپ، پرون، رنگ، معياري درجا، روا، سمر وغيره خاصيتي مواد آهن. اُوچائي، وزن، پگهار، ڳار جون pH قيمتون، سالياني منافعو ڪنهن ڪمپني جو، شاگردن جون مارڪون ڪنهن مضمون ۾ وغيره مقداري مواد آهن.

خاصيتي مواد ۽ مشاهدا رڳو خاصيتون يا قيمتون هوندا آهن جنهن ۾ ڪابه عددي اهميت نه هوندي آهي. پر ان ۾ درجه بندي يا ترتيب (وڌندڙ يا گهٽجندڙ) ٿي به سگهي ٿي يا نه به ٿي سگهي ٿي. خاصيتي مواد جنهن ۾ ترتيب هجي ته ان کي نالياورو مواد نه ته پوءِ قطاري مواد چئبو آهي. جنس، رت جو گروپ، پرون، رنگ، مذهب نالياورو مواد آهن.

مثال طور اسين مرد ۽ عورت واري مشاهدن ۾ درجه بندي نٿا ڪري سگهون نه ڪير وڏي يا گهٽ حيثيت وارو آهي. شاگردن جا گريڊ (A، B، C، فيل) يا ڪاڏي جو معيار (بهترين، سٺو، چڱو، خراب، بدترين) اهو مواد درجه بندي يا ترتيب ۾ اچي سگهي ٿو اهو ۽ اهو قطاري مواد ٿيندو.

خاصيتي مواد جا مشاهدا عدد هوندا آهن جنهن جي عددي اهميت ۽ ترتيب هوندي آهي. عدد رڳو سڄا عدد ٿي سگهن ٿا يا ڏهائي جي صورت ۾ پڻ ٿي سگهن ٿا. جيڪڏهن مقداري مواد جا مشاهدا رڳو سڄا عدد آهن ته پوءِ مواد کي غير مسلسل مواد (Discrete data) کوٽبو. ٻي صورت ۾ اهو مسلسل مواد (Continuous data) کوٽبو رپين ۾ پگهار، ڪنهن اسڪول ۾ في ڪلاس چوڪرين جو تعداد، چار سڪا گڏ اُڇلائڻ تي پورين (Heads) جو تعداد، اهي سڀ غير مسلسل مواد کي ظاهر ڪن ٿا. اُوچائي، وزن جي ماپ، ڳارن جون pH واريون قيمتون اهي سڀ مسلسل مواد کي ظاهر ڪن ٿا.

مواد جي قسمن جي وچ ۾ فرق ڪرڻ نهايت اهم آهي ته جيئن مناسب طريقي سان شمارياتي تجزين تي لڳايو وڃي يا مواد جي وڌيڪ تجزيئي لاءِ نشان ڏيڪارينڊڙ جي ماپ ڪجي.

22.1 تعددي تقسيم (Frequency distribution):

مشاهدن جي وڏي تعداد واري غير گروهي مواد مان بامعني معلومات ڪڍڻ لاءِ، اسين مواد کي ننڍن جماعتن يا گروهن ۾ ورهائيندا آهيون. ساڳي مشاهدن کي هڪ جڳهه رکڻ لاءِ جماعتن کي ناهيو ويندو آهي. غير مسلسل

KARACHIEDU.COM

جماعتون (Discrete classes) هڪ عدد يا خاصيت تي مشتمل هوندیون آهن جڏهن ته مسلسل جماعتن (Continuous Classes) ۾ عددن جي وسعت هوندي آهي. ڪنهن خاص جماعت ۾ مشاهدن جي تعداد کي ان جي تعدد (Frequency) چئبو آهي.

گروهي مواد جي جدولي اظهار کي تعددي تقسيم (Frequency distribution) چئبو آهي. اها جماعتن ۽ انهن جي واسطيدار تعدد تي مشتمل هوندي آهي. تعددي تقسيم بنيادي تجزيئي لاءِ وڌيڪ واضح سمجهه مهيا ڪري ٿو. ڪنهن جماعت جنهن جو تعدد "f" هجي ته پوءِ ان جي نسبتي (Relative) ۽ في سيڪڙو تعدد (Parentage Fraquemy) ترتيبوار $\left(\frac{f}{n}\right)$ ۽ $\left(\frac{f}{n}\times 100\right)$ آهن جڏهن ته مشاهدن جي ڪل تعداد "n" آهي. سڀني نسبتي تعددن جي جوڙ اُپت 1 جي برابر هوندي آهي ۽ في سيڪڙو تعددن جي جوڙ اُپت 100 هوندي آهي.

(i) 22.1 گروهي تعددي جدول جي جوڙجڪ ڪرڻ (Construct grouped frequency table):

گروهي تعددي جدول يا تعددي ورهاست کي ناهڻ جو طريقو ان ڳالهه تي منحصر ڪري ٿو ته اسين ڪهڙي ريت گروهه يا جماعتون ناهيون ٿا. اسين جوڙجڪ جي هيٺين بن طريقن تي غور ڪريون ٿا.

(a) غير مسلسل جماعتن جي تعددي جدول (Frequency table with discrete classes):

غير مسلسل جماعتون اهي جماعتون هوندیون آهن جن ۾ ساڳيئي مشاهدن کي شامل ڪرڻ لاءِ هڪڙو عدد يا خاصيت هوندي آهي. اسين غير مسلسل جماعتن جو تڏهن استعمال ڪندا آهيون جڏهن مواد جا ٿورا مشاهدا پنهنجي پاڻ کي وڌيڪ پيرا ورهائن غير مسلسل جماعتن واري تعددي جدول کي غير مسلسل تعددي جدول پڻ ڪوٺبو آهي. ڪڏهن ڪڏهن نسبتي ۽ في سيڪڙو تعددن کي جدول جي آخر ۾ لڳائبو آهي جيڪڏهن گهرج هجي ته. ڏنل ڊيٽا سيٽ (Data Set) ۾ ٽن ڪالمن تي مشتمل غير مسلسل جماعتن واري تعددي جدول کي ناهڻ لاءِ اسين هيٺيان قدم کڻندا آهيون.

1. مختلف مشاهدن جو جماعتن يا گروهن جي صورت سيڃاڻپ ڪيو ۽ انهن کي ڪنهن به ترتيب ۾ پهرين ڪالم ۾ لکو جيڪڏهن مواد نالیوارو آهي قطاري يا مقداري مواد لاءِ جماعتن کي وڌندڙ ترتيب ۾ لکو.
2. بيئي ڪالم ۾ مواد کي جماعتن ۾ ورهائڻ لاءِ مطابقت جي نشانين يا ٽيلي نشان (Tally Marla) جو استعمال ڪريو.
3. ٽيئن ڪالم ۾ هر هڪ جماعت جي تعدد کي لکڻ لاءِ مطابقت جي نشانين کي ڳڻيو.

مثال 1: هڪ ڪلاس جي **30** شاگردن جي رت جي گروپن لاءِ گروهي تعددي جدول ناهيو.

A+ O+ B+ A+ A− AB+ B+ O+ O+ A− A− AB− A+ O− B+
B+ O− B− O− AB− O− A− AB− A− O+ B− O+ A− AB− O−

گروهي تعددي جدول

جماعتون "رت جا گروپ"	ٽيلي نشان	تعداد "شاگردن جي تعداد"
A+	𝍸 |	6
B+	𝍸	5
AB+	|||	3
O+	𝍸 ||	7
A−	|||	3
B−	|	1
AB−	||	2
O−	|||	3
ڪُل تعداد	---	$n = 30$

حل:

هتي $n = 30$ ۽ مواد نالیوارو آهي اٺ ڏار رت جا گروپ A+، B+، AB+، O+، A−، B−، AB− ۽ O− اهي اٺ جماعتون آهن جيڪي پهرين ڪالم ۾ لکيا ويا آهن. مواد کي ورهائڻ لاءِ بيئي ڪالم ۾ ٽيلي نشانين جو استعمال ڪندي ۽ ان کانپوءِ ٽيئن ڪالم ۾ تعدد لکڻ لاءِ انهن کي ڳڻندي اسانکي گهربل گروهي تعددي جدول ملي جيڪا شاگردن جي رت جي گروپن کي ورهائي ٿي.

KALACHIEDU.COM

مثال 2: هڪڙي بازار ۾ 40 سرسري چونڊيل گراهڪن جا جواب هيٺ ڏنل آهن جڏهن انهن کان پڇيو ويو "توهان خدمتن مان ڪيترو مطمئن آهيو؟" انهن جي جوابن جي گروهي تعددي جدول ناهيو. نسبتي ۽ في سيڪڙو تعددون پڻ لهو.

ڈاڍو	گهڻو نه	گهڻو نه	ڈاڍو	ڪجهه	بلڪل نه	ڈاڍو	گهڻو نه
ڈاڍو	گهڻو نه	ڈاڍو	ڈاڍو	ڈاڍو	گهڻو نه	ڈاڍو	ڪجهه
پڪ ناهي	ڈاڍو	بلڪل نه	ڈاڍو	ڈاڍو	ڈاڍو	گهڻو نه	ڪجهه
بلڪل نه	پڪ ناهي	گهڻو نه	گهڻو نه	پڪ ناهي	ڈاڍو	ڈاڍو	ڈاڍو
ڈاڍو	ڪجهه	ڈاڍو	ڪجهه	گهڻو نه	پڪ ناهي	ڈاڍو	ڪجهه

حل:
هتي $n = 40$ ۽ مواد قطاري آهي. وڌندڙ ترتيب (گهٽ کان وڌ) ۾ پنج مختلف مطمئن ڪندڙ درجا جماعتون آهن. ٽيلي نشان ۽ تعددن سان اسان گروهي تعددي جدول حاصل ڪئي. نسبتي ۽في سيڪڙو تعددون پڻ چوٿين ۽ پنجين ڪالم ۾ ڪڍيل آهن.

جماعتون "مطمئن ڪندڙ درجا"	ٽيلي نشان	تعدد (f)	نسبتي تعدد $\left(\frac{f}{n}\right)$	في سيڪڙو تعدد (%) $\left(\frac{f}{n}\times 100\right)$
بلڪل نه	|||	3	$\frac{3}{40} = 0.075$	$\frac{3}{40}\times 100 = 7.5$
گهڻو نه	𝍸 |||	8	0.2	20
پڪ ناهي	𝍸 |||	5	0.125	12.5
ڪجهه	𝍸 ||| |	6	0.15	15
ڈاڍو	𝍸 𝍸 𝍸 |||	18	0.45	45
ڪُل تعداد	---	$n = 40$	1	100

نوٽ ڪيو ته:

a. مثال 2 جي گروهي تعددي جدول مان، اسين سولائي سان فيصلو ڪري سگهون ٿا ته گراهڪن مان سڀ کان وڌي تعداد "ڈاڍو" واري آهي جڏهن ته گراهڪن جي گهٽ تعداد "بلڪل نه" واري آهي.

b. اهو چوڻ ٺيڪ ۽ سمجهه ۾ ايندڙ آهي ته 45% گراهڪ ڈاڍا مطمئن هئا بجاءِ ان جي ته 40 مان 18 گراهڪ ڈاڍا مطمئن هئا.

مثال 3:
هڪ شهر جي 45 خاندانن کان جڏهن موبائيلن جي تعداد بابت پڇيو ويو جيڪي اُهي استعمال ڪن ٿا ته جيڪي جواب انهن ڏنا اُهي هيٺين ريت نوٽ ڪيا ويا انهن جوابن جي غير مسلسل تعددي جدول ناهيوانهن جوابن جي نسبتي ۽ في سيڪڙو تعدد لهو.

1 1 3 2 2 2 2 1 2 1 2 2 3 3 3 3 4 1 1 0 2 4 1
3 3 2 3 2 2 5 1 6 1 6 2 1 5 3 2 4 2 4 7 4 2

حل:
هتي $n = 45$ ۽ مواد مقداري آهي ۽ خاص طور سان غير مسلسل آهي مواد جا مختلف عدد وڌندڙ ترتيب ۾ هي آهن. 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 جيڪي ٿورا عدد آهن ۽ پنهنجي پاڻ کي وري وري ورجائن ٿا.
پهرين ڪالم ۾ اهي اٺ جماعتون آهن. ٻيئي ڪالم ۾ ٽيلي نشانن کي لکندي ۽ ڳڻندي اسين 45 خاندانن جي موبائيل جي تعداد کي ورهائڻ جي گهربل غير مسلسل تعددي جدول حاصل ڪرڻ لاءِ ٽيئن ڪالم ۾ تعددن کي لکنداسين.

KARACHIEDU.COM

غير مسلسل تعددي جدول

جماعتون "موبائيلن جو تعداد"	ٹيلي نشان	تعدد "خاندانن جو تعداد"
0	|	1
1	𝍸 ||	7
2	𝍸 𝍸 𝍸	15
3	𝍸 𝍸 ||	12
4	𝍸	5
5	||	2
6	||	2
7	|	1
كُل تعداد	---	$n = 45$

مثال 4: هڪ ڪمپني جي سرسري چونڊيل 1.5 لٽرن واري بوتلن ۾ ٿڏي مشروب جي مقدار جي ماپ (لٽرن ۾) ڪئي وئي جيڪا هيٺ ڏنل آهي. ٿڏي مشروب جي ماپ ٹيل مقدار جي غير مسلسل تعددي جدول ناهيو. نسبتي ۽ في سيڪڙو تعدادن پڻ لهو.

1.48	1.51	1.50	1.49	1.49	1.49	1.51	1.48	1.49	1.52
1.51	1.49	1.51	1.50	1.50	1.50	1.51	1.49	1.49	1.50

حل: مواد مقداري ۽ خاص طور سان مسلسل آهي. مختلف عدد 1.48, 1.49, 1.50, 1.51 ۽ 1.52 وڏندڙ ترتيب ۾ پنج جماعتون آهن. ٹيلي نشانين ۽ تعددن جي مدد سان اسين غير مسلسل تعددي جدول حاصل ڪريون ٿا. چوٿين ۽ پنجين ڪالمن ۾ نسبتي ۽ في سيڪڙو تعدادن پڻ معلوم ڪري لکيون ويون آهن.

جماعتي حدون ٿڏي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	ٹيلي نشان	تعدد "بوتلن جو تعداد"	نسبتي تعدد $\left(\frac{f}{n}\right)$	في سيڪڙو تعدد (%) $\left(\frac{f}{n}\times 100\right)$
1.48	||	2	$\frac{2}{20} = 0.1$	$\frac{2}{20}\times 100 = 10$
1.49	𝍸 ||	7	0.35	35
1.50	𝍸	5	0.25	25
1.51	𝍸	5	0.25	25
1.52	|	1	0.05	5
كُل تعداد	---	$n = 20$	1	100

(b) مسلسل جماعتن واري تعددي جدول (Frequency table with continuous classes):

جڏهن مواد مقداري (مسلسل يا غير مسلسل) هجي ۽ گهٽ ورجائڻ ۽ وڌيڪ ڦيرگهير وارا مشاهدا عددن جي ڪنهن خاص حد تائين ورهائيل هجن تہ پوءِ اسين مسلسل جماعتون (Continuous classes) استعمال ڪنداسين. اهي جماعتون اڪيلا عدد نہ آهن پر عددن جي وسعت (وقفا) آهن هر هڪ جماعت انهن عددن تي مشتمل هوندي آهي جيڪي جماعتي حدن جي اندر هوندا آهن هڪ مسلسل تعددي جدول مسلسل جماعتن سان گڏوگڏ ترتيبوار تعددن تي مشتمل هوندي آهي. اسين اڳيئي گذريل ڪلاس ۾ غير مسلسل مواد لاءِ تعددي تقسيم پڙهي چڪا آهيون هتي اسين ڏهائي جي ڪنهن بہ درجي واري مسلسل ۽ غير مسلسل مواد

KARACHIEDU.COM

جي بنيادي تصورن جي عمومي ڳالهه ڪنداسين ۽ انهن جو استعمال ڪنداسين. اسين پهريان انهن ڪجهه اهم اصطلاحن جو دور ڪنداسين ۽ بيان ڪنداسين جيڪي ان عمل ۾ فعال طور استعمال ٿين ٿا.

وسعت (Range): اهو ڏنل مواد جي سڀ کان وڏي ۽ سڀ کان ننڍي رقمن (مشاهدن) جو فرق آهي.

(سڀ کان ننڍي رقم) − (سڀ کان وڏي رقم) = وسعت ... (1)

جماعتي حدون (Class limits): هي اُهي عدد آهن جنهن سان جماعت جي سڃاڻپ ٿيندي آهي هر هڪ جماعت لاءِ هڪ سڀ کان ننڍو عدد هوندو آهي جنهن کي هيٺين جماعتي حد (Lower class limit) يعني (LCL) چئبو آهي ۽ سڀ کان وڏي عدد کي مٿين جماعتي حد (Upper class limit) يعني (UCL) چيئو آهي. ڪنهن خاص جماعت ۾ اهي سڀ مشاهدا شامل هوندا جيڪي LCL کان وٺي UCL تائين هجن.

جماعتي وڪڙ يا ويڪر (Class interval/width) (h): ڪنهن جماعت جي ماپ/ ڊيگهه کي جماعتي وڪڙ يا ويڪر چئبو آهي ۽ اهو ڪن به بن لاڳيتن LCLs، يا VCLs جو فرق معلوم ڪري لهبو آهي. اسين عام طرح سان سيني جماعتن لاءِ مستقل جماعتي وڪڙ يا ويڪر استعمال ڪندا آهيون جنهن کي h سان ظاهر ڪبو آهي ۽ هيٺين ريت لهي سگهي ٿو.

$$h = \frac{1}{10^m}\left\lceil \frac{R}{K} \times 10^m \right\rceil \quad \ldots (2)$$

جڏهن ته جماعتن جو تعداد K، وسعت R ۽ مشاهدن ۾ وڏي ۾ وڏي ڏهائي درجن جو تعداد m آهي.

جيڪڏهن مواد غير مسلسل آهي ته پوءِ $m = 0$. جيڪڏهن مواد مسلسل آهي ۽ ان جون رقمون ڏهائي جي هڪ درجي تائين هجن ته پوءِ $m = 1$ ساڳي ريت m جون ٻيون قيمتون به لکبيون.نشاني $\lceil . \rceil$ سان مٿيون اندازو (Ceiling approximation) ظاهر ڪبو آهي جيڪو h جو سڀ کان ننڍو قطعي ملهه حاصل ڪرڻ لاءِ استعمال ڪبو آهي. هڪ سڃي عدد جو مٿيون اندازو ساڳيو سڃو عدد ٿيندو جڏهن ته ڏهائي اٽڪل جو مٿيون اندازو ان کان وڏو فوراً ايندڙ سڃو عدد ٿيندو. مثال طور: $\lceil 4 \rceil = 4$، $\lceil 1.6 \rceil = 2$، $\lceil 1.9 \rceil = 2$، $\lceil 7.5 \rceil = 8$.

جماعتن جو تعداد (K) (Number of classes): جماعتن جي تعداد کي K سان ظاهر ڪبو آهي. اها تعداد 5 کان 15 تائين هوندي آهي پر اهو مشاهدن جي تعداد ۽ وسعت تي منحصر ڪري ٿو. اها تعداد جيڪڏهن مليل نه هجي ته پوءِ احتياط سان چوندي يا لهي ويندي آهي. K جي تمام وڏي ملهه سان خراب گروهه بندي ۽ معلومات جو نقصان ٿيندو. ايڇ اسٽرجز (1926) (H- Sturges) مشاهدن جي تعداد n جو استعمال ڪندي جماعتن جو مناسب تعداد K لهڻ لاءِ هڪ اصول تجويز ڪيو. اسٽرجز جو اصول هن ريت بيان ڪجي ٿو.

$$K = \lceil 1 + 3.322 \log(n) \rceil \quad \ldots (3)$$

جڏهن ته log (n) جو مطلب، بنياد 10 سان n جو لاگرٿم آهي ۽ $\lceil . \rceil$ مٿيون اندازو آهي اها ڳالهه ذهن ۾ رکڻ گهرجي ته اسٽرج وارو اصول $15 \leq n \leq 200$ لاءِ وڌيڪ مناسب آهي . مثال طور: جيڪڏهن $n = 25$ ته پوءِ

$$K = [1 + 3.322 \log(25)] = [5.6439] = 6 \text{ جماعتون}$$

جماعتن جي وچ ۾ وٿي (d) (Spacing between the classes):

هڪ جماعت جي LCL ۽ ايندڙ جماعت UCL جي وچ ۾ مستقل فرق کي جماعتن جي وچ ۾ وٿي (d) چئبو آهي. جيڪڏهن m ڏهائي درجن جو وڏي ۾ وڏي تعداد آهي ته پوءِ

$$d = \frac{1}{10^m},\ m = 0, 1, 2, \ldots \quad \ldots (4)$$

غير مسلسل مواد لاءِ $m = 0$ ۽ $d = 1$، جيڪڏهن مواد ڏهائي جي هڪ درجي تائين مليل آهي ته پوءِ $m = 1$ ۽ $d = 0.1$. ڏهائي جي بن درجن واري مواد لاءِ $m = 2$ ۽ $d = 0.01$

KARACHIEDU.COM

مسلسل تعددي جدول ٺاهڻ جو طريقو:

مقداري مواد لاءِ مسلسل تعددي جدول ٺاهڻ جا قدم:

1. مشاهدن جو تعداد (n) لکو ۽ مواد جي سجاڻپ ڪريو: مسلسل يا غير مسلسل مواد ۾ وڏ ڏهائي درجن جو تعداد (m) پڻ لکو.
2. مساوات (1) جو استعمال ڪندي وسعت (R) لهو ۽ اسٽرج جو اصول مساوات (3) استعمال ڪندي جماعتن جو تعداد (K) لهو جيڪڏهن مليل نه هجي ته
3. مساوات (2) جو استعمال ڪندي جماعتي ويڪر (h) ويڪر معلوم ڪريو ۽ مساوات (4) جو استعمال ڪندي جماعتن جي وچ واري وٿي (d) لهو. انتهائي حالتن ۾ اسان کي "$h+d$" کي جماعتي ويڪر طور ڪٽٽو پوندو آهي يا هڪ وڌيڪ جماعت جو اضافو ڪرڻو پوندو.
4. جماعتي حدون معلوم ڪريو ته جيئن پڪ ٿيئي ته سڀ مشاهدا K جماعتن ۾ شامل ٿيا آهن. اسين سڀ کان ننڍي مشاهدي کي شروعاتي LCL طور استعمال ڪري سگهون ٿا. شروعاتي UCL هن ريت لهبي: $UCL = LCL + h - d$ شروعاتي LCL ۽ UCL ۾ مسلسل h کي جوڙ ڪندي ۽ بين جماعتن جا LCLs ۽ VCLs لکو.
5. مسلسل تعددي جدول جي پهرين ڪالم ۾ جماعتي حدن کي جماعتن طور لکو.
6. مواد کي جماعتن ۾ ورهائڻ لاءِ ٻيئي ڪالم ۾ ٿيلي نشانين جو استعمال ڪريو يا رقمن کي لکو. ٿيلي نشانين کي ترجيح ڏني ويندي آهي.
7. سڀني جماعتن جي تعددن کي ٿئين ڪالم ۾ لکڻ لاءِ ٿيلي نشانن يا رقمن کي ڳڻيو.

مثال 1:

هڪ دُڪان ۾ 60 لڳاتار ڏينهن لاءِ بجلي جو استعمال (kwh ۾) هيٺين ريت ڏنل آهي. ٿيلي نشان وارو طريقو استعمال ڪندي تعددي تقسيم ناهيو.

106	107	76	82	109	107	115	93	187	95	139	119	115	128	115
123	125	111	92	86	70	126	68	130	129	194	82	90	158	118
123	146	80	136	137	110	141	152	104	111	140	184	204	178	75
113	162	131	99	185	181	84	486	100	98	148	90	110	107	78

حل: هتي $n = 60$ مواد غير مسلسل آهي ۽ $m = 0$ ، $R = 204 - 68 = 136$ جماعتن جي تعداد لاءِ اسٽرج جو اصول استعمال ڪندي:

$$K = \lceil 1 + 3.322 \log(60) \rceil = \lceil 6.9070 \rceil = 7.$$

$$h = \left\lceil \frac{136}{7} \right\rceil = \lceil 19.4285 \rceil = 20, \quad \text{۽} \quad d = 1.$$

شروعاتي LCL=68 سان شروعاتي UCL = 68+20–1=87

انهن ۾ h=20 کي جوڙ ڪندي اسان کي ٻيون حدون مليون.

پهرين ڪالم ۾ جماعتي حدون، ٻيئي ڪالم ۾ ٿيلي نشان ۽ ٽئين ڪالم ۾ تعددن کي لکندي، اسان گهربل تعددي جدول حاصل ڪئي.

تعددي تقسيم

جماعتي حدون	ٿيلي نشان	تعداد
68 – 87	𝍸 𝍸	10
88 – 107	𝍸 𝍸 |||	13
108 – 127	𝍸 𝍸 𝍸	15
128 – 147	𝍸 𝍸	10
148 – 167	||||	4
168 – 187	𝍸 |	6
188 – 207	||	2
کُل تعداد	---	$n = 60$

KARACHIEDU.COM

مثال 2: 24 جڳهن تي هڪ تار جي ريل جي قطر جون ٿيل ماپون تقريبا 0.01mm تائين درست آهن:
2.10, 2.29, 2.32, 2.21, 2.14, 2.22, 2.28, 2.18, 2.17, 2.20, 2.23, 2.13, 2.26, 2.10, 2.21, 2.17, 2.28, 2.15, 2.34, 2.27, 2.11, 2.23, 2.25, 2.16.
تعددي ورهاست ناهيو.

حل: هتي $n = 24$ ۽ ڏهائي جي ٻن درجن تائين مسلسل مواد آهي. تنهنڪري $m = 2$ ۽

$$R = 2.34 - 2.10 = 0.24 \quad \text{۽} \quad K = \lceil 1 + 3.322\log(24) \rceil = 6$$

$$h = \frac{1}{100}\left\lceil \frac{R}{K} \times 100 \right\rceil = 0.04 \,،\quad d = \frac{1}{100} = 0.01$$

LCL=2.10 ۽ $h = 0.04$ سان شروعات ڪندي ڇهه جماعتون آهن.
2.10-2.13، 2.14-2.17، 2.18-2.21، 2.22-2.25، 2.26-2.29، 2.30-2.33.
پر 2.34 ڪنهن به جماعت ۾ شامل نٿو ڪري سگهجي. ان انتهائي حالت ۾ اسين جماعتي ويڪر $h + d = 0.05$ استعمال ڪنداسين گهربل ڇهه جماعتون آهن: 2.10-2.14، 2.15-2.19، 2.20-2.24، 2.25-2.29، 2.30-2.34، 2.35-2.39 ۽ قطر جي ماپن واري گهربل تعددي ورهاست آهي.

تعددي جدول

جماعتي حدون	2.10 – 2.14	2.15 – 2.19	2.20 – 2.24	2.25 – 2.29	2.30 – 2.34	2.35 – 2.39	ڪُل تعداد
ٽيلي نشان	|||	𝍸	𝍸 |	𝍸 ||	|||		---
تعدد	3	5	6	6	3	0	$n = 24$

ڏيان ۾ رکو ته: مثال 2 ۾، 2.34 کي شامل ڪرڻ لاءِ اسان رڳو هڪ وڌيڪ جماعت جو اضافو ڪري سگهون ٿا. جدول هن ريت ٿيندي.

ڪلاس حدون	2.10 – 2.13	2.14 – 2.17	2.18 – 2.21	2.22 – 2.25	2.26 – 2.29	2.30 -2.33	2.34 – 2.37
ٽيلي نشان	||||	𝍸	||||	||||	𝍸 ||	|	|
تعدد	4	5	4	4	5	1	1

مسلسل جماعتن واري گروهي تعددي جدولن جا ڪجهه ٻيا مکيه اصطلاح:

حقيقي جماعتي حدون (Class boundaries):
اُهي عدد جيڪي هڪ جماعت کي پاسي واري جماعتن کان ڌار ڪن حقيقي جماعتي حدون ڪوٺبا آهن.
هڪ جماعت لاءِ، ان جي هيٺين حقيقي جماعتي حد (LCB) ۽ مٿين حقيقي جماعتي حد (UCB) ترتيبوار LCL ۽ UCL مان هيٺين ريت حاصل ڪبيون آهن.
هڪ جماعت لاءِ: $\text{LCB} = \text{LCL} - \frac{d}{2}$ ۽ $\text{UCB} = \text{UCL} + \frac{d}{2}$ جڏهن ته d جماعتن جي وچ ۾ وٿي آهي.

جماعتي نشان يا وچيان ٽپڪا (Class marks/mid points):
جماعتي نشان يا وچيان ٽپڪا x سان ظاهر ڪبا آهن. اهي مسلسل جماعتن واري گروهي مواد جي جماعتن جي جماعتي حدن يا حقيقي جماعتي حدن جون حسابي سراسريون هوندیون آهن.
هڪ جماعت لاءِ: $x = \frac{\text{LCL}+\text{UCL}}{2}$ يا $x = \frac{\text{LCB}+\text{UCB}}{2}$

مجموعي تعدد (Cumulative Frequency): لفظ "Cumulative" جو مطلب آهي ته لاڳيتو جوڙ سان ڪنهن شي جو وڌڻ يا وڌو ٿيڻ جيڪڏهن اسين جماعتن جي تعددن کي هڪ ٻيئي پٺيان جوڙ ڪندا رهون. هر پيري ڪل تعدد ۾ ايندڙ جماعت جي تعدد کي جوڙ ڪندي اسين مجموعي تعدد حاصل ڪنداسين ڪنهن خاص جماعت لاءِ مجموعي تعدد، ان جماعت تائين سيني تعددن جي جوڙ اُپٽ هوندي آهي.

KARACHIEDU.COM

مثال 3: هيٺ ڏنل تعددي جدول لاءِ حقيقي جماعتي حدون، جماعتي نشان ۽ مجموعي تعدد لهو.

جماعتي حدون	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
تعدد	3	5	9	14	11	6	2

حل: هتي $n = 50$ ۽ $d = 0.1$ حقيقي جماعتي حدون، جماعتي نشان ۽ مجموعي تعدد هيٺين جدول ۾ معلوم ڪيا ويا آهن

جماعتي حدون	حقيقي جماعتي حدون	جماعتي نشان	تعدد	مجموعي تعدد
7.1-7.3	7.05-7.35	7.2	3	3
7.4-7.6	7.35-7.65	7.5	5	3+5=8
7.7-7.9	7.65-7.95	7.8	9	17
8.0-8.2	7.95-8.25	8.1	14	31
8.3-8.5	8.25-8.55	8.4	11	42
8.6-8.8	8.55-8.85	8.7	6	48
8.9-9.1	8.85-9.15	9.0	2	n = 50
ڪُل تعداد	----	-----	**n = 50**	----

نوٽ ڪريو ته:

1. اسين ڏسي سگھون ٿا هڪ جماعت جي UCB ۽ ان ڪانپوءِ ايندڙ جماعت جي LCB ساڳيون آهن.
2. شروعاتي LCB ۾ h ڪي لاڳيتو جوڙ ڪرڻ سان اسين باقي بچيل سڀ جماعتون حاصل ڪريون ٿا.
3. شروعاتي جماعتي نشان ۾ "h" جوڙ ڪرڻ سان اسان باقي بچيل سڀ جماعتي نشان حاصل ڪري سگھون ٿا.
4. آخري جماعت جي مجموعي تعدد سڀني مشاهدن جو ڪُل تعداد آهي.

مشق 22.1

1. ڏنل مواد جي قسم جي سڃاڻپ ڪريو (غير مسلسل يا مسلسل يا نالياورو يا قطاري) ۽ مشاهدن جي ڪُل تعداد لکو.
   a. 30 ڏينهن لاءِ شاپنگ مال ۾ روز ايندڙ ماڻهن جو تعداد
   b. هڪ مهيني لاءِ، هڪ ماڻهو جو ورزش گاهه ۾ گذاريل وقت (روزانو منٽن ۾)
   c. 45 گاڏي جي بيٽرين جي عمر (سالن ۾)
   d. 2 مهينن لاءِ بجلي جو استعمال (Kwh في ڏينهن ۾)
   e. هڪ ڪلاس جي 55 شاگردن جو وزن (ڪلو گرامن ۾)
   f. 20 ماڻهن جي پرڻ جو رنگ.
   g. هڪ ڪلاس جي 70 شاگردن جا حاصل ڪيل گريڊ
   h. 10 ماڻهن جي ڪوويڊ (COVID) جي تشخيصي ٽيسٽ جا نتيجا (مثبت يا منفي)
   i. اسڪول جي 30 استادن جي ازدواجي حيثيت
   j. توهان جي ڪلاس جي شاگردن جي مستقل رهائش جو ضلعو.
2. هڪ اسڪول جا 20 شاگرد جيڪي ڏيهي دوري تي وڃن پيا انهن جي تعليمي درجن (پڙهائي جي موجوده ڪلاس) جي گروهي تعددي جدول ناهيو. تعليمي درجا آهن:
   VIII, X, X, VIII, VI, IX, X, IX, X, VIII, VII, VIII, VI, X, VI, V, IV, VII, IX, IX.
3. هڪ ٻولي سکڻ واري ڪورس ۾ حاضر ٿيڻ لاءِ 20 شاگردن آمدورفت لاءِ جيڪي طريقا استعمال ڪيا اُهي هيٺ ڏنل آهن. في سيڪڙو تعدد سان گڏ گروهي تعددي جدول ناهيو.

بس	پنڌ	پنڌ	موٽر گاڏي	موٽر سائيڪل	پنڌ	موٽر گاڏي	بس	پنڌ	موٽر سائيڪل	پنڌ
بس	بس	موٽر گاڏي	پنڌ	موٽر گاڏي	بس	موٽر گاڏي	پنڌ	موٽر گاڏي	بس	موٽر گاڏي

SEEDU.COM

4. گروهي تعددي ورهاست ۾ 40 خاندانن جي جوابن جي درجه بندي ڪريو جڏهن انهن کان پڇيو ويو ته اُهي ڪيترا پيرا شهر کان ٻاهر موڪلون گذارينداآهن. نسبتي تعدد پڻ لهو

اڪثر	هميشه	تمام گهٽ	ڪڏهن ٻه نه	ڪڏهن ڪڏهن	اڪثر	تمام گهٽ	ڪڏهن ٻه نه
ڪڏهن ڪڏهن	ڪڏهن ٻه نه	تمام گهٽ	ڪڏهن ڪڏهن	هميشه	ڪڏهن ڪڏهن	ڪڏهن ٻه نه	ڪڏهن ڪڏهن
ڪڏهن ٻه نه	اڪثر	اڪثر	ڪڏهن ڪڏهن	هميشه	هميشه	ڪڏهن ڪڏهن	ڪڏهن ڪڏهن
اڪثر	اڪثر	هميشه	تمام گهٽ	هميشه	ڪڏهن ڪڏهن	تمام گهٽ	اڪثر
هميشه	اڪثر	ڪڏهن ٻه نه	ڪڏهن ٻه نه	ڪڏهن ڪڏهن	هميشه	ڪڏهن ٻه نه	هميشه

5. تعددي جدول ۾ مختلف اسڪولن جي نگران شاگردن (پريفيڪٽس) جي ٽوپين جي رنگن کي ترتيب ڏيو

سائو	ناسي	ناسي	ڪارو	نيلو	سائو	ناسي	ڪارو	نيلو	ڪارو
ڳاڙهو	ڪارو	سائو	ڳاڙهو	نيلو	ڳاڙهو	ڪارو	ڳاڙهو	سائو	نيلو

6. هڪڙي ڪلاس تسيٽ ۾ 25 شاگردن جون 5 مان ڪنيل مارڪون هيون:
4.0,0.5,4.5,1.0,3.5,3.5,5.0, 2.5, 4.0, 2.5, 1.0, 2.0, 4.0, 3.5, 0.0, 3.0, 5.0, 1.0, 2.0, 2.0, 4.5, 2.5, 3.0, 3.5, 1.5
غير مسلسل جماعتن ۾ نسبتي تعددن سان گڏ تعددي جدول ٺاهيو.

7. ٽيسٽ کان هڪ ڏينهن اڳ ۾ هڪ ويب سائيٽ تان هڪ اُستاد جا ليڪچر هر هڪ ڪلاڪ ۾ جيترا دفعا ڊائون لوڊ ٿيا ان جا نتيجا هي آهن.
1, 1, 2, 1, 3, 3, 4, 1, 4, 1, 2, 3, 3, 2, 4, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 0, 0, 1
غير مسلسل تعددي جدول ۾ مواد جي درجه بندي ڪريو.

8. هڪ ڪلاس ۾ 18 ڏينهن ۾ غير حاضر شاگردن جو تعداد هيٺ ڏنل آهي.
4, 3, 0, 1, 2, 5, 6, 8, 10, 7, 11, 15, 13, 14, 3, 4, 12, 12
مواد جي مسلسل جماعتن سان گڏ تعددي جدول ٺاهيو.

9. ڪاليج جي 40 شاگردن جا وزن تقريباً پائونڊن ۾ هن ريت آهن.
138, 148, 146, 146, 119, 164, 152,
173, 158, 154, 150, 144, 142, 140, 165, 132,150, 147, 147, 153, 144, 156, 135, 126, 140, 125, 168, 157, 138, 135, 149, 136, 135, 142, 161, 145,176, 163, 145, 128
ان مواد جي مسلسل تعددي جدول ٺاهيو حقيقي جماعتي حدون، جماعتي نشان ۽ مجموعي تعددون پڻ لهو

10. ساڳي ملهه واري 48 رزسٽرن (Resistors) جي هڪ ٽولي جي روڪ (Resistance) جي قيمت اوهم ۾ هن ريت آهي.
21.0, 22.4, 22.8, 21.5, 22.6, 21.1, 21.6, 22.3, 22.9, 20.5, 21.8, 22.2, 21.0, 21.7, 22.5, 20.7, 23.2, 22.9, 21.7, 21.4, 22.1, 22.2, 22.3, 21.3, 22.1, 21.8, 22.0, 22.7, 21.7, 21.9, 21.1, 22.6, 21.4, 22.4, 22.3, 20.9, 22.8, 21.2, 22.7,21.6, 22.2, 21.6, 21.3, 22.1, 21.5, 22.0, 23.4, 21.2.
مسلسل تعددي جدول ٺاهيو. مجموعي ۽ في سيڪڙو تعددون پڻ لهو.

11. ڏاتو جي 50 ٽڪرن جو مايو (ڪلوگرامن ۾) 0.1 ڪلو گرامن تائين تقريباً درست ماپيو ويو ۽ اهو هيٺ ڏنل آهي. ماين جي تعددي ورهاست ٺاهيو. نسبتي ۽ في سيڪڙو تعددون پڻ لهو.

8.0	8.3	7.7	8.1	7.4	8.6	7.1	8.4	7.4	8.2	8.4	8.8	7.9	8.1	8.2	7.5	8.3
8.8	8.0	7.7	8.3	8.2	7.9	8.5	7.9	8.0	8.4	7.2	8.7	8.0	9.1	8.5	7.6	8.2
7.8	7.8	8.7	8.5	8.4	8.5	8.1	7.8	8.2	7.7	7.5	8.5	8.1	7.3	9.0	8.6	

(ii) 22.1 برابر جماعتي وقفن وارا ڪالمي نقشا (Histogram) ٺاهڻ:

مقداري مواد جي گراف واري اظهار لاءِ ڪالمي نقشا استعمال ٿيندا آهن. ان ۾ مسلسل ۽ غير مسلسل جماعتن واريون تعددي جدولون ۽ لاڳاپيل تصور استعمال ٿيندا آهن. پر وارن مستطيلن جو استعمال ڪندي ڪالمي نقشو ڪڍيو ويندو آهي. جماعتن ۾ عددن جي ورهاست سان مستطيلن جي پاڻ ۾ نشان هنيا ويندا

آهن ۽ مستطيلن جون ايراضيون يا اُوچائيون جماعتي تعددن سان متناسب هونديون آهن. برابر جماعتي وقفن واري ڪالمي نقشن ۾ مستطيلن جون ٻئي ايراضيون ۽ اُوچائيون تعدد سان متناسب هونديون آهن.

غير مسلسل تعددي جدولن سان واسطو رکندڙ ڪالمي نقشن ۾، مستطيلن جا پايا مواد جي مختلف عددن کي ظاهر ڪن ٿا ۽ اُوچائيون عام طرح سان جماعتن جي تعددن کي ظاهر ڪن ٿيون. هر هڪ مستطيل جي ويڪر مستقل جماعتي وقفي سان ڪٽندي آهي.

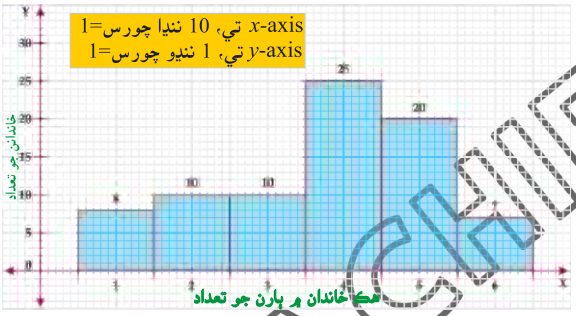
برابر جماعتي وقفن واري مسلسل تعددي جدولن سان واسطو رکندڙ ڪالمي نقشن ۾ مستطيلن جا پايا حقيقي جماعتي حدن کي ظاهر ڪن ٿا ۽ اُوچائيون عام طرح سان جماعتن جي تعددن کي ظاهر ڪندیون آهن. هر هڪ مستطيل جي ويڪر جماعتي وقفي جي برابر هوندي آهي.

ڪالمي نقشا ڪيڏ وقت محورن کي چٽي طرح ليبل ڪرڻ گهرجي ۽ پئمانن کي بيان ڪرڻ گهرجي. x-محور (x-axis) 0 کان شروع ناهي ڪرڻو. y- محور (y-axis) 0 کان لازمي شروع ٿيڻ گهرجي. تعددن کي مستطيلن جي مٿان پڙ لڳائڻ گهرجي. هيٺين مثالن ۾ ڪالمي نقشا ٺاهڻ جي طريقي کي واضح ڪيو ويو آهي.

مثال 1: 80 خاندانن جو هيٺيون مواد استعمال ڪندي، ڪوئن ۾ هر هڪ خاندان جي ٻارن جي تعداد لاءِ ڪالمي نقشو ٺاهيو.

هڪ خاندان ۾ ٻارن جو تعداد	1	2	3	4	5	6
خاندانن جو تعداد	8	10	10	25	20	7

حل:



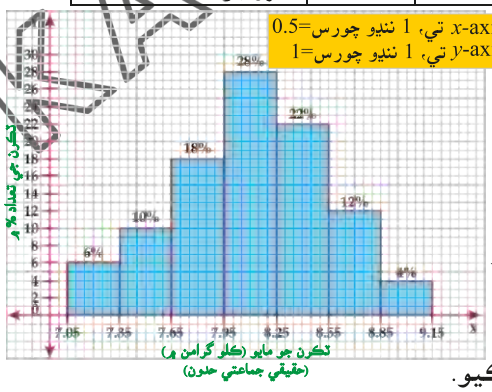
مواد هڪ غير مسلسل تعددي جدول ظاهر ڪري ٿو x-axis تي ساڳيئي وقفي وارين جماعتن کي ظاهر ڪندڙ مختلف عدد 1, 2, 3, 4, 5, 6 لکندي، ان کانپوءِ 25 تائين سڀني تعددن کي شامل ڪرڻ لاءِ مناسب پئماني سان تعددن کي y-axis تي لکندي جيڪي 0 کان شروع ٿين ٿا. مستطيلن کي ناهيندي جن جا برابر ويڪر وارا پايا مختلف عددن تي آهن ۽ اُوچائين کي تعددن جي برابر ڪٽندي اسان هيٺيون ڪالمي نقشو حاصل ڪيو. محورن کي ليبل ڪيو ويو آهي ۽ پئمانن کي بيان ڪيو ويو آهي.

مثال 2: هيٺين ورهاست لاءِ في سيڪڙو تعددي وارو ڪالمي نقشو ٺاهيو.

ٽڪر جو مايو (ڪلوگرامن ۾)	7.1 - 7.3	7.4 - 76	7.7 - 7.9	8.0 - 8.2	8.3 - 8.5	8.6 - 8.8	8.9 - 9.1
ٽڪرن جو تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: ڏاڻائي جي هڪ درجي تائين مسلسل مواد جي مسلسل تعددي جدول ڏنل آهي. تہ پوءِ $m = 1, n = 50$ ۽ $d = 0.1$

حقيقي جماعتي حدون آهن: 7.35 - 7.65, 7.65 - 7.95, 7.95 - 8.25, 8.25 - 8.55, 8.55 - 8.85, 8.85 - 9.15. انهن کي x-axis تي ۽ واسطيدار في سيڪڙو تعددن 4, 12, 22, 28, 18, 10, 6 کي y-axis تي ترتيبوار پئمانن سان لکندي $h = 0.3$ ويڪر وارن ۽ پاسي وارن مستطيلن کي ناهيندي جن جا پايا حقيقي جماعتي حدن تي آهن ۽ اُوچائيون في سيڪڙو تعددن جي برابر آهن. اسان گهربل في سيڪڙو وارو ڪالمي نقشو حاصل ڪيو.



LARACHIEDU.COM

22.1 (iii) غير مساوي جماعتن وارا کالمي نقشا ٹاهڻ (Construct histograms with unequal class intervals):

غير مساوي جماعتن واري کالمي نقشن واري صورت ۾ پاسي وارا مستطيل ناهبا آهن ته جيئن انهن جون ايراضيون (نہ کي اوچائيون) تعددن سان متناسب هجن. اهو ڪرڻ لاءِ اسان مستطيلن جون ترميم ٿيل اُوچائيون (Adjusted heights) بيان ڪنداسين متناسب ايراضين ۽ تعددن جي پک ڪرڻ لاءِ جيڪڏهن f^* ۽ h^* هڪ جماعت جي ترتيبوار تعدد ۽ اوچائي آهن ته پوءِ

$$\text{مستطيل جي ترميم ٿيل اُوچائي} = {}^*\text{تہ جيئن} = \frac{f^*}{h^*} \qquad (1)$$

$$\text{مستطيل جي ايراضي} = {}^*\text{ويڪر} \times \text{اُوچائي} = h^* \times \frac{f^*}{h^*} = f^* \qquad (2)$$

مساوات (i) مان، اسين ڏسون ٿا ته ترميم ٿيل اُوچائيون f^* سان تناسب ۾ آهن. پر مساوات (ii) ۾ ايراضيون تناسب ۾ آهن اها اسان جي گهرج پوري ڪري ٿي. غير مساوي جماعتي وقفن واري کالمي نقشن کي ناهڻ جا قدم اهي سڳيا آهن جيڪي اڳ ۾ هڻا پر اسان کي ترميم ٿيل اُوچائيون y-axis تي لازمي لکڻيون پونديون.

مثال: هيٺين مواد لاءِ غير مساوي جماعتي وقفن وارو کالمي نقشو ناهيو

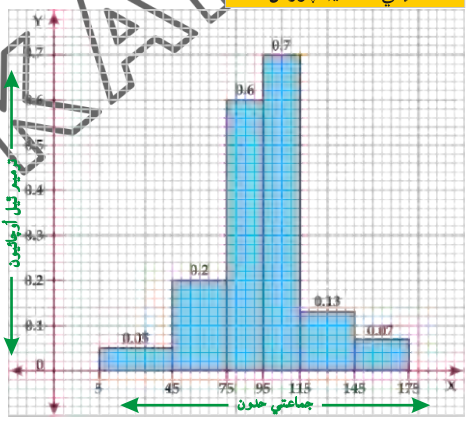
جماعتي حدون	10 - 40	50 - 70	80 - 90	100 - 110	120 - 140	150 - 170
تعدد	2	6	12	14	4	2

حل: اسين ڏسي سگهون ٿا ته ڏنل مواد غير مساوي جماعتي وقفن واري تعددي جدول ڏيکاري ٿو. سپ کان اڳ ۾، اسين حقيقي جماعتي حدون ۽ ترميم ٿيل اُوچائيون لهنداسين. هتي $d = 10$

جماعتي حدون	حقيقي جماعتي حدون	جماعتي وقفا (h^*)	تعدد (f^*)	مستطيلن جون ترميم ٿيل اُوچائيون (f^* / h^*)
10 – 40	5-45	40	2	$\frac{2}{40} = 0.05$
50 – 70	45-75	30	6	$\frac{6}{30} = 0.2$
80 – 90	75-95	20	12	0.6
100 – 110	95-115	20	14	0.7
120-140	115-145	30	4	≈ 0.13
150-170	145-175	30	2	≈ 0.07

x-axis تي حقيقي جماعتي حدون ۽ y-axis تي ترميم ٿيل اُوچائيون لکندي، اسين پنهنجي جماعتن جا مستطيل ناهيون ٿا جن جي ويڪر غير مساوي جماعتي وقفن جي برابر آهي ۽ اُوچائيون برابر آهن. ترميم ٿيل اُوچائين جي جيڪي مٿيئن جدول ۾ معلوم ڪري چڪا آهيون. اهڙي طرح اسان غير مساوي جماعتي وقفن وارو کالمي نقشو حاصل ڪيو آهي. اسين تصديق ڪري سگهون ٿا ته مستطيلن جون ايراضيون متناسب آهن ۽ خاص طور سان برابر آهن تعددن جي. هتي

x-axis تي، 1 ننڍو چورس=5
y-axis تي، 5 ننڍا چورس=0.1



$$\text{مستطيل -1 جي ايراضي} = 40 \times 0.05 = 2$$
$$\text{مستطيل -2 جي ايراضي} = 30 \times 0.2 = 6$$
$$\text{مستطيل -3 جي ايراضي} = 20 \times 0.6 = 12$$

۽ اهڙي ريت اڳيان ۾

KARACHIEDU.COM

22.1 (iv) تعدي گھٽ پاسي جي جوڙجڪ ڪرڻ (Construct a frequency polygon):

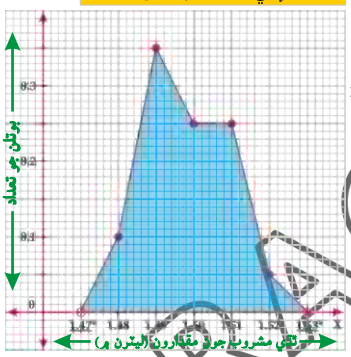
تعددي گھٽ پاسو ان مقداري مواد جي گراف واري اظهار جو هڪ طريقو آهي جيڪو تعددي ورهاست ۾ ترتيب ڏنل هوندو آهي. اسين اهڙا گراف اڪثر اخبارن ۾ (خاص طور سان ڪاروباري حصي ۾)، موسم جي اڳڪٿي واري خبرن ۾، ۽ ڪرڪيٽ ميچ جي انگ اکر (Stats) ۾ (جيڪو Statistics جو مخفف آهي) لفظ گھٽ پاسو (Polygon) سان مراد پلين (Plane) جي هڪ اهڙي بند شڪل جيڪا گھٽ ۾ گھٽ ٽن ليڪ ٽڪرن کي ملائي ۾ ڳنڍيڻ سان نهي. مثال طور ٽڪنڊا، چورس، پنج ڪُنڊا وغيره. هتي سڪنداسين ته اهو جاميٽري جو تصور تعددي ورهاست سان ڪيئن لاڳاپيل آهي. تعددي گھٽ پاسا ورهاست جي شڪل سجاڻڻ لاءِ جديد شماريياتي تجزين ۾ استعمال ٿيندا آهن.

تعددي گھٽ پاسي کي ناهڻ لاءِ ٽبڪا (x, y) لڳائبا جڏهن ته x- محددي (Abscissa) جماعتي نشان آهن ۽ y-محددي (Ordinates) جماعتي تعددون آهن. ٻيو ته اسين 0 تعدد وارن ٻن فرضي جماعتن کي شامل ڪنداسين، هڪ شروعات ۾ ۽ ٻي آخر ۾ ۽ انهن لاءِ واسطيدار ٽبڪا x-axis تي لڳائينداسين. آخر ۾ گھربل بند شڪل حاصل ڪرڻ لاءِ، اسين گراف تي پکڙيل ٽبڪن کي ليڪ ٽڪرن سان ملائينداسين. ان بند شڪل کي تعددي گھٽ پاسو چئبو آهي جنهن جو پاڙو x-axis تي هوندو آهي ۽ ان جون چوٽيون تعددن کي ظاهر ڪن ٿيون. وضاحت خاطر، پريل نشان (•) حقيقي جماعتن کي ظاهر ڪن ٿا ۽ خالي نشان (○) فرض ڪيل جماعتن کي ظاهر ڪن ٿا. محورن کي ليبل ڪرڻ ۽ مناسب پئماني کي بيان ڪبو.

مثال 1: هيٺين مواد لاءِ نسبتي تعددي گھٽ پاسو ناهيو.

ٽني مشروب جي مقدار لٽرن ۾	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل: ڏنل مواد غير مسلسل تعددي جدول کي ظاهر ڪري ٿو مختلف عدد: 1.48، 1.49، 1.50، 1.51، 1.52 جماعتي نشان (x) آهن تعددون (y) آهن: 2، 7، 5، 5، 1 سپ کان اڳ ۾ اسين نسبتي تعدون لهنداسين جيڪي هي آهن 0.1، 0.35، 0.25، 0.25، 0.05 ۽ 0 ٻن فرضي جماعتن سان لڳايل ٽبڪا آهن (1.47*, 0)، (1.48, 0.1)، (1.49, 0.35)، (1.50, 0.25)، (1.51,0.25)، (1.52, 0) ۽ (1.53*, 0) ٽبڪن کي ليڪ ٽڪرن سان ملائيندي، اسان نسبتي عددي گھٽ پاسو حاصل ڪيو.

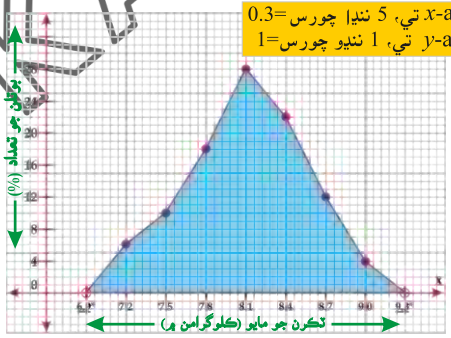


مثال 2: هيٺين ورهاست لاءِ، في سيڪڙو تعددي گھٽ پاسو ناهيو.

ٽڪرن جو ماپ (ڪلوگرامن ۾)	7.1 - 7.3	7.4 - 7.6	7.7 - 7.9	8.0 - 8.2	8.3 – 8.5	8.6 – 8.8	8.9 – 9.1
ٽڪرن جو تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: مواد، مساوي جماعتي وقفي $h = 0.3$ واري مسلسل تعددي ورهاست ظاهر ڪري ٿو. لڳائڻ وارا ٽبڪا (x, y) آهن جڏهن ته x جماعتي نشانن کي ظاهر ڪري ٿو جيڪي آهن: 7.2، 7.5، 7.8، 8.1، 8.4، 8.7، 9.0 ۽ y في سيڪڙو تعددن کي ظاهر ڪري ٿو جيڪي آهن. 6، 10، 18، 28، 22، 12، 4.

فرضي جماعتي نشان شامل ڪندي ۽ مناسب پئمائن کي استعمال ڪندي گھربل في سيڪڙو تعددي گھٽ پاسو هيٺين ٽبڪن سان ناهيو ويو آهي. (6.9*, 0)، (7.2, 6)، (7.5, 10)، (7.8, 18)، (8.1, 28)، (8.4, 22)، (8.7, 12)، (9.0, 4) ۽ (9.3*, 0)



WWW.SHEDU.COM

22.2. مجموعي تعددي ورهاست (Cumulative frequency distribution):

مجموعي تعددي ورهاست هڪ جدول آهي جنهن ۾ مٿيون حقيقي جماعتي حدون ۽ انهن سان واسطو رکندڙ مجموعي تعدون پڻ درج هوندیون آهن. اسين اڳيئي مجموعي تعددون جي لهڻ. بابت ڄاڻون ٿا. مجموعي تعددون انهن مشاهدن جي تعداد کي جوڙ ڪري لهبيون آهن جيڪي جماعتن جي UCBs کان ننڍا هوندا آهن ۽ اسين انهن مجموعي تعددن کي هيٺيون مجموعي تعددون "Less than Cumulat frequencies" چوندا آهيون اهي "0" کان شروع ۽ مشاهدن جي ڪُل تعداد "n" تي ختم ٿيندیون آهن. اسان کي شروع ۾ هڪ فرضي UCB شامل ڪرڻي پوندي جنهن جي مجموعي تعدد 0 هجي.

مٿيون مجموعي تعددون "The greater than cummulative frequencies" جماعتن جي LCB کان وڏن سيني مشاهدن کي جوڙ ڪرڻ سان لهبيون آهن. اهي "n" کان شروع ۽ "0" تي ختم ٿيندیون آهن. پر اسان عملي طور اڪثر هيٺيون مجموعي تعددون استعمال ڪندا آهيون. اڳتي ايندڙ بحث ۾ اسين سولائي خاطر "هيٺيون مجموعي تعددون" لاءِ اصطلاح "مجموعي تعدد" استعمال ڪنداسين.

22.2 (i) هڪ مجموعي تعددي جدول جي جوڙجڪ ڪرڻ:

گروهي مقداري مواد جي مجموعي تعددي جدول ناهڻ لاءِ هيٺيان قدم آهن.

1. مٿيون حقيقي جماعتي حدون ۽ مجموعي تعددون لهو.
2. شروع ۾، مجموعي تعدد 0 واري هڪ فرضي مٿيئن حقيقي جماعتي حد جو اضافو ڪريو.
3. سيني UCBs ۽ ترتيبوار مجموعي تعددن کي ظاهر ڪرڻ لاءِ هڪ جدول ناهيو.

مثال 1: هيٺيون مواد استعمال ڪندي هڪ مجموعي تعددي جدول ناهيو.

شاگردن جون مارڪون	1	2	3	4	5
شاگردن جو تعداد	2	5	4	3	1

حل: ڏنل مواد هڪ غير مسلسل تعددي ورهاست ظاهر ڪري ٿو.

هتي $d = 1$ ۽ $n = 15$ جماعتي حدن ۾ $\frac{d}{2}$ کي جوڙ ڪندي، UCBs کي لهڻ ۽ ان کانپوءِ مجموعي تعددن کي معلوم ڪندي اسان پاسي واري جدول حاصل ڪئي. شروع ۾ مجموعي تعدد "0" واري هڪ فرضي UCB شامل ڪندي جنهن جو ملهه *0.5 آهي، اسان گهربل مجموعي تعددي جدول حاصل ڪئي جيڪا آهي:

جماعتون	UCBs	تعددون	مجموعي تعددون
1	1.5	2	2
2	2.5	5	7
3	3.5	4	11
4	4.5	3	14
5	5.5	1	15 = n

شاگردن جون مارڪون (UCBs)	*0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	4.5
شاگردن جو تعداد (مجموعي تعددون)	0	2	7	11	14	15

مثال 2: بجلي جي استعمال جي مواد واري مجموعي تعددي جدول ناهيو.

بجلي جو استعمال (kWh)	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: ڏنل مواد هڪ مسلسل تعددي ورهاست آهي.

هتي $d = 1$ ۽ $n = 60$، UCBs آهن: 87.5. 107.5, 127.5, 147.5, 167.5, 187.5, 207.5

شروعات ۾ *67.5 ملهه واري فرضي UCB شامل ڪريو اسان وٽ هيٺين مجموعي تعددي جدول آهي.

بجلي جو استعمال (kWh)	*67.5	87.5	107.5	127.5	147.5	167.5	187.5	207.5
ڏينهن جي تعداد	0	10	23	38	48	52	58	60

KARACHIEDU.COM

22.2 (ii) مجموعي تعددي گهٽ پاسو ٺاهڻ:

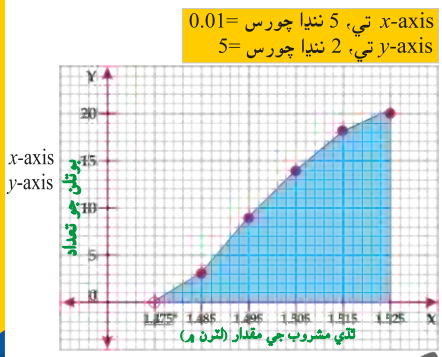
هڪ مجموعي تعددي ورهاست گراف وسيلي هڪ مجموعي تعددي گهٽ پاسو (Commutative frequency polygon) سان ظاهر ڪبي آهي ان کي لهر دار ليڪ (Ogive) پٽ چئبو آهي. اسين مجموعي تعددي جدول جي ٽپڪن (x, y) کي ظاهر ڪرڻ شروع ڪنداسين (x: UCBs ۽ y: مجموعي تعددون) ته پوءِ انهن کي ليڪ ٽڪرن سان ملايو. آخر ۾ اسين x-axis تي چوٽي واري ٽپڪي تان عمود ناهيندا سين ته جيئن هڪ بند شڪل ملي جيڪا گهربل (Ogive) يا مجموعي تعددي گهٽ پاسو آهي.

مثال 1: هيٺين مواد لاءِ هڪ Ogive (مجموعي تعددي گهٽ پاسو) ناهيو.

ٽڏي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل: هتي $n = 20$ ۽ $d = 0.01$، UCBs ۽ مجموعي تعددن کي لهندي اسان مجموعي تعددي جدول حاصل ڪريون ٿا جڏهن ته 1.475* هڪ فرضي شروعاتي UCB آهي.

ٽڏي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	1.475*	1.485	1.495	1.505	1.515	1.525
بوتلن جو تعداد	0	2	9	14	19	20

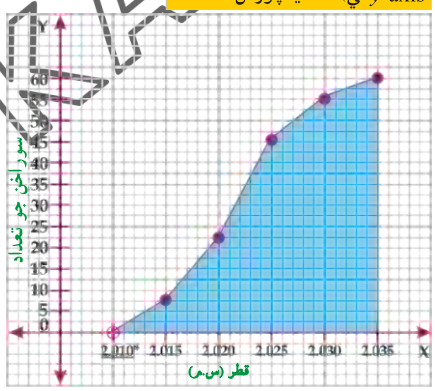


هاڻي، اسين گراف تي هي ٽپڪا ظاهر ڪريون ٿا: (1.475*, 0)، (1.485, 2)، (1.495, 9)، (1.505, 14)، (1.515, 19) ۽ (1.525, 20) انهن کي اسين ليڪ ٽڪرن سان ملائيندا سين ۽ آخر ۾ اسين گهربل Ogive يا مجموعي تعددي گهٽ پاسو حاصل ڪرڻ لاءِ آخري ٽپڪي کان x-axis ڏانهن هڪ عمود ڏيندا سين. محورن کي واضح طور ليبل ڪرڻ سان گڏ مناسب پئماڻن کي بيان ڪيو ويندو.

مثال 2: هڪ انجڻ ۾ ڪيل 60 سوراخن جي قطرن (سينٽي ميٽرن ۾) جي هيٺين ورهاست لاءِ Ogive ناهيو. اهو مواد ڪنهن خاص تحقيق ۾ ماپيل آهي.

قطر (س.م)	2.011 – 2.014	2.016 – 2.019	2.021 - 2.024	2.026 – 2.029	2.031 – 2.034
سوراخن جي تعداد	7	16	23	9	5

حل: ڏنل جدول هڪ مسلسل تعددي جدول آهي جنهن ۾ $n = 60$ ۽ $d = 0.002$ UCBs ۽ مجموعي تعددن جو استعمال ڪندي. اسان هڪ مجموعي تعددي جدول حاصل ڪئي جنهن ۾ ٽپڪا آهن: (2.010*, 0)، (2.010, 7)، (2.020, 23)، (2.025, 46)، (2.030, 55)، (2.035, 60) اهي ٽپڪا اسان کي گهربل Ogive يا مجموعي تعددي گهٽ پاسو ڏين ٿا.



LARACHEDU.COM

مشق 22.2

1. هيٺين مواد لاءِ في سيڪڙو کالمي نقشو، تعددي گھٽ پاسو، مجموعي تعددي جدول ۽ Ogive حاصل ڪريو.

شاگردن جون مارڪون	1	2	3	4	5
شاگردن جو تعداد	2	5	4	3	1

2. غير مساوي جماعتي وقفن واري هيٺين مراد لاءِ کالمي نقشو ناهيو.

جماعتي حدون	0-39	40-49	50-79	80-99
تعددون	6	8	12	4

3. ڏنل مواد لاءِ کالمي نقشو، تعدي گھٽ پاسو، مجموعي تعددي جدول ۽ Ogive ناهيو.

هفتيوار ڪمائيل رقم	20-40	50-70	80-90	100-110	120-140	150-170
ماڻهن جو تعداد	2	6	12	14	4	2

4. هيٺين مواد لاءِ کالمي نقشو، نسبتي تعددي گھٽ پاسو ۽ Ogive ناهيو.

جماعتي حدون	10.5-10.9	11.0-11.4	11.5-11.9	12.0-12.9	13.0-13.4
تعددون	2	7	10	12	8

22.3 مرڪزي رجحان جون ماپون (Measures of central tendency):

مواد ۾ مرڪزي ٽيڪي (Central point) جي چوڌاري سيني مشاهدن جي ميڙ ڪرڻ واري صلاحيت کي مرڪزي رجحان (Central tendency) چئبو آهي. مواد جو مرڪزي ٽيڪي کي مرڪزي رجحان جي ماپ (Measure of Central tendency) يا سولائي خاطر سراسري (Average) چئبو آهي. مرڪزي رجحان جي ماپ سڄي مواد کي هڪ واحد مرڪزي ٽيڪي سان ظاهر ڪري ٿي ۽ سڄي مواد جي مختصر ۽ جامع سڃاڻپ آهي. اسين عام طور عددن ۽ خاصيتن جي سراسرين بابت بار بار ٻڌلهائيندا آهيون مثال طور: هيٺين بيانن تي غور ڪريو.

1. "هڪ ڪلاس ۾ شاگردن جي اڪثريت B گريڊ حاصل ڪيو" هتي B گريڊ هڪ سراسري آهي.
2. "علي روزانو ورزش گاهه ۾ 45 منٽ گذاري ٿو" هتي علي ورزش گاهه (GYM) ۾ سراسري وقت في ڏينهن 45 منٽ گذاري ٿو. اهو واضح آهي ته هن شايد 45 منٽن کان گهٽ يا وڌيڪ وقت گذاريو هجي.
3. "T20 ۾ هڪ راندگر جو سراسري اسڪور" جيڪو منحصر ڪري ٿو انهن اسڪورن تي جيڪي هن سيني ميچن ۾ راند ڪري ڪيا سراسري اسڪور ڏار ڏار ڪيل اسڪورن کي عام ڪري ٿو.

22.3 (i). مرڪزي رجحان جي ماپن کي لهڻ

اسين عام طرح سان مواد جي سراسري يا مرڪزي رجحان جي ماپ سيني مشاهدن کي جوڙ ڪري ۽ پوءِ مشاهدن جي ڪُل تعداد سان ونڊ ڪندي حاصل ڪندا آهيون جيڪا خاص طور سان حسابي سراسري (arithmetic mean) آهي سراسرين لهڻ جا بيا به ڪيترائي طريقا آهن اسين هتي هيٺين پنجن قسمن تي غور ڪنداسين.

(1) حسابي سراسري (Arithmetic mean) (2) مڌياني سراسري (Median) (3) ڪثرتي سراسري (Mode)
(4) مهندسي سراسري (Geometric mean) (5) هارموني سراسري (Harmonic mean)

انهن سراسرين جا ڪجهه فائدا ۽ نقصان آهن جڏهن انهن جي هڪبئي سان پيٽ ڪجي، هڪ سراسري جو سپ ڪان سنو استعمال مواد جي قسم تي پڻ منحصر ڪري ٿو.

22.3 (i) (a) حسابي سراسري وصف وسيلي ۽ فرضي سراسري ڪان انحرافن (Deviation) جو استعمال ڪندي:

حسابي سراسري سيني مشاهدن جي وچ ۾ برابري واري اصول تي بيٺل آهي. اسين سيني n مشاهدن کي جوڙ اُپت وسيلي ڳڏائيندا آهيون ۽ پوءِ ان جوڙ اُپت کي n برابر حصن ۾ ورهائيندا آهيون. جيڪڏهن n عدد آهن ته پوءِ انهن جي حسابي سراسري (ظاهر ڪبو آهي x سان) آهي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1} x_i}{n} \quad \text{يا} \quad \bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \quad (1)$$

KARACHIEDU.COM

جڏهن ته "Σ" هڪ وڏو يوناني اکر سگما "SIGMA" آهي جيڪو جوڙ اُپت لاءِ استعمال ٿيندو آهي. نوٽ ڪيو ته:

- حسابي سراسري مواد جي وسعت اندر هڪ يگانو عدد آهي
- جيڪڏهن مواد مقداري هجي ته پوءِ اسين حسابي سراسري سڌي ريت لهي سگهون ٿا نالياواري يا قطاري مواد لاءِ اسين ترتيبوار عددي علامتون يا درجا استعمال ڪندا آهيون.
- حسابي سراسري نالياواري مواد لاءِ موزون ناهي

وصف يا سڌي طريقي وسيلي حسابي سراسري:

سڌي طريقي يا وصف وسيلي مان مراد آهي ته مشاهدن جي جاءِ يا پئماني کي بدلائڻ کانسواءِ ڏنل مواد مان سڌي ريت حسابي سراسري لهڻ.

وصف وسيلي يا سڌي طريقي ۾ اسين هيٺيان فارمولا استعمال ڪندا آهيون.

غير گروهي مواد لاءِ

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum x}{n}$$

گروهي مواد لاءِ

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum f} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$

جڏهن ته x_i غير گروهي مواد ۾ ڏار ڏار مشاهدن کي ظاهر ڪري ٿو ۽ گروهي مواد ۾ جماعتي نشان کي ظاهر ڪري ٿو جڏهن ته f_i واسطيدار جماعتي تعددون آهن. سولائي خاطر اسين هيٺين لکت کي فارمولن ۾ نظر انداز ڪري سگهون ٿا.

مثال ١: وصف وسيلي هيٺ ڏنل ڏيٽا سيٽن جي حسابي سراسري لهو

(i). 2, 3, 7, 5, 5, 13, 1, 7, 4, 8, 3, 4, 3 (ii). 7, 5, 74, 10 (iii). 18.92, 27.9, 34.7, 39.68

حل

وصف وسيلي يا سڌي طريقي سان اسان وٽ آهي

(i).
$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2+3+7+5+5+13+1+7+4+8+3+4+3}{13} = \frac{65}{13} = 5.$$

وصف وسيلي اسان وٽ آهي:

(ii).
$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{7+5+74+10}{4} = \frac{96}{4} = 24.$$

(iii).
$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{18.92+27.9+34.7+39.68}{4} = \frac{121.2}{4} = 30.3.$$

نوٽ ڪريو ته: تمام وڏين رقمن (يا بين ڪان مختلف رقمن) سان حسابي سراسري اثرانداز ٿئي ٿي.

مثال 1(ii) ۾ $\bar{x} = 24$ سيني مشاهدن 74,5,7 ۽ 10 کان گهٽو پري آهي ڇو جو 74 تمام وڏي رقم آهي.

مثال پنج شاگردن جا گريڊ، جن گروهه جي شڪل ۾ پڙهائي ڪئي، هئا:- A,B,C,B+,A+ حسابي سراسري جو استعمال ڪندي گريڊن جي سراسري ڳوليو:

حل: مواد قطاري آهي ۽ عددن سان درجا ڏيئي سگهجن ٿا. اسين گريڈن A+,A,B+,B,C+,C کي ترتيب وار 6,5,4,3,2,1 سان ظاهر ڪريون ٿا ته پوءِ.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{6+1+4+3+5}{5} = \frac{19}{5} = 3.8 \approx 4.$$

انهي ڪري گريڈن جي سراسري B+ آهي

مثال وصف وسيلي، هيٺين مواد ۾ ٽڏي مشروب جي مقدارن جي حسابي سراسري لهو

ٽڏي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

KARACHIEDU.COM



حل: غير مسلسل جماعتن ۾ گروهي مواد آهي جماعتي نشان (x) آهن 1.52,1.51,1.50,1.49,1.48 حساب جدول ۾ ڏيکاريل آهن آخر ۾

$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{29.96}{20} = 1.498$ لٽر ,

x	f	xf
1.48	2	$1.48\times 2 = 2.96$
1.49	7	10.43
1.50	5	7.5
1.51	5	7.55
1.52	1	1.52
	$\sum f = 20$	$\sum xf = 29.96$

حسابي سراسري جو استعمال ڪندي، ٿڌي مشروب جو سراسري مقدار 1.498 لٽر آهي.

مثال وصف استعمال ڪندي گراهڪن جي اطمينان جي معيار جي حسابي سراسري لهو

ڏاڍو	ڪجهه	پڪ ناهي	گهٽو نه	بلڪل نه	اطمينان جي معيار
18	6	5	8	3	گراهڪن جو تعداد

حل: اسين قطاري بدلجڏ جي خاصيتن "بلڪل نه، گهٽو نه، پڪ ناهي، ڪجهه ۽ ڏاڍو" کي ترتيبوار درجن 5,4,3,2,1 سان ظاهر ڪريون ٿا.

وصف مطابق

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{(1)(3)+(2)(8)+(3)(5)+(4)(6)+(5)(18)}{3+8+5+6+18} = \frac{148}{40} = 3.7 \approx 4.$$

انهي ڪري اطمينان جي معيار جي سراسري چوٿون درجو آهي جيڪو "ڪجهه" آهي.

مثال 60 ڏينهن لاءِ هڪ دُڪان جي بجلي جي استعمال (kWh ۾) جي حسابي سراسري لهو

بجلي جو استعمال	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل

مواد مسلسل تعددي جدول ڏيکاري ٿو. اسين پر واري جدول ۾ جماعتي نشان ۽ گهربل جوڙ اُوبتون لهون ٿا

وصف يا سڌي طريقي موجب $\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{7270}{60} = 121.166.$

دُڪان جي بجلي جي استعمال جي حسابي سراسري 121.166kWh آهي

جماعتي حدون	جماعتي نشان (x)	تعدد (f)	xf
68-87	77.5	10	775
88-107	97.5	13	1267.5
108-127	117.5	15	1762.5
128-147	137.5	10	1375
148-167	157.5	4	630
168-187	177.5	6	1065
188-207	197.5	2	395
ڪل تعداد	--	$\sum f = 60$	7270

نوٽ ڪيو ته:

غير گروهي مواد ۽ غير مسلسل تعددي جدول جون حسابي سراسريون ساڳيون آهن. پر مسلسل تعددي ورهاست واري مواد جي حسابي سراسري واسطيدار غير گروهي مواد جي سراسري جي برابر نه آهي پر ويجهو آهي

انحرافن يا اڻ سڌي طريقن وسيلي حسابي سراسري:

جيڪڏهن x_i مشاهدا آهن ۽ A هڪ فرضي يا عارضي سراسري (مواد جي وسعت جي اندر يا باهر کو به عدد) آهي ته پوءِ A سان انحراف $D_i = x_i - A$ آهن.

KARACHIEDU.COM

انحرافن جي بنياد تي ٻہ اڙ سڌا طريقا آهن: مختصر ۽ فرضي طريقا. اهي وڏي رقمن واري وسيع مواد لاءِ استعمال ڪندا آهيون.

مختصر طريقو: (Short cut Method)

مختصر طريقو استعمال ڪندي حسابي سراسري هيٺين ريت لهبي آهي.

غير گروهي مواد لاءِ $\bar{x} = A + \frac{\sum D}{n}$

۽

گروهي مواد لاءِ $\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f}$

غير گروهي مواد لاءِ x_i مشاهدا آهن، گروهي مواد لاءِ x_i جماعتي نشان آهن. گروهي مواد لاءِ اهو بهتر آهي تہ سڀ کان وڏي تعدد سان واسطو رکندڙ x_i کي "A" ڪٽجي

فرضي طريقو: (Ceding Method)

فرضي طريقو استعمال ڪندي حسابي سراسري لهڻ جا فارمولا آهن.

غير گروهي مواد لاءِ $\bar{x} = A + h\frac{\sum u}{n}$

۽

گروهي مواد لاءِ $\bar{x} = A + h\frac{\sum uf}{\sum f}$

جڏهن تہ $u_i = \frac{x_i - A}{h}$ يا سولائي خاطر $u = \frac{x - A}{h}$ کي فرضي بدلجندڙ (Coded Variable) ڪوٺبو آهي غير گروهي مواد لاءِ x_i مشاهدا آهن ۽ گروهي مواد لاءِ x_i جماعتي نشان آهن.

مثال ڇهہ شاگردن جون ڪُل مارڪون، جيڪي امتحان لاءِ ٽولي جي صورت ۾ پڙهيا، هن ريت آهن 640,610 580,710,680,685 اڙ سڌا طريقا استعمال ڪندي مارڪن جي حسابي سراسري لهو جڏهن تہ

(i). $A = 650$ ۽ $h = 10$ (ii). $A = 680$ ۽ $h = 20$.

حل مختصر طريقو بيان ڪري ٿو تہ: $\bar{x} = A + \frac{\sum D}{n}$

فرضي طريقو بيان ڪري ٿو تہ:- $\bar{x} = A + h\frac{\sum u}{n}$,

جڏهن تہ $u = \frac{x - A}{h}$.

هينهي حصن لاءِ، گهربل حساب جدولن ۾ ڏار ڏار ڏيکاريل آهن.

(i). $A = 650$ ۽ $h = 10$.

x	$D = x - 650$	$u = \frac{x-650}{10}$
610	-40	-4
640	-10	-1
685	35	3.5
680	30	3
710	60	6
580	-70	-7
	$\sum D = 5$	$\sum u = 0.5$

مختصر طريقي موجب، اسان وٽ آهي

$$\bar{x} = 650 + \frac{5}{6} = 650.833.$$

فرضي طريقي موجب، اسان وٽ آهي

$$\bar{x} = 650 + 10 \times \frac{0.5}{6} = 650 + \frac{5}{6} = 650.833.$$

KARACHIEDU.COM

(ii). $A = 680$ ۽ $h = 20$.

x	$D = x - 680$	$u = \frac{x-680}{20}$
610	-70	-3.5
640	-40	2
685	5	0.25
680	0	0
710	30	1.5
580	-100	-5
	$\sum D = -175$	$\sum u = -8.75$

مختصر طريقي موجب اسان وٺ آهي:

$$\bar{x} = 680 + \left(\frac{-175}{6}\right) = 680 - 29.1666$$

$$\bar{x} = 650.833.$$

فرضي طريقي موجب

$$\bar{x} = 680 + 20\left(\frac{-8.75}{6}\right)$$

$$\bar{x} = 680 - 29.1666 = 650.833.$$

h۽A جي چونڊ جو خيال ڪرڻ بنا مارڪن جي حسابي سراسري 650.833 يا 651 آهي

مثال مختصر ۽ فرضي طريقن وسيلي ٽڏي مشروب جي مقدارن (لٽرن ۾) جي حسابي سراسري لهو

ٽڏي مشروب جي مقدارن (لٽرن ۾)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل هتي اسين $A = 1.49$ ۽ $h = 0.01$ جو استعمال ڪريون ٿا حساب وضاحت سان جدول ۾ آهن

x	f	$D = x - 1.49$	$u = \frac{x-1.49}{0.01}$	Df	uf
1.48	2	-0.01	-1	-0.02	-2
1.49	7	0	0	0	0
1.50	5	0.01	1	0.05	5
1.51	5	0.02	2	0.1	10
1.52	1	0.03	3	0.03	3
	$\sum f = 20$			$\sum Df = 0.16$	$\sum uf = 16$

مختصر طريقي موجب

$$\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f} = 1.49 + \frac{0.16}{20} = 1.498.$$

فرضي طريقي موجب

$$\bar{x} = A + h \times \frac{\sum uf}{\sum f} = 1.49 + 0.01\left(\frac{16}{20}\right) = 1.498.$$

اسين اهو ڏسون ٿا ته بنهي اڳ سڌي طريقن ۽ وصف وسيلي جواب ساڳيا آهن.

مثال 50 ڏاتو جي ٽڪرن جي ماپن جي حسابي سراسري مختصر ۽ فرضي طريقن سان لهو.

ٽڪر جو مايو(ڪلو گرامن ۾)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
ٽڪرن جو تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل $A = 8.1$ ۽ $h = 0.1$ ڪٽندي اسين جدول ۾ حساب ڪريون ٿا.

جماعتي حدون	جماعتي نشان (x)	f	$D = x - 8.1$	$u = \frac{x-8.1}{0.1}$	Df	uf
7.1-7.3	7.2	3	-0.9	-9	-2.7	-27
7.4-7.6	7.5	5	-0.6	-6	-3	-30
7.7-7.9	7.8	9	-0.3	-3	-2.7	-27
8.0-8.2	8.1	14	0	0	0	0
8.3-8.5	8.4	11	0.3	3	3.3	33
8.6-8.8	8.7	6	0.6	6	3.6	36
8.9-9.1	9.0	2	0.9	9	1.8	18
		$\sum f = 50$			$\sum Df = 0.3$	$\sum uf = 3$

KARACHIEDU.COM

مختصر طريقي موجب $\bar{x} = A + \frac{\sum Df}{\sum f} = 8.1 + \frac{0.3}{50} = 8.106$.

فرضي طريقي موجب $\bar{x} = A + h \times \frac{\sum uf}{\sum f} = 8.1 + 0.1 \times \left(\frac{3}{50}\right) = 8.106$.

انهي کري مايي جي سراسري 8.106 کلو گرام آهي

22.3(i) (b). مڊيان، ڪثرتي سراسري، مهندسي سراسري ۽ هارموني سراسري:

حسابي سراسري (برابري تي بينل) کان علاوه مواد جي مرڪزي رجحان جون ماپون لهڻ لاءِ ڪجهه ٻيا طريقا به آهن. مثال طور اسان جي چونڊن واري نظام ۾ هر ڪنهن کي ووٽ ڏيڻ جو حق آهي پر منتخب نمائندا ڄڻ اڪثريت جي بنياد تي چونڊبا آهن جيئن ته چيو وڃي ٿو ته "اڪثريت کي اختيار آهي."

اهڙي صورت ڪثرتي سراسري (Mode) کي ظاهر ڪري ٿي جيڪو سڀ کان گهڻو ايندڙ مشاهدو آهي. ساڳي ريت مڊيان جو مرڪز ترتيب ڏنل ڏيتا سيٽ جي سڀ کان وچيون حصو هوندو آهي. مهندسي ۽ هارموني سراسريون (Geometric and Harmonic Means) حسابي سراسري وانگر فطري طور حسابي آهن ان جي برعڪس مڊيان ۽ ڪثرتي سراسري فطري طور بياني آهن.

مڊيان (Median)

هڪ ترتيب ڏنل مواد ۾ مڊيان هڪ اهڙي رقم آهي جيڪا مواد کي ٻن برابر حصن ۾ ورهائي ٿي مڊيان معلوم ڪندي اسين اهو فرض ڪندا آهيون ته وڌندڙ يا گهٽجندڙ ترتيب واري سڄي مواد جو مرڪزي ٽڪو وچين جاءِ تي آهي

نوٽ

- مواد ۾ مڊيان هميشه يڪانو هوندو آهي.
- اسين مقداري مواد جو مڊيان لهي سگهون ٿا.
- خاصيتي مواد لاءِ رڳو قطاري مواد جو مڊيان لهڻ اهم هوندو آهي.
- مڊيان سمورن مشاهدن تي برابري سان انحصار نٿو ڪري.
- مڊيان، مواد جي وڏين رقمن (يا ٻين کان مختلف رقمن) سان متاثر نه ٿيندو آهي "n" مشاهدن واري ترتيب ڏنل غير گروهي مواد لاءِ، مڊيان "m" مواد جو سڀ کان وچيون حصو آهي ۽ هيئن ٻن صورتن ذريعي بيان ڪري سگهجي ٿو

جيڪڏهن n اڪي آهي ته پوءِ، $m = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ هون مشاهدو (1)

ٻي صورت ۾
جڏهن n ٻڌي آهي ته پوءِ $m = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}+1\right)\right]$ هون مشاهدو (2)

غير مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ، مجموعي تعددن جي مدد سان اسين (1) ۽ (2) جو استعمال ڪندي مڊيان ڪي چونديندا آهيون

مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ، مڊيان $\left(\frac{n}{2}\right)$ هون مشاهدو رکندڙ جماعت ۾ هوندو آهي

ان جماعت کي مڊياني جماعت (جماعت m) پڻ چئبو آهي.

فارمولو هن ريت آهي

$$m = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) \quad (3)$$

جڏهن ته "L" مڊياني جماعت جي LCB آهي مڊياني جماعت جي ويڪر h ۽ تعدد f آهي مڊياني جماعت جي بلڪل اڳ واري جماعت جي مجموعي تعدد C آهي.

KARACHIEDU.COM

مثال هيٺين جو مڊيان لهو

(i). 2, 3, 7, 5, 5, 13, 1, 7, 4, 8, 3, 4, 3, (ii). 7, 5, 74, 10 (iii). 18.92, 27.9, 37.4, 39.68

حل (i). مواد کي وڌندڙ ترتيب ۾ لکندي. 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 13

هتي $n = 13$ (اڪي) تنهنڪري

$m = \left(\frac{13+1}{2}\right)$ هون مشاهدو = ستون مشاهدو = 4.

(ii). وڌندڙ ترتيب ۾ اسان وٺ آهن 5, 7, 10, 74

هتي $n = 4$ (ٻڌي) تنهنڪري

$$m = \left[\left(\frac{n}{2}\right) \text{ هون مشاهدو } + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ هون}\right] = \frac{1}{2}\left[\text{ٻيون مشاهدو} + \text{ٽيون}\right] = \frac{1}{2}[7+10] = 8.5$$

(iii). هتي $n=4$ (ٻڌي). مواد اڳيئي ترتيب واري صورت ۾ آهي

$$m = \frac{1}{2}\left[\text{ٻيون مشاهدو} + \text{ٽيون}\right] = \frac{1}{2}[27.9+37.4] = 32.65.$$

مثال شاگردن جي هيٺين ٻن ٽولين جو مڊياني گريڊ معلوم ڪريو

(i). A+, B+, C, B, A (ii). C+, A, B, B, B+, C, B+, A, A+, C .

(i). ترتيب ٿيل مواد آهي A+, A, B+, B, C ۽ $n = 5$ (اڪي) تنهنڪري

$m = \left(\frac{n+1}{2}\right) = \text{هون}\left(\frac{5+1}{2}\right)$ هون = ٽيون مشاهدو = $B+$ اهو مڊياني گريڊ آهي.

(ii). وڌندڙ ترتيب ۾ آٺن ڪانپوءِ اسان وٺ آهي C, C, C+, B, B, B+, B+, A, A, A+ هتي $n = 10$, $_{th}$

به وچيان مشاهدا $\left(\frac{n}{2}\right)$ هون ۽ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ هون آهن

يعني تہ پنجون ۽ ڇهون مشاهدا جيڪي B ۽ B+ گريڊ (مختلف) آهن انهي ڪري اسين اهو نتيجو ڪڍي سگهون ٿا تہ مڊياني گريڊ B ۽ B+ گريڊن جي وچ ۾ برابر ورهائجي ويو آهي

مثال 40 گراهڪن جي هيٺين مواد ۾ اطمينان واري معيار جو مڊيان معلوم ڪريو.

ڏاڍو	ڪجهہ	پڪ ناهي	گهٽو نہ	بلڪل نہ	اطمينان واروَ معيار
18	6	5	8	3	گراهڪن جو تعداد

حل $n = 40$ (ٻڌي) تنهنڪري به وچيان مشاهدا 20 هون ۽ 21 هون آهن. اهي ٻئي جماعت "ڪجهہ" ۾ موجود آهن تنهنڪري اطمينان واري معيار جو مڊيان "ڪجهہ" آهي.

مثال هيٺين مواد ۾ ٿڌي مشروب جو مڊياني مقدار لهو

ٿڌي مشروب جي مقدار (لٽر ۾)	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48
بوتلن جو تعداد	1	5	5	7	2

حل

هتي (ٻڌي) $n = \sum f = 20$

تنهنڪري، $m = \frac{1}{2}\left[\text{ڏهون} + \text{يارنهون مشاهدا}\right]$

مجموعي تعددن کي معلوم ڪندي اسين ڏسون ٿا تہ ڏهون ۽ يارنهون مشاهدا مجموعي تعدد واري جماعت ۾ موجود آهن.

x	f	مجموعي تعددون
1.48	2	2
1.49	7	9
1.50	5	14
1.51	5	19
1.52	1	20
	$\sum f = 20$	

KARACHIEDU.COM

$$m = \frac{1}{2}[1.50 + 1.50] = \frac{1}{2}(3) = 1.50 \text{ لٽر}$$

مثال مواد جو استعمال ڪندي هڪ دُڪان جي 60 ڏينهن لاءِ بجلي جي استعمال جو مڊيان لهو.

بجلي جو استعمال	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: هتي $n = 60$, ۽ $h = 20$ هڪ مسلسل تعددي جدول آهي تنهنڪري اسانکي حقيقي جماعتي حدون ۽ مجموعي تعددون معلوم ڪرڻيون پونديون جيئن هيٺين جدول ۾ ٽيل آهي.

جماعتي حدون	حقيقي جماعتي حدون	f	مجموعي تعدون
68-87	67.5-87.5	10	10
88-107	87.5-107.5	13	23
108-127	107.5-127.5	15	38 (جماعت $m-$)
128-147	127.5-147.5	10	48
148-167	147.5-167.5	4	52
168-187	167.5-187.5	6	58
188-207	187.5-207.5	2	60
		$n = 60$	

مڊياني جماعت (جماعت $m-$) اها جماعت آهي جيڪا $\left(\frac{n}{2}\right)$ هون مشاهدو رکي ٿي. يعني ته 30 هون مشاهدو تنهنڪري مجموعي تعدد 38 واري جماعت مڊياني جماعت آهي (جماعت $m-$) 108-127 آهي
(جيئن جدول ۾ نمايان ڪيل آهي)
فارمولي جو استعمال ڪندي.

$$m = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) = 107.5 + \frac{20}{15}\left(\frac{60}{2} - 23\right)$$

$$\Longrightarrow \quad m = 107.5 + \frac{20}{15}(30 - 23) = 107.5 + \frac{20}{15} \times 7 = 107.5 + 9.333 = 116.833 \text{ kWh.}$$

$L = \text{LCB}$ جي m-جماعت $= 107.5$

$h =$ جو جماعتي وقفو m-جماعت $= 20$

جماعت m-جي تعدد $= 15$ ۽

مڊياني جماعت کان بلڪل اڳ واري جماعت جي مجموعي تعدد $= C = 23$

چوٿائي ڪندڙ مشاهدا: (Quartiles)

چوٿائي ڪندڙ مشاهدا بيان ڪرڻ لاءِ هڪ ترتيب ڏنل مواد ڇئن برابر حصن ۾ ورهائي سگهجي ٿو. مواد جي وسعت جي اندر ٽي چوٿائي ڪندڙ مشاهدا هوندا آهن جيڪي مواد کي چار برابر حصن ۾ ورهائڻ ٿا. پهريون (يا هيٺيون) چوٿائي ڪندڙ مشاهدو Q_1 25% کان 75% جي نسبت ۾ مواد کي ورهائي ٿو

غير گروهي مواد لاءِ: جيڪڏهن $\frac{n}{4}$ سڄو عدد نه آهي ته پوءِ

(1) $\left(\frac{n+3}{4}\right) = Q_1$ هون مشاهدو، بي صورت ۾ جيڪڏهن $\frac{n}{4}$ سڄو عدد آهي ته پوءِ

KARACHIEDU.COM

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left[\text{هون مشاهدو } \left(\frac{n}{4}\right) + \text{هون } \left(\frac{n}{4}+1\right)\right] \qquad (2)$$

غير مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ، اسين (1) ۽ (2) جو استعمال پڻ ڪندا آهيون
مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ، اسين هي فارمولو استعمال ڪنداسين

$$Q_1 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{4} - c\right)$$

جڏهن ته Q_1, L- جماعت جي h, LCB ان جي ويڪر ۽ f ان جو تعدد آهي
Q_1 جماعت کان بلڪل اڳ واري جماعت جي مجموعي تعدد C آهي Q_1- جماعت اها جماعت آهي جيڪا $\left(\frac{n}{4}\right)^{th}$ هين مشاهدي کي رکي ٿي.

ٻيو (يا وچيون) چوٿائي ڪندڙ مشاهدو Q_2 ترتيب ڏنل مواد کي 50% - 50% نسبت ۾ ورهائي ٿو
اهو ۽ مواد جو مڊيان پڻ سڏيا آهن ٽيون (يا مٿيون) چوٿائي ڪندڙ مشاهدو Q_3 ترتيب ڏنل مواد کي 25% - 75% نسبت ۾ ورهائي ٿو
غير گروهي مواد لاءِ
جيڪڏهن $\frac{3n}{4}$ سڄو عدد نه آهي ته پوءِ

$$Q_3 = \text{هون مشاهدو } \left(\frac{3n+1}{4}\right) \qquad (4)$$

پي صورت ۾ جيڪڏهن $\frac{3n}{4}$ سڄو عدد آهي ته پوءِ

$$Q_3 = \frac{1}{2}\left[\text{هون مشاهدو } \left(\frac{3n}{4}\right) + \text{هون } \left(\frac{3n}{4}+1\right)\right] \qquad (5)$$

غير مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ مجموعي تعددن سان گڏ مساواتون (4)۽(5)استعمال ٿيندیون آهن
مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ

$$Q_3 = L + \frac{h}{f}\left(\frac{3n}{4} - c\right)$$

جڏهن ته Q_3, L جماعت جي h, LCB ان جي ويڪر ۽ f ان جي تعدد آهي. اها جماعت $\left(\frac{3n}{4}\right)$
هون مشاهدو رکي ٿي Q_3- جماعت کان بلڪل اڳ واري جماعت جي مجموعي تعداد C آهي

مثال هيٺين ڏيتا سيٽن ۾ هيٺيان ۽ مٿيان چوٿائي ڪندڙ مشاهدا لهو

(i). 1000, 1200, 1600, 1500, 1200 (ii). 32, 36, 36, 37, 39, 41, 45, 46

حل (I) ترتيب ڏنل ڏيتا سيٽ آهي.
1000, 1200, 1200, 1500, 1600
هتي $n = 5$.
Q_1لاءِ: (سڄو عدد ناهي) $\frac{n}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$
تنهنڪري $Q_1 = \left(\frac{n+3}{4}\right)$ هون = ٻيو مشاهدو = 1200
Q_3لاءِ: (سڄو عدد ناهي) $\frac{3n}{4} = \frac{3\times 5}{4} = 3.75$
تنهنڪري $Q_3 = \left(\frac{3n+1}{4}\right)$ هون =چوٿون مشاهدو= 1500

KARACHIEDU.COM

(ii) ڏيتا سيٽ اڳيئي ترتيب واري صورت ۾ آهي
$n = 8$ ۽

(ii): Q_1 لاءِ: (سڄو عدد آهي.) $\frac{n}{4} = \frac{8}{4} = 2$

تنهنڪري

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left[\text{هون مشاهدو } \left(\frac{n}{4}+1\right) + \text{هون } \left(\frac{n}{4}\right)\right]$$

$$Q_1 = \frac{1}{2}\left[\text{ٻيون + ٽيون مشاهدو}\right]$$

$$Q_1 = \frac{1}{2}(36+36) = 36 \text{ لاءِ } Q_3$$

$\frac{3n}{4} = \frac{3\times 8}{4} = 6$ (سڄو عدد آهي)

تنهنڪري

$Q_3 = \frac{1}{2}[\text{چوٿون + ستون مشاهدو}] = \frac{1}{2}[41+45] = 43.$

مثال 80 ڪٽنبن ۾، بارن جي تعداد جا هيٺيان ۽ متيان چوٽائي ڪنڊ مشاهدا لهو

بارن جو تعداد	1	2	3	4	5	6
ڪٽنبن جو تعداد	8	10	10	25	20	7

حل غير تسلسل جماعتن وارو گروهي مواد مثيل آهي جنهن ۾ $n = 80.$ مجموعي تعددن کي لهندي جيئن جدول ۾ ڪيل آهي

x	f	مجموعي تعداد
1	8	8
2	10	18
3	10	28 Q_1 – جماعت
4	25	53
5	20	73 Q_3 – جماعت
6	7	80.

Q_1 لاءِ (سڄو عدد آهي) $\frac{n}{4} = \frac{80}{4} = 20$

تنهنڪري Q_1 سراسري آهي 20 هين ۽ 21 هين مشاهدن جي. اهي ٻئي مجموعي تعداد 28 واري جماعت ۾ موجود آهن تنهنڪري

$Q_1 = \frac{1}{2}(3+3) = 3.$

Q_3 لاءِ $\frac{3n}{4} = \frac{3\times 80}{4} = 60$

مجموعي تعدد 73 واري جماعت ۾ 60 هون ۽ 61 هون مشاهدو موجود آهن

تنهنڪري $Q_3 = \frac{1}{2}(5+5) = 5.$

مثال 100 شاگردن جي وزن (ڪلو گرامن ۾) جا چوٽائي ڪنڊ مشاهدا لهو. مواد هيٺ ڏنل آهي

KARACHIEDU.COM

وزن (ڪلو گرامن ۾)	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94
شاگردن جو تعداد	10	24	46	12	8

حل هتي $n=100$, $h=5$ ۽ مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي. سڀ کان اڳ ۾ اسين حقيقي جماعتي حدون ۽ مجموعي تعددون معلوم ڪريون ٿا.
اهي سڀ حساب ڪتاب واري جدول ۾ خلاصو ڪري ڏنل آهن.

جماعتي حدون	حقيقي جماعتي حدون	f	مجموعي تعداد
70-74	69.5-74.5	10	10
75-79	74.5-79.5	24	34 Q_1 جماعت
80-84	79.5-84.5	46	80 Q_3 ۽ m جماعت
85-89	84.5-89.5	12	92
90-94	89.5-94.5	8	100

Q_1 لاءِ $\frac{n}{4}=\frac{100}{4}=25$
مجموعي تعداد 34 واري
جماعت ۾ 25 هون مشاهدو موجود آهي تنهنڪري Q_1 – جماعت 75 – 79 آهي
ان جماعت ۾

$$Q_1 = L+\frac{h}{f}\left(\frac{n}{4}-c\right)=74.5+\frac{5}{24}(25-10)=77.625$$ ڪلو گرام

$m=Q_2$ لاءِ $\frac{n}{2}=\frac{100}{2}=50$
مجموعي تعداد 80 واري جماعت ۾ 50 هون مشاهدو موجود آهي.
تنهن ڪري m– جماعت 80-84 آهي.
انهي لاءِ

$$m=L+\frac{h}{f}\left(\frac{n}{2}-c\right)=79.5+\frac{5}{46}(50-34)=81.239$$ ڪلو گرام

Q_3 لاءِ: $\frac{3n}{4}=\frac{3\times100}{4}=75$
مجموعي تعداد 80 واري جماعت ۾ 75 هون مشاهدو موجود آهي.
تنهنڪري Q_3 - جماعت ۽ m- جماعت ٻئي ساڳيون آهن جيڪا80-84آهي.
ان جماعت ۾

$$Q_3 = L+\frac{h}{f}\left(\frac{3n}{4}-c\right)=79.5+\frac{5}{46}(75-34)=83.956$$ ڪلو گرام

نوٽ ڪيو ته:
چوٿائي ڪندڙ مشاهدا فطري طور تي بيهڪ وارا يا مقامي آهن جيستائين مشاهدن جو تعداد ساڳيو رهي ٿو تيستائين انهن جا مقام نہ مٽبا آهن. مثال طور n=10 واري ترتيب ٿيل مواد لاءِ

Q_1 = ٽيون مشاهدو، $Q_2=m=\frac{1}{2}$ [پنجون + چهون مشاهدو]
۽ Q_3 = اٺون مشاهدو

KARACHIEDU.COM

10 مشاهدن وارو ڪوبہ ترتيب ڏنل ڏيڻا سيٽ انهن مقامن جي پوئيواري ڪندو جيئن تہ هيٺ ڏنل آهي

a. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 $Q_1 = 5,\ m = 10,\ Q_3 = 15$

b. 10, 12, 12, 13, 17, 20, 20, 20, 21, 25 $Q_1 = 12,\ m = 13.5,\ Q_3 = 20.$

c. 1, 1, 1, 3, 12, 12, 13, 17, 19, 30 $Q_1 = 1,\ m = 12,\ Q_3 = 17.$

ڪثرتي سراسري (Mode)

مواد ۾ سڀ کان وڌيڪ ايندڙ مشاهدي کي ڪثرتي سراسري چئبو آهي. ڪثرتي سراسري ان اصول تي انحصار ڪندي آهي تہ "اڪثريت کي اختيار آهي." ڪثرتي سراسري بنهي مقداري ۽ خاصيتي مواد لاءِ لهي سگهجي ٿو اهو مواد جنهن ۾ ڪوبہ ڪثرتي سراسري نہ هجي ان کي غير- ڪثرتي (non-modal) چئبو آهي. هڪ ڪثرتي سراسري واري مواد کي يڪ ڪثرتي مواد، ٻہ يا وڌيڪ سراسرين واري مواد کي گهڻ ڪثرتي مواد چئبو آهي. غير گروهي مواد لاءِ، هڪ يا وڌيڪ مشاهدا جيڪي ٻين جي مقابلي ۾ سڀ کان وڌيڪ دفعا اچن انهن کي ڪثرتي سراسري يا سراسريون چئبو آهي. جيڪڏهن اهي وجود رکن مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ، ڪثرتي سراسري هڪ مشاهدو يا جماعت هوندي آهي جنهن جي تعدد سڀ کان وڌيڪ هجي. جيڪڏهن ٻہ يا ٻہ کان وڌيڪ جماعتن جي سڀ کان وڌي تعدد ساڳي هجي تہ مواد کي گهڻ ڪثرتي چئبو ۽ سڀ کان وڌي تعدد وارا سڀ مشاهدا ڪثرتي سراسريون ڪوٺبا: مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ، سڀ کان وڌي تعدد واري جماعت ڪثرتي جماعت (modal Class) ڪوٺبي ۽ ڪثرتي سراسري اُن جماعت ۾ موجود هوندو آهي. ڪثرتي جماعت (m-جماعت) ۾ ڪثرتي سراسري (M) لهڻ جو فارمولو آهي.

$$\text{ڪثرتي سراسري} = M = L + \frac{(f_M - f_{M-1}) \times h}{2f_M - f_{M-1} - f_{M+1}}$$

جڏهن تہ L, M- جماعت جي LCB, h ويڪر ۽ f_M ان جي تعدد آهي M-جماعت جي بلڪل اڳ واري ۽ پوءِ واري جماعتن جون تعددون ترتيبوار f_{M-1} ۽ f_{M+1} آهن

مثال1: هينئن ڏيڻا سيٽن جي ڪثرتي سراسري لهو

(i). 75, 76, 80, 80, 82, 82, 82, 85

(ii). 13, 14, 15, 11, 16, 10, 19, 20, 18, 17

(iii). 1.49, 1.50, 1.51, 1.50, 1.48, 1.51

(iv). 1, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 8, 9, 9, 9, 6, 1, 10

(v). C+, A, B, B, B+, C, B, A, A+, C (گريڊ)

(vi). (رُتبا) چگو، چگو، سنو موڳو، خراب، سنو

حل (i) 82 = ڪثرتي سراسري جيئن تہ 82 ٽي ڀيرا اچي ٿو جيڪو ٻيئي ڪنهن ۾ مشاهدي کان وڌيڪ آهي.

(ii). مواد ۾ ڪابہ ڪثرتي سراسري نہ آهي. اهو غير ڪثرتي مواد آهي.

(iii). ڪثرتي سراسريون ٻہ آهن 1.50 ۽ 1.51 جيئن تہ اهي ٻئي برابر اچن ٿا ۽ ٻين کان وڌيڪ ڀيرا اچن ٿا

(iv). مواد ٽي ڪثرتي آهي يعني مواد ۾ ٽي ڪثرتي سراسريون آهن: 2، 5 ۽ 9

(v). گريڊ"B" سڀ کان وڌيڪ ڀيرا اچي ٿو تنهنڪري ڪثرتي گريڊ"B" گريڊ آهي.

(vi). مواد ۾ ٻہ ڪثرتي سراسريون آهن: چگو ۽ سنو جيئن تہ اهي ٻئي برابر سڀ کان وڌيڪ ڀيرا ايندڙ مشاهدا آهن.

مثال2: 45 ڪٽنبن جي مواد مان، هڪ ڪٽنب جي موبائيلن جي تعداد جي ڪثرتي سراسري لهو

موبائيلن جو تعداد	0	1	2	3	4	5	6	7
ڪٽنبن جو تعداد	1	7	15	12	5	2	2	1

حل غير مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي.

هتي 15 سڀ کان وڌي تعدد آهي ۽ اها جماعت"2" سان واسطو رکي ٿي. انهيءَ ڪري موبائيلن جي ڪثرتي تعداد في ڪٽنب 2 آهي

مثال3: هيٺ ڏنل 30 شاگردن جي رت جي گروپن مان، ڪثرتي رت جو گروپ لهو

رت جو گروپ	A+	B+	AB+	O+	A-	B-	AB-	O-
شاگردن جو تعداد	6	5	3	7	3	1	2	3

حل: ڪثرتي رت جو گروپ O+ آهي جيئن تہ اهو سڀ کان وڌي تعدد"7" سان لاڳاپيل آهي

KARACHIEDU.COM

مثال 4: هيٺ ڏنل مواد مان 40 گراهڪن جي اطمينان جي معيار جي ڪثرتي سراسري لهو

اطمينان جو معيار	بلڪل نہ	گهٽ نہ	پڪ ناهي	ڪجهہ	ڏاڍو
گراهڪن جو تعداد	3	8	5	6	18

حل: اطمينان جي معيار جي ڪثرتي سراسري "ڏاڍو" آهي جيئن تہ اهو سڀ کان وڌيڪ پيرا اچي ٿو.

مثال 5: هيٺين مواد جو استعمال ڪندڙ60 ڏينهن لاءِ هڪ ڪٽنب ۾ بجلي جي استعمال ۾ kWhجي ڪثرتي سراسري

بجلي جو استعمال	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي. سڀ کان وڌي. تعداد 15 آهي ڪثرتي جماعت108-127 آهي حقيقي جماعتي حدون جدول ۾ ڏيل اهن. هتي

$$h = 20, L=107.5, f_M = 15, f_{M-1} = 13, f_{M+1} = 10$$

$$\text{ڪثرتي سراسري} = M = L + \frac{(f_M - f_{M-1}) \times h}{2f_M - f_{M-1} - f_{M+1}}$$

$$M = 107.5 + \frac{(15-13)\times 20}{2(15)-13-10} = 107.5 + \frac{2\times 20}{30-23}$$

$$M = 107.5 + 5.71428 = 113.21428 kWh.$$

جماعتي حدون	حقيقي جماعتي حدون	تعداد
68 - 87	67.5 - 87.5	10
88 - 107	87.5 - 107.5	13
108 - 127	107.5 - 127.5	15
128 - 147	127.5 - 147.5	10
148 – 167	147.5 - 167.5	4
168 - 187	167.5 - 187.5	6
188 - 207	188.5 - 207.5	2

بنوٽ ڪيو تہ: مثال 5 ۾ مسلسل تعددي ورهاست يڪ ڪثرتي هئي جيئن تہ سڀ کان وڌي تعدد واري رڳو هڪڙي جماعت هئي.هيٺين مسلسل تعددي ورهاست جيڪا هڪ تار جي ريل جي قطر کي ظاهر ڪري ٿي ۽ 24 جاين تي قطر ماپيل آهناهو مواد ۾ ڪثرتي آهي.

قطر (mm)	2.10-2.13	2.14-2.17	2.18-2.21	2.22-2.25	2.26-2.29	2.30-2.33	2.34-2.37
جاين جو تعداد	4	5	4	4	5	1	1

هتي ۾ ڪثرتي جماعتون "2.14-2.17" ۽"2.26-2.29" آهن جيڪي سڀ کان وڌي تعداد"5"سان لاڳاپيل آهن . هر هڪ جماعت ۾ فارمولو استعمال ڪندي اسين ترتيبوارڪثرتي قطر 2.175mm ۽ 2.263 mm حاصل ڪري سگهون ٿا.

مهندسي سراسري (Geometric Mean)

مهندسي سراسري ۾ سڀني عددن کي برابر اهميت ڏني ويندي آهي. اسين سمورن عددن کي ضرب اُپت وسيلي پاڻ ۾ ملائيندا آهيون ۽ پوءِ ضرب اُپت جو "n" ملاوت جو اثر هٽائيندا آهيون. مهندسي سراسري (G.M) ان مواد جي ڪيڏ اهم آهي جيڪو مقداري ۽ واڌو هجي جيڪڏهن، $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ سڀ واڌو عدد آهن تہ پوءِ

$$G.M. = (x_1 . x_2 \ldots x_3)^{\frac{1}{n}} = \left[\prod (x)\right]^{\frac{1}{n}} \qquad (1)$$

هتي $\prod$ هڪ وڏو يوناني اکر پائي"Pi" آهي جيڪو ضربُ اپت لاءِ استعمال ٿيئي ٿو جيڪڏهن G.Mوجود رکي ٿو تہ پوءِ اهويگانو هوندو آهي.

غير گروهي مواد لاءِ، فارمولو (1) کي G.M لهڻ جو بنيادي فارمولو ڪوٺبو آهي. پر جڏهن مشاهدن جون رقمون وڏيون هجن تہ پوءِ اسين لاگرٿم وارو فارمولو استعمال ڪنداسين.

جيڪو مساوات (1)جي ٻنهي پاسن جو لاگرٿم وٺي ۽ خاصيتن جو استعمال ڪندي حاصل ڪبو آهي، جيڪو هن ريت آهي

KARACHIEDU.COM

$$G.M = \text{antilog}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\log x_i}{n}\right] = \text{antilog}\left[\frac{\sum \log x}{n}\right] \qquad (2)$$

مساوات (2) ۾ G.M مواد جي لاگرٿمن جي حسابي سراسري جو ضد لاگرٿم آهي گروهي مواد لاءِ بنيادي فارمولو آهي:

$$G.M. = \left[(x_1)^{f_1} \times (x_2)^{f_2} \times \ldots \times (x_n)^{f_n}\right]^{\frac{1}{\sum f}} = \left[\prod (x)^{f}\right]^{\frac{1}{\sum f}} \quad (3)$$

۽ لاگرٿم وارو فارمولو آهي

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\sum \text{f. } \log x}{\sum \text{f}}\right] \qquad (4)$$

مساواتن (3) ۽ (4) ۾ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ جماعتي تعددون آهن ۽ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ جماعتي نشان آهن اهي سڀ واڌو آهن. مساوات (4) ۾ ڪابہ تعدد ٻڙي نہ هئڻ گهرجي

مثال1: بنيادي ۽ لاگرٿم وارو فارمولو استعمال ڪندي G.M لهو. انهن مان ڪهڙو بهتر آهي ۽ ڇو؟

(i). 2, 4, 2, 16 (ii). 1.48, 1.52, 1.47, 1.50 (iii). 1000, 1200, 1600, 1500, 1200

حل:(i) بنيادي فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M. = (2\times 4\times 2\times 16)^{\frac{1}{4}} = (256)^{\frac{1}{4}} = 4$$

لاگرٿم وارو فارمولو استعمال ڪندي:

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\log(2)+\log(4)+\log(2)+\log(16)}{4}\right]$$

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{0.3010+0.6021+0.3010+1.2041}{4}\right] = \text{antilog}\,(0.60205) = 3.9999 \approx 4.$$

مشاهدن جون رقمون ننڍيون هيون انهي ڪري بنيادي فارمولو بهتر آهي.

(ii). بنيادي فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M. = (1.48\times 1.52\times 1.47\times 1.50)^{\frac{1}{4}} = \left(4-9604\right)^{\frac{1}{4}} = 1.4924$$

لاگرٿم وارو فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\log(1.48)+\log(1.52)+\log(1.47)+\log(1.5)}{4}\right]$$

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{0.1703+0.1818+0.1673+0.1761}{4}\right] = \text{antilog}\,(0.173875) = 1.4924.$$

وري بنيادي فارمولو موزون آهي جيئن تہ مشاهدن جون رقمون ننڍيون آهن

(iii). بنيادي فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M = \left(1000\times 1200\times 1600\times 1500\times 1200\right)^{\frac{1}{5}} = \left(3456000000000000\right)^{\frac{1}{5}} = 1281.48 \approx 1281.5$$

لاگرٿم وارو فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\log(1000)+\log(1200)+\log(1600)+\log(1500)+\log(1200)}{5}\right]$$

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{3+3.0792+3.2041+3.1761+3.0792}{5}\right] = \text{antilog}\left(3.10772\right) = 1281.504 \approx 1281.5$$

لاگرٿم وارو فارمولو بهتر آهي جيئن تہ لاگرٿم وڏين رقمن کي ننڍو ڪندو آهي. استعمال ڪرڻ لاءِ.

KARACHIEDU.COM

مثال هيٺين مواد ۾ مهندسي سراسري جو استعمال ڪندي ٽڏي مشروب جي مقدارن جي سراسري لهو.

ٽڏي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل: ڏنل مواد، غير مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي.
بنيادي فارمولي ۽ لاگرٿم واري فارمولي جو گهربل حساب هيٺين جدول ۾ ڏيکاريل آهي

جماعتون (x)	f	$(x)^f$	log(x)	f × log(x)
1.48	2	2.1904	0.1703	0.3406
1.49	7	16.3044	0.1732	1.2124
1.50	5	7.5938	0.1761	0.8805
1.51	5	7.8503	0.1790	0.8950
1.52	1	1.52	0.1818	0.1818
---	$\sum f = 20$	$\prod x^f = 3236.0651$	---	$\sum f \log(x) = 3.5103$

بنيادي فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M. = \left[\prod (x)^f\right]^{\frac{1}{\sum f}} = (3236.0651)^{\frac{1}{20}} = 1.49796 \approx 1.498 \text{ لٽر}$$

لاگرٿم وارو فارمولو استعمال ڪندي

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\frac{3.5103}{20}\right]$$

$$G.M. = \text{antilog}(0.175515) = 1.4980 \text{ L}$$ ٽڏي مشروب جي مقدارن جو G.M 1.498 لٽر آهي

مثال 3: لاگرٿم وارو طريقو استعمال ڪندي بجلي جي استعمال واري مواد جو G.M لهو

بجلي جو استعمال	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: فارمولي ۾ گهربل حساب هيٺين جدول ۾ ڪيل آهن

جماعتي حدون	f	جماعتي نشان (x)	Log (x)	f × log(x)
68-87	10	77.5	1.8893	18.8930
88-107	13	97.5	1.9890	25.8570
108-127	15	117.5	2.0700	31.0500
128-147	10	137.5	2.1383	21.3830
148-167	4	157.5	2.1973	8.7892
168-187	6	177.5	2.2492	13.4952
188-207	2	197.5	2.2956	4.5912
	$\sum f = 60$			$\sum f \log x = 124.0586$

انهي ڪري

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\frac{124.0586}{60}\right] = \text{antilog}(2.0676) = 116.8422 \text{ kWh.}$$

مثال 4: G.M جا ٻئي طريقا استعمال ڪندي تار جي ريل جي قطر جي سراسري لهوماپ 24 جاين تي ٿي آهي

قطر (mm) ۾	2.10-2.13	2.14-2.17	2.18-2.21	2.22-2.25	2.26-2.29	2.30-2.33	2.34-2.37
جاين جو تعداد	4	5	4	4	5	1	1

KARACHIEDU.COM

حل: ڏنل مواد مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي فارمولن ۾ گهربل حساب هيٺين جدول ۾ ڪيل آهن

جماعتي حدون	جماعتي نشان (x)	f	x^f	$\log(x)$	$f \times \log x$
2.10-2.13	2.115	4	20.0097	0.3253	1.3012
2.14-2.17	2.155	5	46.4768	0.3334	1.6670
2.18-2.21	2.195	4	23.2134	0.3414	1.3656
2.22-2.25	2.235	4	24.9523	0.3493	1.3972
2.26-2.29	2.275	5	60.9406	0.3570	1.7850
2.30-2.33	2.315	1	2.315	0.3646	0.3646
2.34-2.37	2.355	1	2.355	0.3720	0.3720
		$\sum f = 24$	$\prod x^f = 178967745.4$	---	$\sum f \log x = 8.2526$

بنيادي فارمولي مطابق

$$G.M = \left[\prod x^f\right]^{\frac{1}{\sum f}} = (178967745.4)^{\frac{1}{24}} = 2.2073 \text{ mm}$$

لاگرٿم واري فارمولي مطابق

$$G.M. = \text{antilog}\left[\frac{\sum f \log x}{\sum f}\right] = \text{antilog}\left[\frac{8.2526}{24}\right] = 2.2074 \text{ mm}$$

هارموني سراسري (Harmonic Mean)

هارموني سراسري H.M مواد جي معڪوسن جي حسابي سراسري جو معڪوس آهي H.M ۾ اسين سيني غير ٻڙي عددن کي انهن جي معڪوسن جي جوڙ اُپت وسيلي ملائيندا آهيون ۽ ان کانپوءِ جوڙ اُپت کي n برابر حصن ۾ ورهائيندي ملاوت جي الٽ ڪري هٽائيندا آهيون. آخر ۾ نتيجي جو معڪوس H.M آهي H.M عام طرح سان مقداري مواد جو ڪڍيو آهي ۽ اهو هميشه يڪانو هوندو آهي.

جيڪڏهن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ غير ٻڙي n عدد آهن تہ پوءِ

غير گروهي : مواد لاءِ

H.M = "معڪوس جي حسابي سراسري" جو معڪوس يعني تہ

$$\text{جو معڪوس} \left[\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}\right] = \text{H.M.} \qquad (1)$$

$$\text{جو معڪوس} \left[\frac{\sum\left(\frac{1}{x}\right)}{n}\right] = \frac{n}{\sum\left(\frac{1}{x}\right)}$$

گروهي مواد لاءِ جيڪڏهن غير ٻڙي جماعتي نشان x آهن. تہ پوءِ

$$\text{H.M.} = \frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)} \qquad (2)$$

مثال1: هر هڪ 10 ڪلو ميٽرن جي فاصلي لاءِ ماپيل گاڏي جي رفتارن جو H.M لهو. رفتارون آهن
45km/h, 30km/h, 22km/h, 30km/h, 15km/h

حل:

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\sum\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{5}{\frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45}} = \frac{5}{0.0667 + 0.0333 + 0.0454 + 0.0333 + 0.0222}$$

$$\text{H.M.} = \frac{5}{0.2009} = 24.8880.$$

انهيءَ ڪري، H.M. جو استعمال ڪندي گاڏي جي سراسري رفتار 12.4719 km/h آهي

KARACHIEDU.COM

مثال 2: ٽڊي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾) 20 بوتلن لاءِ ڏنل آهي. H.M لهو.

ٽڊي مشروب جي مقدارلٽرن ۾	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل: ڏنل مواد، غير مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي. تنهنڪري

$$H.M. = \frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)} = \frac{2+7+5+5+1}{\frac{2}{1.48}+\frac{7}{1.49}+\frac{5}{1.50}+\frac{5}{1.51}+\frac{1}{1.52}}$$

$$H.M. = \frac{20}{1.3513+4.6980+3.3333+3.3112+0.6579} = \frac{20}{13.3517} = 1.4979 \text{ لٽر}$$

مثال 3: ڏاتو جي 50 ٽڪرن جي مايي (ڪلو گرامن ۾) جو هارموني سراسري لهو. ان جو مواد ڏنل آهي

مايو (ڪلو گرامن ۾)	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.0	8.9-9.1
ٽڪرن جو تعداد	3	5	9	14	11	6	2

حل: ڏنل مواد مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي. فارمولي ۾ گهربل حساب جدول ۾ ڪيل آهن تنهنڪري:

$$H.M = \frac{\sum f}{\sum\left(\frac{f}{x}\right)}$$

$$H.M = \frac{50}{6.1869} = 8.0816 \text{ Kg.}$$

جماعتي حدون	جماعتي نشان (x)	f	$\frac{f}{x}$
7.1-7.3	7.2	3	0.4167
7.4-7.6	7.5	5	0.6667
7.7-7.9	7.8	9	1.1538
8.0-8.2	8.1	14	1.7284
8.3-8.5	8.4	11	1.3095
8.6-8.8	8.7	6	0.6896
8.9-9.1	9.0	2	0.2222
ڪُل تعداد	---	50	6.1869

KARACHIEDU.COM

مشق 22.3

1. هيٺين جو A.M, G.M, H.M مڊيان ۽ ڪثرتي سراسري لهو (جتي ممڪن هجي)
   - a. 3.2, 6, 10, 12, 12, -20, 25, 28, 30.8
   - b. 14, 12, 18, 19, 0, -19, -18, -12, -14
   - c. 6.5, 11, 12.3, 9, 8.1, 16, 18, 20.5, 25
   - d. 51, 55, 52, 54, 58, 60, 61, 62, 52, 57, 52, 64
   - e. A+, O-, AB+, O+, AB+, AB-, B+, AB+, O+, A- (رت جا گروپ)
   - f. اتر، ڏکڻ، اوپر، اولهه (طرف)
   - g. B+, Fail, B+, A+, A-, C+, B+, A-, B-, Fail, A-, B+, C- (grades)

2. ڏهن مزدورن جي روز جي ڪمائي رُپين ۾ آهي. 188, 170, 172, 125, 115, 195, 181, 190, 195, معلوم ڪريو AM (وصف وسيلي ۽ انحرافن وسيلي جڏهن A=50 ۽ G.M,(h=10 (وصف وسيلي ۽ لاگرٿم واري طريقي سان),HM, مڊيان ۽ ڪثرتي سراسري

3. A.M. مڊيان ۽ ڪثرتي سراسري جو استعمال ڪندي،60 ماڻهن جي مواد مان ڪتن جي ورتاءُ جي سراسري لهو

ورتاءُ	ڪتن سان پيار ڪن ٿا	ڪتن کي پسند ڪن ٿا	ڪابه راءِ نه آهي	ڪتن کي ناپسند ڪن ٿا	ڪتن سان نفرت ڪن ٿا
ماڻهن جو تعداد	20	15	4	13	8

4. هڪ شهر ۾ فوتگي في مهيني واري هيٺين مواد مان موت جي سبب جي ڪثرتي سراسري لهو.

موت جو سبب	T.B.	ذيابيطس	ملیريا	ڪالرا (دست ۽ الٹيون)	ڪوويڊ	ڪنيسر	B.P.	دل جو دورو
ماڻهن جو تعداد	10	6	2	2	15	10	2	5

5. هڪ دُڪان ۾ 50% رعايتي قيمت تي وڪيل جوتن جون ماپون ڏنل آهن مڊيان Q_1، Q_3 ۽ ڪثرتي وڪيل جوتي جي ماپ لهو جيڪي جوتا ان ڏينهن وڪيا ويا.

جوتي جي ماپ	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5
جوڙين جو تعداد	2	5	15	30	60	40	23	11	4	1

6. هڪ فيڪٽري جي هزار ملازمن جي روز جي مزوري (سون ۾) ڏنل آهي HM ,GM, AM مڊيان چوٿائي ڪندڙ مشاهدا ۽ ڪثرتي مزدوري لهو.

روز جي مزوري(سَون ۾)	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
ملازمن جو تعداد	3	13	43	102	175	220	204	139	69	25	6	1

7. هڪ ڪمپني جي ڪَذريل 50 ڏينهن جي عرصي ۾ ڪمايل نفعن جو خلاصو هيٺ ڏنل آهي. مختصر ۽ فرضي طريقن سان نفعن جو AM لهو

(a). A = 9000, h = 2000 (b). A = 11000, h = 2000

نفعو (رپين ۾)	4000-6000	6000-8000	8000-10000	10000-12000	12000-14000
ڏينهن جو تعداد	5	7	11	21	6

8. شاگردن جون هڪ مضمون ۾ (50مان) ڪنيل مارڪون هيٺ ڏنل گروهي مواد جي جدول ۾ ڏنل آهن. معلوم ڪريو GM ,AM سڌي ۽ لاگرٿم واري طريقن سان،) HM, مڊيان ۽ ڪثرتي سراسري

مارڪون	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
شاگردن جو تعداد	9	18	35	17	5

9. HM ,GM ,AM مڊيان ، چوٿائي ڪندڙ مشاهدا ۽ ڪثرتي سراسري لهو هيٺ ڏنل مواد جي

جماعتي حدود	10.5-10.9	11.0-11.4	11.5-11.9	12.0-12.4	12.5-12.9
تعدد	2	7	10	12	8

(ii) 22.3 حسابي سراسري A.M جي خاصيتن جي سڃاڻپ ڪرڻ

جي خاصيتن جي سڃاڻپ ڪرڻ. هتي اسين، مثالن سان گڏ AM جي ڪجهه مکيه خاصيتن تي غور ڪريون ٿا

1 غير گروهي مواد ۾، AM کان سمورن مشاهدن جي انحرافن جي جوڙ اُپٽ ٻُڙي آهي

2 هڪ مستقل ڏيتا سيٽ جو AM اهو مستقل پاڻ تيندو

3. جيڪڏهن هڪ سيٽ جو AM $\bar{x}$ آهي تہ پوءِ Y = aX + b جڏهن تہ a ۽ b حقيقي عدد آهن $\bar{y} = a\bar{x} + b$ آهي

4. جيڪڏهن AM = GM = HM تہ پوءِ ڏيتا سيٽ جا سڀ مشاهدا ساڳيا يا مستقل هوندا.

5. هڪ غير مستقل مواد لاءِ AM > GM > HM

6. هڪ غير مستقل مواد لاءِ $(AM)(HM) \approx (G.M.)^2$

7. جيڪڏهن مڊيان = AM تہ پوءِ مواد همشڪلي آهي نہ تہ پي صورت ۾ مواد غير همشڪلي آهي

8. هڪ يڪ ڪثرتي ۽ همشڪلي مواد لاءِ ڪثرتي سراسري = مڊيان = AM

9. هڪ مستقل ڏيتا ۾، ڪثرتي سراسري = مڊيان = AM = GM = HM

مثال ۱

هيٺين ڏيتا سيٽن جي حسابي سراسري لهو.

(i). X={19, 19, 19, 19, 19} (ii). Y={3, 4, 6, 1, 6} جيڪڏهن Z = 3Y + 7،

KARU

حل (i). $X=\{19,19,19,19,19\}$ اهو هڪ مستقل آهي جنهن جون سڀ قيمتون 19 جي برابر آهن تنهنڪري $\bar{x}=19$.

(ii). پهريان اسان معلوم ڪريون ٿا.

$$\bar{y}=\frac{3+4+6+1+6}{5}=\frac{20}{5}=4$$

هاڻي، جيئن

$Z=3Y+7$ تنهنڪري $\bar{z}=3\bar{y}+7=3(4)+7=19.$

اسين تصديق ڪري سگهون ٿا ته جڏهن $Z=3Y+7=\{16,19,25,10,25\}$ ته پوءِ $\bar{z}=19$ دُرست آهي

مثال 2: ثابت ڪري ڏيکاريو ته A.M. $\{3,4,6,1,6\}$ ۽ انحرافن جي جوڙ اُپٽ ٻڙي ٿيندي

ثبوت: فرض ڪريو ته

$X=\{3,4,6,1,6\}$ پهريان $\bar{x}$ لهنداسين جيڪو آهي. $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{20}{5}=4$

هاڻي $\bar{x}$ کان انحراف آهن: (3-4),(4-4),(6-4),(1-4) ۽ (6-4) يا رڳو -1, 0, 2, -3 ۽ هاڻي اسان $\bar{x}$ کان سڀني انحرافن جي جوڙ اُپٽ لهون ٿا

$$\sum(X-\bar{x})=(-1)+(0)+(2)+(-3)+(2)=0 \Rightarrow \sum(X-\bar{x})=0$$

اهڙي طرح ثابت ٿيو.

مثال 3: تصديق ڪريو ته $\{19,19,19,19,19\}$ لاءِ ڪثرتي سراسري = مڊيان = A.M. = G.M. = H.M.

حل: ڏنل مستقل ڊيٽا سيٽ لاءِ سڀ سراسريون معلوم ڪندي. هتي (اڪي) $n=5$

$$A.M.=\frac{19+19+19+19+19}{5}=19 \qquad (i)$$

$$G.M.=(19\times19\times19\times19\times19)^{1/5}=19^{5\times\frac{1}{5}}=19. \qquad (ii)$$

$$H.M.=\frac{5}{\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}+\frac{1}{19}}=\frac{5}{\frac{5}{19}}=19. \qquad (iii)$$

(iv) مڊيان = $\left(\frac{5+1}{2}\right)$ هون مشاهدو = ٽيون مشاهدو = 19

(v) ڪثرتي سراسري = 19 (سڀ کان وڌيڪ ايندڙ مشاهدو)

مساوات (i) - (v) مان اسان حاصل ڪيو ڪثرتي سراسري = مڊيان = AM = GM = HM انهي ڪري ثابت ٿيو

مثال 4: AM ۽ مڊيان جو استعمال ڪندي ڏسو ته چا ڏنل مواد همشڪلي يا غير همشڪلي آهي

(i). 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10 (ii). 4, 8, 13, 14, 19, 20, 23

حل:

(i). $A.M.=\frac{4+5+6+6+6+7+7+7+7+7+7+8+8+8+9+10}{16}=\frac{112}{16}=7$

مڊيان = $\frac{1}{2}[$ انئون + نائون مشاهدو $]=\frac{1}{2}[7+7]=7$

جيئن ته مڊيان = AM

انهي ڪري مواد همشڪلي آهي

KARACHIEDU.COM

(ii).

$$A.M = \frac{4+8+13+14+19+20+23}{7} = 14.42$$

مڈيان $= \left[\frac{7+1}{2}\right]$ هون مشاهدو = چوٽون مشاهدو $= 14$

جيئن ته مڈيان $\neq$ AM انهي ڪري مواد غير همشڪلي آهي

مثال 5: {4,5,6,6,6,7,7,8} لاءِ تصديق ڪريو ته

(i). $A.M. > G.M. > H.M.$

(ii). $(G.M)^2 \approx (A.M)(H.M)$.

حل:

$$A.M. = \frac{4+5+6+6+6+7+7+8}{8} = 6.125,$$

$$G.M. = (4\times5\times6\times6\times6\times7\times7\times8)^{1/8} = 6.006$$

$$H.M. = \frac{8}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}} = 5.879.$$

جيئن ته $6.125 > 6.006 > 5.879$ تنهنڪري $A.M. > G.M. > H.M.$

انهي ڪري (i) جي تصديق ٿي

جيئن ته $(G.M.)^2 = 36.072$ ۽ $(A.M.)(H.M.) = 36.008$ تنهنڪري $(G.M.)^2 \approx (A.M.)(H.M.)$.

انهي ڪري (ii). جي تصديق ٿي

(iii): 22.3 قدري سراسري ۽ متحرڪ سراسري لهڻ

(a) قدري سراسري يا وزني سراسري (Weighted mean)

جيڪڏهن مواد ۾ ڪجهه مشاهدا بين کان وڌيڪ اهم هجن ته پوءِ اسين سراسري ڪڍڻ لاءِ سڀني کي برابر وزن يا قدر(نسبتي اهميت) ڏيئي سگهون. اها سراسري جيڪا مشاهدن جي قدرن يا نسبتي اهميت جو استعمال ڪندي وڃي ان کي قدري سراسري يا وزني سراسري چئبو آهي.

جيڪڏهن $x_1, x_2, ..., x_n$ آهي عدد آهن جيڪي مواد ۾ مشاهدن سان لاڳاپيل آهن ۽ $w_1, w_2, ..., w_n$ واسطيدار وزن آهن ته پوءِ قدري G.M.A.M. ۽ H.M آهن

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{\sum wx}{\sum w},$$

$$G_w = \text{antilog}\left[\frac{\sum w \log x}{\sum w}\right]$$

$$H_w = \frac{\sum w}{\sum\left(\frac{w}{x}\right)}$$

مثال 1: هڪ شاگرد جي سماجي علمن جي ڊپلوما ڪورس جي هر هڪ پڙهيل مضمون جون مارڪون، انهن جي نسبتي قدرن سان گڏ مليل آهن. مارڪن جي قدري سراسري لهو.

مضمون	انگريزي	فرانسيسي	تاريخ	سائنس	رياضي
مارڪون	73	82	60	62	57
وزن	4	3	2	1	1

حل: فارمولا آهن

$$H_w = \frac{\sum w}{\sum\left(\frac{w}{x}\right)}, \quad G_w = \text{antilog}\left[\frac{1}{\sum w}\left(\sum w \log x\right)\right] \quad ۽ \quad \bar{x}_w = \frac{\sum xw}{\sum w}$$

KARACHIEDU.COM

اسين گهربل جوڙ اُپتون هيٺين جدول ۾ ڪيون ٿا

x	w	$x.w$	$\frac{w}{x}$	log x	w. log x
73	4	292	0.0548	1.8633	7.4532
82	3	246	0.0366	1.9138	5.7414
60	2	120	0.0333	1.7782	3.5564
62	1	62	0.0161	1.7924	1.7924
57	1	57	0.0175	1.7559	1.7559
جوڙ اُپت	11	777	0.1538	---	20.2993

$\bar{x}_w = \frac{777}{11} = 70.6$ مارڪون

$G_w = \text{anti log}\left[\frac{1}{11} \times 20.2993\right]$

$G_w = \text{antilog}(1.8454) = 70.04$ مارڪون

$H_w = \frac{11}{0.1583} = 69.5$ مارڪون

نوٽ ڪريو ته:

مثال1 ۾ غير قدري سراسريون آهن $\bar{x} = 66.8$, G.M.=66.17 ۽ H.M.=65.58 جيڪي قدري سراسرين کان گهٽ آهن. مارڪن جي قدري سراسري، اهم ڪورسن کي وڌيڪ حصو ڏيندي. شاگرد جي سراسر ڪارڪردگي کي بهترين طريقي سان بيان ڪري ٿي

(b) متحرڪ سراسريون (Moving averages)

جيڪڏهن اسين وقت جي مستقل وقفن (ڏينهن ۾ / مهينن ۾ / سالن وغيره ۾) ۾ ڪنهن دلچسپي واري بدلجندڙ جي سراسري روپي جو تجزيو ڪرڻ چاهيون ٿا ته پوءِ سراسري ۾ تبديلي جي ڪوج ڪرڻ ڏاڍو اهم آهي جيئن مخصوص وقفن يا مدتن ۾ وقت گذري. ان صورت ۾ وقت جي مخصوص وقفن يا مدتن جي سراسري وقت سان گڏ تبديل يا حرڪت ڪندي رهندي آهي. ۽ انهن سراسرين کي متحرڪ سراسريون (Moving averages) چئبو آهي.

اڪي- وقفي وارين متحرڪ سراسرين جي صورت ۾، اسين متحرڪ سراسرين کي رڳو مخصوص وقفي جي وچ وارن خانن ۾ رکندا آهيون ۽ باقي خانا خالي ڇڏبا آهن. متحرڪ سراسرين کي اڳيئي موجود خانن ۾ رکبو آهي. پڊي- وقفي وارين متحرڪ سراسرين جي صورت ۾ اسين بن وچين خانن جي سراسري رکندا آهيون. ان طريقي سان اڳيئي موجود خانن ۾ متحرڪ سراسرين کي رکي سگهجي ٿو.

هيٺين مثالن جي مدد سان طريقي کي واضح ڪجي ٿو.

مثال ١: هيٺيون مواد گذريل سال لاءِ، هڪ شي جي ماهوار قيمت رُپيا في مهينو جي حساب سان خلاصو ڪري بيان ڪري ٿو.

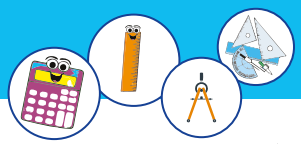
مهينو	جنوري	فيبروري	مارچ	اپريل	مئي	جون	جولائي	آگسٽ	سيپٽمبر	آڪٽوبر	نومبر	ڊسمبر
قيمت رپيا في مهينو	180	87	91	102	108	139	150	200	220	307	289	330

معلوم ڪريو (i) 3 - مهيني واريون .(ii) 5 - مهيني واريون .(iii) 4 - مهيني واريون متحرڪ سراسريون

حل .(i) پهريان اسين 3 - مهيني واريون متحرڪ سراسريون لهنداسين اسين ٽن لاڳيتي مهينن جي شروعات کنداسين: جنوري، مارچ، فيبروري اپريل، مارچ مئي ۽ اهڙي ريت آخري ٽن مهينن آڪٽوبر- ڊسمبر تي ختم ڪنداسين‌اهي3 - مهيني واري وقفي جي وچين مهيني ۾ رکبيون مثال طور جنوري- مارچ واري متحرڪ سراسري فيبروري‌جي پاسي ۾ رکبي 3 - مهيني واريون متحرڪ سراسريون پر واري جدول ۾ مختصر طور ڏنل آهن

مهينو	قيمت	3- مهيني واريون متحرڪ سراسريون
جنوري	180	----------
فيبروري	87	(180+87+91)/3=119.33
مارچ	91	93.33
اپريل	102	100.33
مئي	108	166.33
جون	139	132.33
جولائي	150	163
آگسٽ	200	190
سيپٽمبر	220	242.33
آڪٽوبر	307	272
نومبر	289	308.66
ڊسمبر	330	----------

KUTRACHIEDU.COM



(ii) 5- مهينن وارين متحرڪ سراسرين لاءِ، اسين 5 لاڳيتا مهينا شروع ڪنداسين. جنوري - مئي، فيبروري - جون ۽ اڳڙي طرح سان آگسٽ - ڊسمبر تي ختم ڪنداسين متحرڪ سراسريون پاسي واري جدول ۾ ڏيکاريل آهن. اسين ڏسي سگهون ٿا تہ اڳڙيون 8 سراسريون آهن. پهريون ۽ آخري ۾ خانا خالي رکبا. 5 مهينن واريون متحرڪ سراسريون وچ وارن مهينن تي رکيل آهن.

مهينو	قيمت	5- ميهني واريون متحرڪ سراسريون
جنوري	180	----------
فيبروري	87	----------
مارچ	91	(180+87+91+102+108)/5=113.6
اپريل	102	105.4
مئي	108	118
جون	139	139.8
جولائي	150	163.4
آگسٽ	200	203.2
سيپٽمبر	220	233.2
اڪٽوبر	307	269.2
نومبر	289	----------
ڊسمبر	330	----------

(iii) 4- مهينن وارين متحرڪ سراسرين لاءِ، اسين هر دفعي چار لڳاتار مهينن جون تولين ڪڍنداسين جيڪي شروع هن ريت ٿين ٿا: جنوري- اپريل، فيبروري - مئي، سيپٽمبر – ڊسمبر شروع ۾ 4 مهينن جي وچ ۾ سراسريون رکيون ويون آهن ان کانپوءِ گهربل 4- مهينن واريون مرڪزي متحرڪ سراسريون حاصل ڪرڻ لاءِ اسين 4- مهينن وارين سراسرين جي هر هڪ جوڙي جي وڏيڪ سراسري ڪڍنداسين هيٺين جدول ۾ نتيجن جو خلاصو بيان ڪيو ويو آهي. آسان هميشہ ٻڌي- وڌي. وارين متحرڪ سراسرين لاءِ اسين ٻن ڪالمن جو اضافو ڪنداآهيون

مهينا	قيمتون	4- مهينن واريون متحرڪ سراسريون (شروعاتي)	4- مهينن واريون متحرڪ سراسريون (مرڪزي)
جنوري	180		----------
فيبروري	87		----------
		115	
مارچ	91		106
		97	
اپريل	102		103.5
		110	
مئي	108		117.375
		124.75	
جون	139		137
		149.25	
جولائي	150		163.25
		177.25	
آگسٽ	200		198.25
		219.25	
سيپٽمبر	220		236.625
		254	
آڪٽوبر	307		270.25
		286.5	
نومبر	289		----------
ڊسمبر	330		----------

KTDU.COM

نوٽ ڪريو ته: سال جي 12 مهينن جي سراسري واري قيمت (حسابي سراسري) برابر آهي 183.58 رپيا في مهينو. اسين ڏسي سگهون ٿا ته قيمتون مستقل نه هيون ۽ 3، 5، 4 مهينن واريون متحرڪ سراسريون سڄي سال جي ترتيبوار وقفن جي تبديلين جو بهتر طريقي سان خلاصو ڪن ٿيون.

22.3 مڊيان، چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدن ۾ ڪثرتي سراسري جو گراف وسيلي اندازو لڳائڻ

گراف وسيلي مڊيان ۽ چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدن جو هڪ معلوم ڪرڻ ۾ اندازو لڳائڻ لاءِ اسين مواد جو 0 give (مجموعي تعددي گھٽ پاسو) استعمال ڪندا آهيون. 0 give ۾ مڊيان هيٺيون چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدو (Q_1) ۽ مٿيون چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدو (Q_3) رڳو انهن ٽبڪن جا x – محددي يا x-coordinates آهن جن جا y – محددي يا y-coordinates (مجموعي تعدون) ترتيبوار $\frac{n}{2}$ $\frac{n}{4}$ ۽ $\frac{3n}{4}$ آهن.

گراف وسيلي ڪثرتي سراسري (جيڪڏهن وجود رکي) جو هڪ لهڙ ۽ اندازو لڳائڻ لاءِ، اسين مواد جو ڪالمي نقشو استعمال ڪندا آهيون. ڪثرتي جماعت اها جماعت آهي جنهن لاءِ مستطيل جي اوچائي سڀ کان وڏي هوندي آهي ۽ ان جماعت ۾ ڪثرتي سراسري بن ليڪ ٽڪرن جي ڪاٽيندڙ مشترڪ ٽبڪي جو x- محددي آهي پهريون ليڪ ٽڪرڪثرتي جماعت ۽ ان کان پوءِ واري جماعت سان واسطو رکندڙ مستطيلن جي ڪابي چوٽين کي ملائڻ سان ڪيبو آهي.بيو ليڪ ٽڪر ڪثرتي جماعت ۽ ان کان اڳ واري جماعت سان واسطو رکندڙ مستطيلن جي ساڄي چوٽين کي ملائڻ سان ڪيبو آهي. ڪاٽ جي ٽبڪي کان x- محور ڏانهن عمود x-محور کي ڪثرتي سراسري جي هڪ يا مقام تي لڳي ٿو. اهو طريقو،مسلسل جماعتن واري گروهي مواد لاءِ استعمال ڪبو آهي.

مثال۱: گراف وسيلي مڊيان،چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدا ۽ ڪثرتي سراسري واري وزنن (ڪلو گرامن ۾) جو هڪ لهو ۽ اندازو لڳايو

وزن (ڪلو گرامن ۾)	70-74	75-79	80-84	85-89	90-94
شاگردن جي تعداد	10	24	46	12	8

حل: اسان وٽ n=100 ۽ ڏنل مواد مسلسل جماعتن وارو گروهي مواد آهي.ogive- ۽ ڪالمي نقشو ڪڍڻ لاءِ اسين پهريان ۾ واري جدول ۾ حقيقي جماعتي حدون ۽ مجموعي تعددون معلوم ڪيون ٿا.

جماعتي حدون	حقيقي جماعتي حدون	f	مجموعي تعداد
70-74	69.5-74.5	10	10
75-79	74.5-79.5	24	34
80-84	79.5-84.5	46	80
85-89	84.5-89.5	12	92
90-94	89.5-94.5	8	100

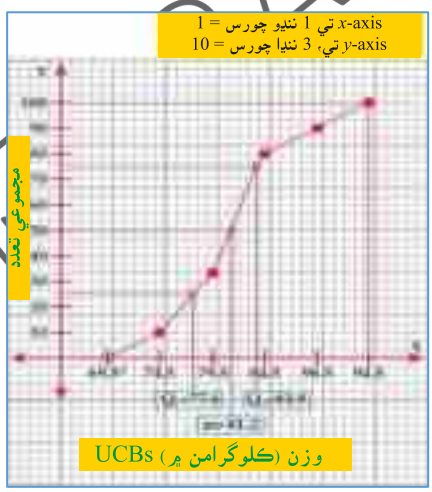
مڊيان ۽ چوٿائي ڪنڊڙ مشاهدن لاءِ، اسين y-axis. تي $\frac{n}{2} = 50,$. $\frac{n}{4} = 25$ ۽ $\frac{3n}{4} = 75$ جي سڃاڻپ ڪريون ٿا.

ان ڪانپوءِ انهن مان ogive ڏانهن عمود ڪڍندي ۽ ان ڪانپوءِ ogive مان x-axis ڏانهن عمود ڪڍندي اسان کي ترتيبوار مڊيان ۽ Q_3 ۽ Q ملي ٿو، اسين انهن ملهن کي هن ريت لکنداسين

مڊيان $\approx$ 81.2,

$Q_1 \approx$ 77.6,

$Q_3 \approx$ 83.9.



KACHHIEDU.COM

ڪثرتي سراسري لاءِ اسين پهريان ڪالمي نقشو ڪيون ٿا جيئن هتي ڏيکاريل آهي: ڪثرتي جماعت سپ کان ڏي اُوچائي واري مستطيل سان واسطو رکي ٿي جيئن شڪل ۾ نمايان آهي.
ٻہ ليڪ ٽڪر حاصل ڪرڻ لاءِ، اسين ڪثرتي جماعت ۽ ان کانپوءِ واري جماعت جي مستطيلن جي کاٻي چوٽين کي ملائيندا سين ان کانپوءِ ڪثرتي جماعت ۽ ان کان اڳ واري جماعت جي مستطيلن جي ساڄي چوٽين کي ملائيندا سين. هاڻي ڪاٽ جي ٽڪي کان x-axis ڏانهن عمود- کي لڳ ڀڳ 81.4 تي لڳي ٿو جيڪو ڪثرتي سراسري جو هنڊ آهي. انهي کري ڪثرتي وزن لڳ ڀڳ 81.4 ڪلو گرام آهي.



مشق 22.4

1. جيڪڏهن, $W = \{148, 145, 160, 157, 156, 160, 160, 165\}$ ۽ $X = \{-2, -2, -2, -2\}$ ته پوءِ
   a. ثابت ڪري ڏيکاريو ته W جي A ڪان سيني انحرافن جي جوڙ اپت ٻڙي آهي.
   b. ثابت ڪري ڏيکاريو ته x جي ڪثرتي سراسري = مڊيان = A.M. = G.M. = H.M.
   c. جو $Y = 3X$ لهو A.M.
   d. جو $Z = 3W-11$ لهو A.M.
   e. ثابت ڪري ڏيکاريو ته W جي ڪثرتي سراسري > مڊيان > A.M. > G.M. > H.M.
2. چڪاس ڪريو ته ڇا $X = \{7,9,3,3,3,4,1,3,2,2\}$ ۽ $Y = \{2,1,4,4,4,6,6,5,7,1\}$ همشڪلي آهن؟
3. هڪ ڪتب لاءِ پوري مهيني ۾ گهربل شين جا گهربل وزن (ڪلو گرامن ۾) ۽ قيمتون(رپيا في ڪلو گرام) ڏنل آهن. A.M. ۽ H.M. G.M. جو استعمال ڪندي قيمتن جي مقداري سراسري لهو,

شي	A	B	C	D	E
قيمت (رپيا في ڪلو گرام)	300	200	600	250	650
گهربل وزن (ڪلو گرام)	25	5	4	8	3

4. 50خريد ڪيل سرن مان،21سرن جو سراسري مايو24.2 ڪلو گرام آهي ۽ 29 سرن جو سراسري مايو 23.6ڪلوگرام آهي50 سرن جو قدري سراسري مايو لهو
5. هڪ صوبي ۾، چوٽي واري هفتي ۾ ڪوويڊ19جي ڪري ٽيل فوتگين جي تعداد واري مواد مان 3,2 ۽ 4 ڏينهن واريون متحرڪ سراسريون لهو.

آچر	چنڇر	جمعو	خميس	اربع	اڱارو	سومر	ڏينهن
310	259	196	188	158	130	102	فوتگين جو تعداد

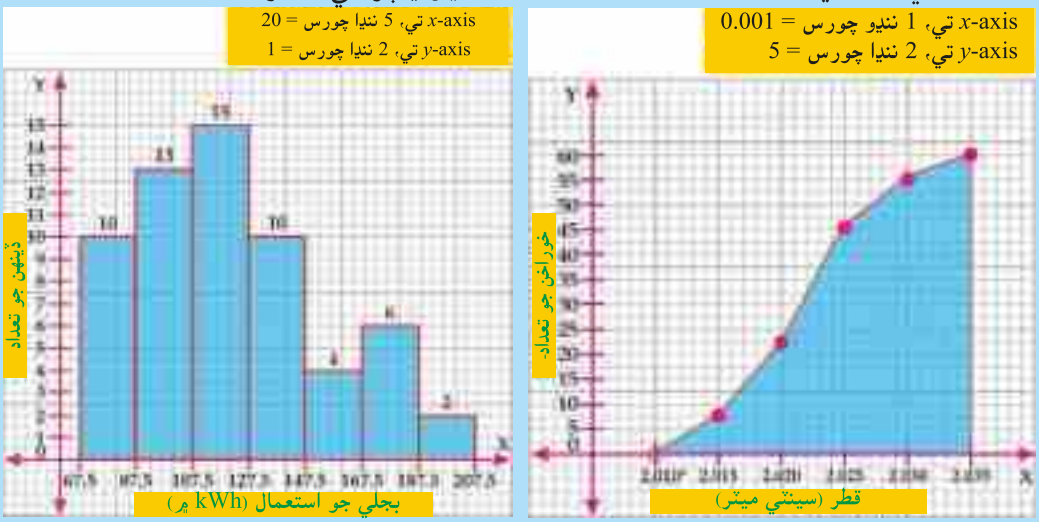
6. 11سالن ۾ وڪري (ملين رُپين ۾) جون 4 ۽ 5 سالن واريون متحرڪ سراسريون لهو.

سال	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
وڪرو	102	130	158	188	196	259	310	188	196	259	310

7. ڏنل مواد ۾ گراف وسيلي مڊيان، چوٿائي ڪنڊ مشاهدا ۽ ڪثرتي سراسري جو هنڌ لهو ۽ انهن جو اندازو لڳايو.

اضافي وقت (ڪلاڪ في هفتو)	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59
ڏينهن جو تعداد	5	4	7	11	12	8	1

8. هيٺين گرافن ۾ ظاهر ڪيل ماپن جو هنڌ لهو ۽ انهن جو اندازو لڳايو.
a ڪثرتي سراسري b مڊيان ۽ چوٿائي ڪنڊ مشاهدا



22.4 پکڙجڻ جا پيمانا (Measures of Dispersion)

مواد ۾ تبديلي ۽ موافقت جو خيال ڪئي بنا مرڪزي رجحان جون ماپون يا پيمانا مواد جي سراسري يا مرڪزي رويي تي مرڪوز هوندا آهن. جڏهن مشاهدا سراسري کان گهٽو پري هجن تہ پوءِ مواد جي ورتاءُ ۽ خاصيتن جي پوري سمجهہ لاءِ رڳو مرڪزي رجحان جا پيمانا ڪافي نہ هوندا آهن
مثال طور : هيٺين جدول، ٻن شاگردن جي پنجن مضمونن ۾ ڪيل مارڪون ڏيکاري ٿي.

مضمون	I	II	III	IV	V
شاگرد A جون مارڪون	90	30	85	50	25
شاگرد B جون مارڪون	63	50	60	55	52

جيڪڏهن اسين AM جو استعمال ڪندي هر هڪ شاگرد جي حاصل ڪيل مارڪن جي سراسري لهون تہ پوءِ اسين ڏسون ٿا تہ ٻنهي شاگردن جي مارڪن جا 56AM آهن پر چا ٻنهي شاگردن جي ڪارڪردگي ماپڻ لاءِ هو ڪافي آهي جواب نہ آهي. شاگرد A جي مارڪن ۾ سراسري جي چوڌاري وڏي گهٽ وڌائي آهي. جڏهن تہ شاگرد B جون مارڪون سراسري جي وڌيڪ ويجهيون آهن. سراسري جي چوڌاري ٿوري گهٽ وڌائي يا تبديلي يا ڦيلاو يا پکڙجڻ جي ڪري، شاگرد B جي ڪارڪردگي شاگرد A کان وڌيڪ مستحڪم يا هم آهنگ يا قابل اعتبار آهي. سراسرين جي سڀني قسمن، جيڪي اسان سکيا آهن جو استعمال ڪندي، اسين شاگردن جي مارڪن جون سراسريون ڏسي سگهون ٿا

سراسري	A.M.	مڊيان	ڪثرتي سراسري	G.M.	H.M.
شاگرد A جون مارڪون	56	50	ڪابہ نہ	لڳ ڀڳ 49	لڳ ڀڳ 43
شاگرد B جون مارڪون	56	55	ڪابہ نہ	لڳ ڀڳ 56	لڳ ڀڳ 56

مارڪن ۾ تبديلي جي ڪري، شاگرد A جون جون سراسريون هڪ ٻئي کان بہ گهٽو مختلف آهن. شاگرد B جون سراسريون هڪٻئي جي وڌيڪ ويجهو آهن.

KARACHI

مستحکم ۽ هم آهنگ کارکردگي جي ڪري اسين شاگرد A جي پيٽ ۾ شاگرد B جون ايندڙ مضمون ۾ مارڪن جي اڳڪٿي ڪرڻ لاءِ بهتر حالت ۾ آهيون.مواد جي گهٽ وڌائي يا تبديلي جو علم فيصلا يا اڳڪٿي ڪرڻ ۾ وڏي اهميت رکي ٿي. انهي ڪري مواد جي بهترسمجهه لاءِ، اهو ڏاڍو اهم آهي ته اسين سراسريون لهڻ کان علاوه گهٽ وڌائي يا پکڙجڻ جو درجو لهون. پکڙجڻ جاپيمانا اهو ظاهر ڪن ٿا ته مواد سراسري يا مرڪزي نقطي جي چوڌاري ڪيتري حد تائين پکڙيل آهي. پکڙجڻ جوپيمانو يا ماپون مواد ۾ سراسر تبديلي کي ظاهر ڪري ٿو. استحڪام يا هم آهنگي يا اعتبار جي نقطه نظر سان، اهوبن يا وڌيڪ ڊيٽا سيٽن جي پيٽ ڪرڻ لاءِ گهٽو استعمال ڪيا آهن. جيڪڏهن مواد ۾ وڌيڪ گهٽ وڌائي آهي ته پوءِ استحڪام ياهم آهنگي يا اعتبار گهٽ هوندو جيڪڏهن اسانجو واسطو رڳو هڪ ڊيٽاسيٽ جي گهٽ وڌائي يا تبديلي سان آهي ته پوءِ اسين پکڙجڻ جا ماپا ڊيٽا سيٽ جي ايڪن ۾ لهنداسين ۽ انهن ماپن کي پکڙجڻ جا قطعي پئمانا (Absolute measures of dispersion) چئبو آهي. بن يا وڌيڪ ساڳي قسم يا ايڪن، مشاهدن جو ساڳيو تعداد ۽ برابر يا ويجهن سراسري وارن ڊيٽا سيٽن جي گهٽ وڌائي يا تبديلي جي پيٽ پڻ پکڙجڻ جي قطعي پئمانن سان ڪري سگهجي ٿي. ٻه يا وڌيڪ مختلف قسم يا ايڪن، مشاهدن جي مختلف تعداد ۽ مختلف سراسرين وارن ڊيٽا سيٽن جي پيٽ ڪرڻ لاءِ اسين پکڙجڻ جا نسبتي پئمانا (Relative Measures of dispersion) استعمال ڪندا آهيون جيڪي مواد جي ايڪن ۾ نه هوندا آهن. پر تبديلي جو نسبتي ورتاءُ ڏيکارين ٿا.

22.4(i) وسعت جي وصف، سڃاڻپ ۽ ماپ ڪرڻ. تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهڻ:

هتي اسين پکڙجڻ(Dispersion) جا ڪجهه اهم پيمانن تي غور ڪنداسين.

(a) وسعت (Range)

مواد جي وسعت مان مراد آهي ته ٻه انتهائي مشاهدن جو فرق. غير گروهي مواد لاءِ، وسعت (R) سڀ کان وڏي مشاهدي (x_L) ۽ سڀ کان ننڍي مشاهدي (x_S) جي وچ ۾ فرق آهي.

يعني ته $R = x_L - x_S$ (1)

گروهي مواد لاءِ، وسعت R آخري جماعت جي UCB (يعني UCB_F) ۽ شروعاتي جماعت جي LCB يعني LCB_I) جي وچ ۾ فرق آهي

يعني ته $R = UCB_F - LCB_I$ (2)

فارمولن (1) ۽ (2) مان مطلق يا قطعي وسعت (Absolute Range) لهبي آهي، نسبتي وسعت (Relative Range) اسين مساوات (1) ۽ (2) ۾ ترتيبوار $x_L + x_S$ ۽ $UCB_F + LCB_I$ سان وڌ ڪنداسين تي جيئن پيٽ ٿي سگهي.

نوٽ ڪيو ته:

- نهايت مختلف مشاهدن واري مواد جي گهٽ وڌائي کي وسعت پوري ريت نه ماپندي آهي
- تعددن ۽ بين پيرامٽرن جو استعمال ڪرڻ بنا وسعت رڳو مواد جي پکڙجي وارن مشاهدن جو استعمال ڪندي آهي.

مثال 1: ڏنل ڊيٽا سيٽن جي وسعت لهو.

$X = \{3, 8, 10, 7, 5, 14, 2, 12, 8\}$, $W = \{27.90, 34.70, 54.40, 18.92, 47.60, 39.68\}$

$Z = \{1, 3, 2, 4, 3, 2, 43\}$. ۽ $Y = \{8, 8, 8, 8, 8\}$ نتيجن جو مطلب پڻ ٻڌايو

حل: اسانکي خبر آهي ته غير گروهي مواد لاءِ $R = x_L - x_S$

$R_Z = 43 - 1 = 42$. ۽ $R_Y = 8 - 8 = 0$، $R_X = 14 - 2 = 12$، $R_W = 54.40 - 18.92 = 35.48$

تنهنڪري، اسين ڊيٽا سيٽ W جي وسعت جو مطلب هن ريت ڪڍي سگهون ٿا. "ڊيٽا سيٽ W ۾ سڀ مشاهدا پکڙجي واري مشاهدن 18.92 ۽ 54.40 جي وچ ۾ 35.48 جي فاصلي اندر موجود آهن." ڊيٽا سيٽن W ۽ X ۾ مشاهدا پکڙجي وارين رقمن جي وچ ۾ پوري طرح پکڙيل آهن. تنهنڪري وسعت گهٽ وڌائي يا تبديلي کي با معني انداز ۾ ظاهر ڪري ٿو. سيٽ Y جي وسعت ٻڙي آهي. چاڪاڻ ته سڀ مشاهدا ساڳيا آهن ۽ انهن ۾ ڪابه گهٽ وڌائي نه آهي. سيٽ Z ۾ مشاهدن جي اڪثريت 1 ۽ 4 جي وچ ۾ آهي پر هڪ انتهائي مختلف مشاهدي 43 جي ڪري وسعت 42 گمراهه ڪندڙ آهي.

KARACHIEDU.COM

مثال 2: وسعت جو استعمال ڪندي هيٺ ڏنل پنج مضمونن ۾ ٻن شاگردن جي مارڪن جي گهٽ وڌائي جي پيٽ ڪريو ۽ نتيجن جو مطلب ڪيو

شاگرد A جون مارڪون	90	30	85	50	25
شاگرد B جون مارڪون	63	50	60	55	52

حل: ٻنهي شاگردن وارو مواد غير گروهي آهي مارڪن جون مطلق وسعتون آهن:
مارڪون $R_A = 90 - 25 = 65$ ۽ مارڪون $R_B = 63 - 50 = 13$
هتي $x_L + x_S$ ٻنهي شاگردن لاءِ ساڳيو آهي. انهي ڪري هتي نسبتي وسعت ڪارائتي نہ آهي. مطلق وسعت جي بنياد تي شاگرد A جي ڪارڪردگي شاگرد B جي پيٽ ۾ وڌيڪ گهٽ وڌائي ظاهر ڪري ٿي. انهي ڪري شاگرد B جي ڪارڪردگي A کان وڌيڪ موافق آهي.

مثال 3: وسعت جو استعمال ڪندي، پنج مختلف ڪمپنين جون ٺهيل ساڳيئي قسم جي پنج بيٽرين جي قيمت ۽ عمر جي گهٽ وڌائي معلوم ڪريو. نتيجن جو مطلب پڌ ڪيو.

قيمت (هزارن ۾)	8	13	18	23	30
عمر سالن ۾	1.3	1.5	1.8	2.5	3.5

حل: بيٽرين جي قيمت (P) ۽ عمر (L) وارو مواد غير گروهي آهي. اهو مواد قسم ۽ ايڪن ۾ بہ مختلف آهي ٻنهي ڊيٽاسيٽن لاءِ $x_L + x_S$ بہ مختلف آهن: انهي ڪري اسين گهٽ وڌائي جي پيٽ ڪرڻ لاءِ نسبتي وسعت جو استعمال ڪريون ٿا

$$R_P \text{ نسبتي} = \frac{P_L - P_S}{P_L + P_S} = \frac{30-8}{30+8} = \frac{22}{38} = 0.5789$$

$$\mathbb{R}_L \text{ نسبتي} = \frac{L_L \quad L_S}{L_L + L_S} = \frac{3.5 \quad 1.3}{3.5+1.3} = \frac{2.2}{4.8} = 0.4583.$$

بيٽرين جي عُمرن ۾ نسبتي تبديلي جي پيٽ ۾ پنج مختلف ڪمپنين جي ناهيل بيٽرين جي قيمتن ۾ نسبتي تبديلي وڌيڪ آهي.

مثال 4: ٻن شهرن ڪراچي ۽ مورو مان بنا ڪنهن قاعدي جي چونڊيل ڪجهه ڪٽنبن جي گروهي مواد جو استعمال ڪندي هڪ ڪٽنب جي موبائيلن جي تعداد جي وسعت جي پيٽ ڪريو. ڇا اهو ڪافي آهي تہ وسعت جي بنياد تي تبديلي جي پيٽ ڪجي

موبائيلن جو تعداد	0	1	2	3	4	5	6	7
ڪٽنبن جو تعداد (ڪراچي)	1	7	15	12	5	2	2	1
ڪٽنبن جو تعداد (مورو)	4	13	8	5	2	1	0	1

حل: غير مسلسل جماعتن واري گروهي مواد ۾ جماعتن جي وچ ۾ وٿي $d = 1$ آهي. انهي ڪري وسعت آهي:
موبائيل $R = UCB_F - LCB_I = (7 + 0.5) - (0 - 0.5) = 7.5 + 0.5 = 8$ ڪراچي ۽ مورو ۾ هڪ ڪٽنب جي موبائيلن جي تعداد جي وسعت ساڳي آهي يعني تہ 8. موبائيل پر وسعت لاءِ، شهرن ۾ ڪٽنبن جي تعداد (تعد) تي غور نہ ڪيو ويو آهي. ڪراچي ۽ مورو جي هڪ سراسر ڪٽنب جي موبائيلن جي تعداد جي وچ ۾ گهٽ وڌائي بلڪل مختلف آهي پر اهو وسعت سان ظاهر نٿو ٿي سگهي

مثال 5: هيٺين مواد جو استعمال ڪندي هڪ دُڪان جي بجلي جي استعمال kWh ۾ جي وسعت لهو

بجلي جو استعمال	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جي تعداد	10	13	15	10	4	6	2

KARACHIEDU.COM

حل: مسلسل جماعتن واري گروهي مواد ۾ جماعتن جي وچ ۾ وٿي $d=1$ آهي
تنهنڪري

$$R=UCB_F-LCB_1=\left[207+\frac{1}{2}\right]-\left[68-\frac{1}{2}\right]=207.5-67.5=140\,\text{kWh.}$$

هتي R ۾ جماعتن جي تعدد جو استعمال نٽو ٿئي انهيءَ ڪري گمراهه ڪن ٿي سگهي ٿو.

(b) تغير، سراسري انحراف ۽ معاري انحراف (Variances, Mean deviation and Standard Deviation)

مواد ۾ پکڙجڻ جو ملهه بهتر طريقي سان لهڻ لاءِ تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف جي تصورن ۾ رڳو پچاڙي مشاهدن جي بدران اسين تعددن سان گڏ سڀ مشاهدا استعمال ڪريون ٿا
سراسري (عام طرح سان A.M) جي چوڌاري مشاهدي x_i جو انحراف هن ريت بيان ڪيو آهي

$$D_i=x_i-\bar{x} \quad \text{- (1) سراسري جي چوڌاري انحراف منفي، مثبت يا پڙي ٿي سگهن ٿا پر انحرافن}$$

جو جوڙ لهن کان ائتو نه آهي جاکاڙ ته جوڙ اُپت هميشه پڙي ايندي.
اهو مسئلو حل ڪرڻ لاءِ، اسان کي منفي انحرافن کان لازمي بچڻو پوندو ۽ اهو بن طريقن سان ٿيندو
اسين چورس ٽيل انحرافن يا قطعي انحرافن جو استعمال ڪري سگهون ٿا.

$$D_i^2=(x_i-\bar{x})^2 \quad \text{(2) سراسري جي چوڌاري چورس ٽيل انحراف}$$

$$|D_i|=|x_i-\bar{x}| \quad \text{(3) سراسري جي چوڌاري قطعي انحراف}$$

چورس ٽيل انحراف هميشه غير منفي هوندا آهن. هڪ حقيقي عدد جو قطعي ملهه به هميشه غير منفي هوندو آهي. مثال طور $|3|=3,|-22|=22,|0|=0,|-1.5|=1.5$.
ان ڪري طريقن سان اسين پکڙجڻ جا وڏيڪ مورون پيمانا بيان ڪريون ٿا.
تغير (s^2 يا Var A.M) جي چوڌاري مشاهدن جي چورس ٽيل انحرافن جي سراسري آهي. سراسري (يا قطعي) انحراف(A.M,(M.D ڪان مشاهدن جي قطعي انحرافن جي سراسري آهي. جاکاڙ ته پکڙجڻ عام طرح سان مواد جي اصل ايڪن ۾ بامعني هوندو آهي ۽ تغير ۾ چورس ايڪا هوندا آهن انهي ڪري معياري انحراف لهڻ لاءِ اسين ان جو ٻيو مول معلوم ڪريون ٿا معياري انحراف(S يا S.D) تغير جو مثبت ٻيو مول آهي
غير گروهي مواد لاءِ جنهن جا مشاهدا $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ هجن ۽ انهن جو A.M. $=\bar{x}$:

$$Var=s^2=\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} \quad (4)$$

$$M.D.=\frac{\sum|x-\bar{x}|}{n} \quad (5)$$

$\bar{x}=\dfrac{\sum x}{n}$ جڏهن ته $S.D.=s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\dfrac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$ (6)

گروهي مواد لاءِ، جنهن ۾ x_i جماعتي نشان ۽ f_i جماعتي تعدد آهن ته پوءِ

$$Var=s^2=\frac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{\sum f} \quad (7)$$

$$M.D.=\frac{\sum|x-\bar{x}|f}{\sum f} \quad (8)$$

$\bar{x}=\dfrac{\sum xf}{\sum f}$ جڏهن ته $S.D.=s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\dfrac{\sum(x-\bar{x})^2 f}{\sum f}}$ (9)

فارمولا (4) - (9) قطعي ملهن لاءِ استعمال ٿين ٿا. مواد جي پيٽ لاءِ، مواد جي ايڪن ۾ $\bar{x}$ سان ونڊ ڪندي نسبتي ماپا معلوم ڪبا آهن.

KARACHIEDU.COM

مثال 1: شاگرد A ۽ B جي مارڪن جو تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهو. ڪهڙو شاگرد تسلسل سان ڪارڪردگي ڏيکاري ٿو.

شاگرد A جون مارڪون	90	30	85	50	25
شاگرد B جون مارڪون	63	50	60	55	52

حل: ٻنهي شاگردن جون مارڪون غير گروهي مواد ڏيکارين ٿيون. سڀ کان اڳ ۾ اسين مارڪن جي سراسري لهون ٿا.

شاگرد A لاءِ (x) ۽ شاگرد B لاءِ (y) اسان وٺ آهي.

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{280}{5} = 56 \quad ۽ \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{280}{5} = 56$$

جيئن ته سراسريون برابر آهن تنهنڪري اسين تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف جا قطعي پکڙجڻ وارا فارمولا استعمال ڪريون ٿا. هيٺين جدولن ۾ اهي حساب ڏيکاريل آهن

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$
90	34	1156	34
30	-26	676	26
85	29	841	29
50	-6	36	6
25	-31	961	31
280 = جوڑ اُپت	0	3670	126

$$Var_A = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n} = \frac{3670}{5} = 734.$$

$$(M.D.)_A = \frac{\sum |x-\bar{x}|}{n} = \frac{126}{5} = 25.2.$$

$$(S.D.) = \sqrt{734} = 27.0924.$$

y	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$\lvert y-\bar{y}\rvert$
63	7	49	7
50	-6	36	6
60	4	16	4
55	-1	1	1
52	-4	16	4
280 = جوڑ اُپت	0	118	22

$$Var_B = \frac{\sum (y-\bar{y})^2}{n} = \frac{118}{5} = 23.6.$$

$$(M.D.)_B = \frac{\sum |y-\bar{y}|}{n} = \frac{22}{5} = 4.4.$$

$$(S.D.)_B = \sqrt{23.6} = 4.8578.$$

سيني فارمولن سان اسان ڏسون ٿا ته شاگرد A جي مارڪن جي گهٽ وڌائي شاگرد B جي مارڪن جي گهٽ وڌائي کان تمام وڌيڪ آهي تنهنڪري شاگرد B جي ڪارڪردگي وڌيڪ تسلسل واري آهي

مثال 2: مختلف ڪمپنين جون ناهيل پنج ساڳي قسم جي بيٽرين جي قيمت ۽ عمر جا معياري انحراف معلوم ڪندي انهن جي گهٽ وڌائي جي پيٽ ڪريو نتيجن جو مطلب پڌ ڪيو.

قيمت (هزارن ۾)	8	13	18	23	30
عمر (سالن ۾)	1.3	1.5	1.8	2.5	3.5

KARACHIEDU.COM

حل: قيمت (P) ۽ عمر (L) جو مواد غير گروهي آهي. اهي مواد قسم ۽ ايڪن ۾ به مختلف آهن. سڀ کان اڳ ۾ اسين سراسريون لهون ٿا.

$$\bar{x}_P = \frac{\sum x_P}{n} = \frac{92}{5} = 18.4$$ هزار

۽

$$\bar{x}_L = \frac{\sum x_L}{n} = \frac{10.6}{5} = 2.12$$ سال

جيئن ته سراسريون مختلف آهن. تنهنڪري اسين پيٽ لاءِ نسبتي معياري انحراف وارو فارمولو استعمال ڪريون ٿا. P ۽ L لاءِ حساب هيٺين جدولن ۾ ڏيکاريل آهن

قيمت (P)	$x_P - \bar{x}_P$	$(x_P - \bar{x}_P)^2$
8	-10.4	108.16
13	-5.4	29.16
18	-0.4	0.16
23	4.6`	21.16
30	11.6	134.56
جوڙ آپت = 92	0	293.2

$$s_P = \sqrt{\frac{\sum (x_P - \bar{x}_P)^2}{n}} = \sqrt{\frac{293.2}{5}} = 7.658$$ هزار

نسبتي $s_P = \frac{s_P}{\bar{x}_P} = \frac{7.658}{18.4} = 0.416.$

عمر (L)	$x_L - \bar{x}_L$	$(x_L - \bar{x}_L)^2$
1.3	-0.82	1.69
1.5	-0.62	2.25
1.8	-0.32	3.24
2.5	0.38	6.25
3.5	1.38	12.25
جوڙ آپت = 10.6	0	25.68

$$s_L = \sqrt{\frac{\sum (x_L - \bar{x}_L)^2}{n}} = \sqrt{\frac{25.68}{5}} = 2.266$$ سال

نسبتي $s_L = \frac{s_L}{\bar{x}_L} = \frac{2.266}{2.12} = 1.069.$

بيٽرين جي عمر وارو نسبتي انحراف قيمت واري کان وڌيڪ آهي ان جو مطلب آهي ته قيمتن وارو مواد، عمرن واري مواد جي پيٽ ۾ وڌيڪ تسلسل وارو آهي. اسين ڏسون ٿا ته جيڪڏهن نسبتي فارمولا استعمال نه ڪجن ته نتيجا مختلف ۽ غلط ٿي سگهن ٿا.

مثال ٽڏي مشروب واري مواد جو تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهو

ٽڏي مشروب جي مقدار (لٽرن ۾)	1.48	1.49	1.50	1.51	1.52
بوتلن جو تعداد	2	7	5	5	1

حل: غير مسلسل جماعتن وارو غير گروهي مواد آهي. هيٺين جدول ۾ حساب ڏيکاريل آهن.

مقدار (x)	بوتلن جو تعداد (f)	xf	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$(x-\bar{x})^2 f$	$\lvert x-\bar{x}\rvert f$
1.48	2	2.96	-0.018	0.0003240	0.018	0.000648	0.036
1.49	7	10.43	-0.008	0.0000640	0.008	0.000448	0.056
1.5	5	7.5	0.002	0.0000040	0.002	0.00002	0.01
1.51	5	7.55	0.012	0.0001440	0.012	0.00072	0.06
1.52	1	1.52	0.022	0.0004840	0.022	0.000484	0.022
ڪُل	20	29.96	--	--	--	0.00232	0.184

KARACHIEDU.COM

$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{29.96}{20} = 1.498$ لٽر $\quad Var = s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})f}{\sum f} = \frac{0.00232}{20} = 0.000116$ (لٽر)^2

M.D. $= \frac{\sum |x-\bar{x}|f}{\sum f} = \frac{0.184}{20} = 0.0092$ لٽر $\quad S.D. = s = \sqrt{0.000116} = 0.01078$ لٽر

ڏني مشروب جي مقدارن ۾ گهٽ وڌائي تمام گهٽ يا نظرانداز ڪرڻ جهڙي آهي

مثال 4: بجلي جي استعمال واري مواد جو سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهو

بجلي جو استعمال (kWh)	68-87	88-107	108-127	128-147	148-167	168-187	188-207
ڏينهن جو تعداد	10	13	15	10	4	6	2

حل: هينئين جدول ۾ حسابن جو خلاصو ڏنل آهي جڏهن ته x جماعتي نشان کي ظاهر ڪري ٿو

جماعتي حدون	جماعتي نشان (x)	f	xf	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$\lvert x-\bar{x}\rvert$	$(x-\bar{x})^2 f$	$\lvert x-\bar{x}\rvert f$
68-87	77.5	10	775	-44.167	1950.724	44.167	19507.24	441.67
88-107	97.5	13	1267.5	-24.167	584.0439	24.167	7592.571	314.171
108-127	117.5	15	1762.5	-4.167	17.36389	4.167	260.4583	62.505
128-147	137.5	10	1375	15.833	250.6839	15.833	2506.839	158.33
148-167	157.5	4	630	35.833	1284.004	35.833	5136.016	143.332
168-187	177.5	6	1065	55.833	3117.324	55.833	18703.94	334.998
188-207	197.5	2	395	75.833	5750.644	75.833	11501.29	151.666
ڪل	--	60	7270	--	--	--	65208.35	1606.672

پهريان اسان کي سراسري ڪڍي ڇڏڪا آهي

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{7270}{60} = 121.667\text{kWh.}$$

هاڻي جوڙ اُپتن جو استعمال ڪندي سراسري انحراف ۽ معياري انحراف آهن

$$\text{M.D.} = \frac{\sum |x-\bar{x}|f}{\sum f} = \frac{1606.672}{60} = 26.778\text{kWh.}$$

$$S.D. = s = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2 f}{\sum f}} \sqrt{\frac{65208.35}{60}} = 32.967\text{kWh.}$$

مثال 5: ڪراچي ۽ مورو مان ڪجهه بنا قاعدي چونديل خاندانن کان انهن جي موبائيلن جو تعداد پڇيو ته ان جا نتيجا هن ريت آهن مواد جون سراسريون 5.177 ۽ 6.133 موبائيل في خاندان ۽ انهن جا ترتيبوار معياري انحراف 1.412 ۽ 3.408 پيٽ ڪري ڏيکاريو ته ڪهڙي شهر ۾ موبائيل في خاندان جي استعمال ۾ تسلسل آهي.

حل: ڪراچي K موروجون موبائيل في خاندان واريون سراسريون مختلف آهن. جيڪي هي آهن

موبائيل في خاندان $x_K = 5.773$ ۽ موبائيل في خاندان $\bar{x}_M = 6.133$ معياري انحراف هينئين ريت آهن

موبائيل في خاندان $s_K = 1.412$ ۽ موبائيل في خاندان $s_M = 3.408$

جيئن ته بنهي شهرن لاءِ سراسريون مختلف آهن تنهنڪري اسين نسبتي ماپا استعمال ڪريون ٿا

نسبتي ۽ $s_K = \frac{s_K}{\bar{x}_K} = \frac{1.412}{5.733} = 0.246$ نسبتي ۽ $s_M = \frac{s_M}{\bar{x}_M} = \frac{3.408}{6.133} = 0.555$

بنهي شهرن جا نسبتي معياري انحراف ڏسندي . اسين اهو نتيجو ڪڍون ٿا ته ڪراچي جي هڪ خاندان جي موبائيلن جي تعداد جي نسبتي گهٽ وڌائي مورو جي هڪ خاندان کان گهٽ آهي انهي ڪري ڪراچي ۾ موبائيل جي استعمال جي سراسري في خاندان مورو کان وڌيڪ ۽ استعمال وڌيڪ تسلسل وارو آهي.

KARACHIEDU.COM

مشق 22.5

1. هڪ ڪلاس ۾ غير حاضر شاگردن جي تعداد جي وسعت، تغير، سراسري انحراف ۽ معياري انحراف لهو. اهي ٻار گذريل ست ڏينهن کان هن ريت غير حاضر هئا. 3, 5, 3, 2, 4, 1, 8.
2. 6 وارين ۾ بن رانديگرن جي اسڪورن جي وسعت، سراسري انحراف، تغير ۽ معياري انحراف لهو ڪهڙو رانديگروڏيڪ تسلسل وارو آهي.

A-رانديگر	12	15	0	185	7	19
B-رانديگر	47	12	76	48	4	51

3. ڇهه ڪٽنبن جي آمدني ۽ خرچ جي وسعت ۽ معياري انحراف استعمال ڪندي انهن جي پکڙجڻ جي پيٽ ڪريو. نتيجن جو مطلب پڻ ڪيو

آمدني (هزارن ۾)	10	20	30	40	50	60
خرچ (هزارن ۾)	7	21	23	34	36	53

4. هڪ فٽبال جي مند ۾ ٽيمن A ۽ B جا اسڪور ڪيل گول هيٺ ڏنل آهن. نسبتي معياري انحراف ۽ سراسري انحرافن کي استعمال ڪريو ته جيئن خبر پوي ته ڪهڙي ٽيم وڌيڪ تسلسل سان ڪارڪردگي ڏيکاري.

اسڪور ڪيل گول	0	1	2	3	4
ٽيم A جي ڪيڏيل راندين جو تعداد	27	9	8	5	4
ٽيم B جي ڪيڏيل راندين جو تعداد	17	9	6	5	3

5. ڏاتو جي 50 ٽڪرن جي مايي جي ورهاست واري جدول هيٺ ڏنل آهي. وسعت، تغير، معياري انحرف انحراف لهو.

ٽڪرن جو مايو (ڪلوگرامن) ۾	7.1-7.3	7.4-7.6	7.7-7.9	8.0-8.2	8.3-8.5	8.6-8.8	8.9-9.1
ٽڪرن جو تعداد	3	5	9	14	11	6	2

جائزي واري مشق 22

1 صحيح جواب تي نشان لڳايو

(i). حسابي سراسري مواد جي _____ مشاهدن تي منحصر ڪندو آهي.
(a). وچين (b). پچاڙي وارن (c). سيني (d). ڪوبہ نہ

(ii). _____ لهڻ لاءِ پهريان غير گروهي مواد کي ترتيب ۾ آڻڻو پوندو آهي.
(a) AM (b). ڪثرتي سراسري (c) مڊيان (d) وسعت

(iii). مسلسل تعددي جدول ۾ جماعتن جو تعداد 5 ۽ _____ جي وچ ۾ هوندي آهي
(a). 10 (b). 15 (c). 20 (d). 25

(iv). _____ جو استعمال ڪندي، گراف وسيلي، گروهي مواد جي ڪثرتي سراسري لهبي آهي
(a). ڪالمي نقشو (b). ڪهڙ پاسو (c). Ogive (d). ٻار چارٽ

(v). جيڪڏهن مواد ۾ بين کان مختلف مشاهدا هجن تہ "_____" گمراهہ ڪن هوندو آهي.
(a) AM (b). وسعت (c) مڊيان (d). ڪثرتي سراسري

(vi). جيڪڏهن جو {0, 90, k, 10, 100} جو A.M. 40 آهي تہ پوءِ k = _____
(a). 0 (b). 90 (c). 10 (d). 100

(vii). مڊيان ۽ چوٿائي ڪنڊ مشاهدا فطري طور _____ آهن.
(a). حسابي (b). مقامي (c). منطقي (d). ڪوبہ نہ

(viii). مٿيون چوٿائي ڪنڊ مشاهدو مواد کي _____ نسبت ۾ ورهائي ٿو.
(a). 50%–50% (b). 25%–25% (c). 75%–25% (d). 40%–60%

(ix). جيڪڏهن مواد ۾ هڪ عدد بڙي جي برابر آهي تہ پوءِ _____ معلوم نہ ڪري سگهبو.
(a). A.M. (b). G.M. (c). H.M. (d). مڊيان

(x). جيڪڏهن مواد ۾ سڀ عدد برابر آهن تہ پوءِ
(a). A.M.=G.M.=H.M. (b). وسعت = 0 (c). S.D. = 0 (d). اهي سيئي

خلاصو

- مقداري مواد مان مراد عدد آهن ۽ ان جا ٻہ قسم آهن هڪ غير مسلسل (رڳو سڃا عدد) ۽ ٻيو مسلسل مواد (حقيقي عدد)
- خاصيتي مواد مان مراد بدلجندڙ جون خاصيتون آهي ۽ ان جا ٻہ قسم آهن هڪ نالياورو (بغير ترتيب جي) ۽ ٻيو قطاري (ترتيب وارو).
- فائديمند معلومات معلوم ڪرڻ لاءِ، مواد جي تعددي ورهاست ۾ گروهہ بندي ڪئي ويندي آهي.
- تعددي ورهاست ۾ جماعتون ۽ ترتيبوار تعددون هوندیون آهن.
- هڪ ٽبڪي سان بيان ڪيل جماعتون غير مسلسل آهن. جڏهن تہ عددن جي هڪ حد سان بيان ڪيل جماعتون، مسلسل جماعتون آهن
- ٽيلي نشان يا رقم لکڻ وارن طريقن سان مشاهدن کي جماعتن ۾ ورهايو ويندو آهي.
- اسٽرج (1926) جو اصول استعمال ڪندي. جماعتن جو تعداد لهي سگهجي ٿو.
- مواد جي سڀ کان وڏي مشاهدي ۽ سڀ کان ننڍي مشاهدي جي فرق کي وسعت چئبو آهي
- هڪ جماعت ۾ جيترا مشاهدا اچي سگهن تا ان تعداد کي جماعتي وقفو يا ويڪر چئبو آهي
- هڪ جماعت جي شروعاتي ۽ آخري ٽبڪن کي جماعتي حدون چئبو آهي.
- ڪن بہ بن لڳاتار جماعتي حدن جي سراسري ڪيڊ سان حقيقي جماعتي حدون حاصل ڪيون آهن.
- ڪن بہ بن ۾ وارين جماعتن جي وچ واري فاصلي کي جماعتن جي وچ واري وٿي چئبو آهي.
- نسبتي ۽ في سيڪڙو تعددون ترتيبوار 0 کان 1 ۽ 0 کان 100 تائين هوندیون آهن.
- هڪ مخصوص جماعت تائين، سڀني تعددن جي جوڙ اُپت کي مجموعي تعدد چئبو آهي.
- ڪالمي نقشو ۾ وارن مستطيلن جو گراف آهي. انهن مستطيلن جا پايا حقيقي جماعتي حدن تي هوندا آهن ۽ انهن جون اوچائيون جماعتي تعددن سان متناسب هوندیون آهن.
- تعددي گھٽ پاسو انهن ٽبڪن کي ليڪ ٽڪرن سان ملائڻ سان نهندو آهي جن جا x محدد جماعتي نشان هوندا آهن ۽ y محدد تعددون هوندیون آهن
- ogive يا مجموعي تعددي گھٽ پاسو انهن ٽبڪن کي ملائڻ سان نهندو آهي. جن جا محدد آهن (مجموعي تعددون، حقيقي جماعتي حدون)
- مرڪزي رجحان جو پيمانو مواد جي اها صلاحيت آهي جنهن سان مواد هڪ ٽبڪي جي چوڌاري ميڙ ڪندو آهي
- G.M.A.M ۽ H.M سيئي مشاهدن جي برابري تي بينل هوندا آهن.
- مڊيان ترتيب ڏنل ڊيٽا سيٽ جو سڀ کان وچيون حصو آهي.
- مڊيان جو بنياد اڪثريت وارو اصول آهي ۽ اهو سڀ کان وڌيڪ ايندر مشاهدو آهي.
- H.M. ≥ G. M. ≥ A.M. جيڪڏهن مڊيان = AM تہ پوءِ مواد همشڪلي ٽيندو بي صورت ۾ مواد غير همشڪلي ٽيندو.
- ڪالمي نقشو استعمال ڪندي، گراف وسيلي ڪثرتي سراسري جو هڏ ڳولي سگهجي ٿو ۽ ان جو اندازو پڻ لڳائي سگهجي ٿو
- give O جو استعمال ڪندي، گراف وسيلي مڊيان ۽ چوٽائي ڪندڙ مشاهدن جا هڏ ڳولي سگهجن تا ۽ انهن جو اندازو پڻ لڳائي سگهجي ٿو.
- پکڙجڻ جي پيماني مان مراد مواد ۾ پکيڙ يا تبديلي جي مقدار هوندي آهي.
- جيڪڏهن مواد ۾ پکڙجڻ وڌيڪ آهي تہ پوءِ مواد ۾ استحڪام يا تسلسل گھٽ هوندو.
- بن پچاڙي وارن مشاهدن جي فرق وسيلي وسعت مواد ۾ پکڙجڻ جي ماپ ڪندي آهي.
- غير گروهي مواد ۾ سراسري جي چوڌاري سڀني انحرافن جي جوڙ اُپت ڀڙي ٽيندو.
- AM جي چوڌاري مواد جي چورس ٽيل انحرافن جي AM کي تغير چئبو آهي. A.M جي چوڌاري مواد جي قطعي انحرافن جي AM کي سراسري يا قطعي انحراف چئبو آهي.

فيثا غورث سڌيان
PYTHAGORAS THEOREM



شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- هيٺين سڌيانن‌کي انهن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجهن ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪن
  - ❖ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هٿپاٽينيوز جي ڏيگهه جو چورس ٻين پاسن جي ڏيگهن جي چورسن جي جوڙ اُپٽ جي برابر ٿيندو. (فيثاغورث سڌيان)
  - ❖ جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جو چورس ٻن ٻين پاسن جي چورسن جي جوڙ اُپٽ جي برابر هجي تہ اهڙو ٽڪنڊو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو ٿيندو. (فيثا غورث سڌيان جو عڪس)

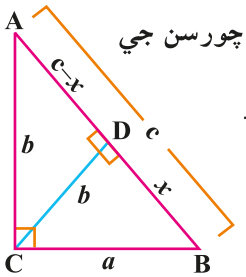
تعارف:

فيثا غورث (Pythagoras) هڪ يوناني فلسفي ۽ رياضي دان اٽڪل 570 قبل مسيح ۾ پيدا ٿيو. هن گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي پاسن جي وچ ۾ هڪ ڏاڍو اهم تعلق دريافت ڪيو. فيثاغورثي سڌيان يا فيثا غورث سڌيان اقليدسي جاميٽري جو هڪ بنيادي تعلق آهي جيڪو گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي ٽن پاسن جي وچ ۾ آهي. هن ان تعلق کي سڌيان جي شڪل ڏني ۽ اهو سڌيان هن جي نالي تي فيثاغورث سڌيان ڪوٺبو آهي. اهو سڌيان مختلف طريقن سان ثابت ٿي سگهي ٿو. هتي اسين ان کي هم شڪل ٽڪنڊن جي تصور کي استعمال ڪندي ثابت ڪنداسين. اسين ان سڌيان جي عڪس کي به بيان ۽ ثابت ڪنداسين ۽ ان کانپوءِ انهن کي عام زندگي جي مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ استعمال ڪنداسين.

23.1.1 فيثا غورث سڌيان (Pythagoras Theorem):

23.1 سڌيان

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هئپاٽينيوز جي ڊيگهه جو چورس بين پاسن جي ڊيگهن جي چورسن جي جوڙ اُپٽ جي برابر ٿيندو.



مليل: ΔABC هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي جنهن ۾ گوني ڪنڊ ٽپڪي C تي آهي.
پاسن $\overline{AC}, \overline{AB}$ ۽ $\overline{BC}$ جي ڊيگهه ترتيبوار c, b ۽ a آهي.

گهربل: $c^2 = a^2 + b^2$

جوڙجڪ: چوٽي C کان پاسي $\overline{AB}$ تي هڪ عمود ڪيو. فرض ڪريو ته $m\overline{BD} = x$

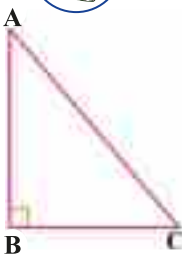
ثابتي:

بيان	دليل
$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta CBD$ ۾	
$\angle ACB \cong \angle CDB$	$\angle CDB$ گوني ڪنڊ آهي (جوڙجڪ)
$\angle B \cong \angle B$	مشترڪ ڪنڊون
$\angle BAC \cong \angle BCD$ ۽	$\angle B$ جا پورائو ڪنڊڙ (ڪامپليمينٽ)
$\therefore \Delta ACB \sim \Delta CBD$	هم شڪل ٽڪنڊن جي وصف مطابق
اهڙي طرح $\frac{c}{a} = \frac{a}{x}$	هم شڪل ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا
$cx = a^2$ ...(i)	
بيهر $\Delta ACB \leftrightarrow \Delta ADC$ ۾	
$\angle ACB \cong \angle ADC$	$\angle ADC$ گوني ڪنڊ آهي (جوڙجڪ)
$\angle A \cong \angle A$	مشترڪ ڪنڊون
$\angle CBA \cong \angle DCA$ ۽	$\angle A$ جا پورائو ڪنڊڙ
$\therefore \Delta ACB \sim \Delta ADC$	هم شڪل ٽڪنڊن جي وصف مطابق
اهڙي طرح $\frac{c}{b} = \frac{b}{c-x}$	هم شڪل ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا
$\Rightarrow c(c-x) = b^2$	
يا $c^2 - cx = b^2$ ...(ii)	
$cx + c^2 - cx = a^2 + b^2$	مساوات (i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪرڻ سان
$c^2 = a^2 + b^2$	

Q.E.D

KHADU.COM

شامل نتيجو: گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ABC ۾، جنهن جي گوني ڪنڊ B تي آهي.



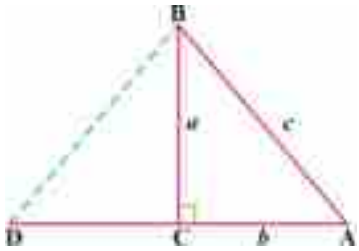
$$\left(m\overline{BC}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 - \left(m\overline{AB}\right)^2 \qquad \text{i.}$$

$$\left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{AC}\right)^2 - \left(m\overline{BC}\right)^2 \qquad \text{ii.}$$

سڌيان 23.2

(فيثا غورث سڌيان جو عڪس)

جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جو چورس ٻن ٻين پاسن جي چورسن جي جوڙ اُپٽ جي برابر هجي تہ اهڙو ٽڪنڊو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو ٿيندو.



ڏنل: ΔABC ۾، $m\overline{BC} = a$ ، $m\overline{AC} = b$ ۽ $m\overline{AB} = c$

اهڙي طرح جو $a^2 + b^2 = c^2$

گهربل: ΔABC هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي.

جوڙجڪ: $\overline{BC}$ تي هڪ عمود $\overline{CD}$ ناهيو اهڙي طرح جو $\overline{CD} \cong \overline{CA}$ ٿيڪن B ۽ D کي ملايو

ثابتي:

بيان	دليل
ΔDCB هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي	جوڙجڪ
$\therefore \left(m\overline{BD}\right)^2 = a^2 + \left(m\overline{DC}\right)^2$	فيثاغورث سڌيان
$\Rightarrow \left(m\overline{BD}\right)^2 = a^2 + b^2$	
پر $a^2 + b^2 = c^2$	مليل
$\therefore \left(m\overline{BD}\right)^2 = c^2$	يڪسانيت جي متعدي خاصيت
$\therefore m\overline{BD} = c$	ٻنهي پاسن جو ٻيو مول ڪيڻ سان
هاڻي	
$\Delta DCB \leftrightarrow \Delta ACB$	
$\overline{CD} \cong \overline{CA}$	جوڙجڪ
$\overline{BC} \cong \overline{BC}$	مشترڪ پاسو
$\overline{BD} \cong \overline{AB}$	هر هڪ پاسو c جي برابر آهي. (مٿي ثابت ٿيل آهي)
$\therefore \Delta DCB \cong \Delta ACB$	پ. پ. پ. ≅ پ. پ. پ
$m\angle DCB = m\angle ACB$	يڪسان ڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا
پر $m\angle DCB = 90°$	جوڙجڪ
$\therefore m\angle ACB = 90°$	يڪسانيت جي متعدي خاصيت
اهڙي طرح، ABC هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي	$\therefore m\angle ACB = 90°$

Q.E.D

DU.COM

شامل نتيجو:

فرض ڪريو تہ a ، b ۽ c ڪنهن ٽڪنڊي جا پاسا آهن اهڙي طرح جو پاسو c سڀ کان ڊگهو آهي.
تہ پوءِ

i. جيڪڏهن $a^2+b^2=c^2$ تہ پوءِ ٽڪنڊو، گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي.

ii. جيڪڏهن $a^2+b^2>c^2$ تہ پوءِ ٽڪنڊو، سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊو آهي

iii. جيڪڏهن $a^2+b^2<c^2$ تہ پوءِ ٽڪنڊو، ويڪري ڪنڊ ٽڪنڊو آهي

مثال 1:

هڪ ٽڪنڊي جي پاسن جون ماپون مليل آهن. انهن مان ڪهڙا گوني ڪنڊ ٽڪنڊن کي ظاهر ڪن ٿا.

i. $a=5\text{cm}$ ، $b=12\text{cm}$ ۽ $c=13\text{cm}$

ii. $a=6\text{cm}$ ، $b=7\text{cm}$ ۽ $c=8\text{cm}$

iii. $a=9\text{cm}$ ، $b=12\text{cm}$ ۽ $c=15\text{cm}$

حل:

i. جيئن تہ $(13)^2=(5)^2+(12)^2$

يا $169=25+144$

$169=169$

فيثا غورث سڌيان جي عڪس مطابق، a ، b ۽ c گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا پاسا آهن.

ii. جيئن تہ $(8)^2\neq(6)^2+(7)^2$

يعني تہ $64\neq36+49$

يا $64\neq85$

فيثا غورث سڌيان جي عڪس مطابق، a ، b ۽ c گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا پاسا نہ آهن.

iii. جيئن تہ $(15)^2=(12)^2+(9)^2$

$225=144+81$

$225=225$

فيثا غورث سڌيان جي عڪس مطابق، a ، b ۽ c گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا پاسا آهن.

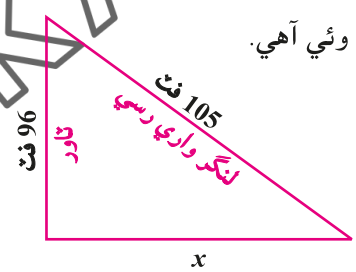
مثال 2:

هڪ ٽاور لاءِ لنگر واري رسي لڳائڻ جي ضرورت آهي. ٽاور جي اُوچائي 96 فٽ آهي
لنگر واري رسي 105 فٽ ڊگهي آهي معلوم ڪريو تہ اها ٽاور کان ڪيترو پري لڳائڻي پوندي.

حل:

فرض ڪريو تہ لنگر واري رسي ٽاور کان x فٽ جي فاصلي تي لڳائي وئي آهي.

فيثا غورث سڌيان جي مطابق



$$(105)^2=(96)^2+(x)^2$$

$$\Rightarrow \quad 11025=9216+x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2=1809$$

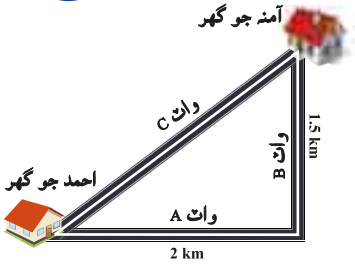
$$\Rightarrow \quad x=\sqrt{1809}=42.53 \text{ فٹ}$$

اهڙي طرح گهربل فاصلو لڳ ڀڳ 42.53 فٽ آهي.

KARACHIEDU.COM

مثال 3:

آمنہ جي گھر کان احمد جي گھر وڃڻ لاءِ ٻہ رستا آھن. ھڪ رستو واٽ C وارو آھي ۽ ٻيئي رستي لاءِ 2 km واري واٽ A کان ٿيندي 1.5 km واري واٽ B کٽبي. معلوم ڪريو تہ سڌي واٽ C وارو رستو ڪيترو ننڍو آھي. A ۽ B جي وچ واري ڪنڊ 90^{o} آھي جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آھي.



حل: فرض ڪريو تہ واٽ C جي ڊيگھ x آھي

فيثاغورث سڌيان جي مطابق

$$x^2 = (2)^2 + (1.5)^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{(2)^2 + (1.5)^2} = \sqrt{6.25} = 2.5\text{km}$$

ٻيو رستو استعمال ڪندي، ھن کي ھي فاصلو طي ڪرڻو پوندو: $3.5\text{km} = 2 + 1.5$

انھن ٻنھي رستن جي وچ ۾ فرق $= 3.5 - 2.5 = 1\text{km}$

مشق 23

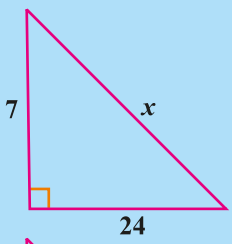
1. ٽڪنڊي جي پاسن جون ماپون ھيٺ ڏنل آھن تصديق ڪريو تہ ٽڪنڊو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آھي.

   i. $a = 16, b = 30, c = 34$ ii. $a = 6,\ b = 8,\ c = 10$

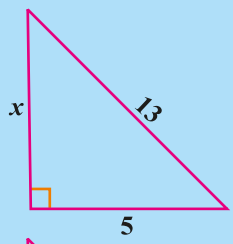
   iii. $a = 15, b = 20, c = 25$ iv. $a = 13, b = \sqrt{56}, c = 15$

2. ھيٺين شڪلين ۾ نامعلوم رقمون لھو.

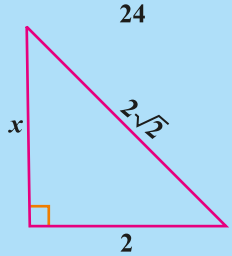
   i.

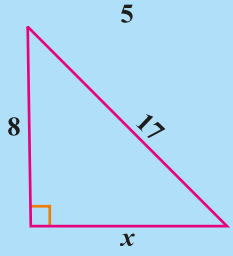
   ii.

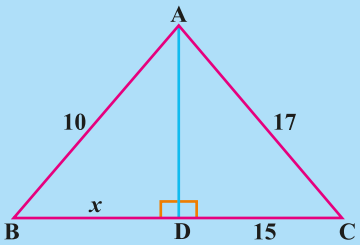
   iii.

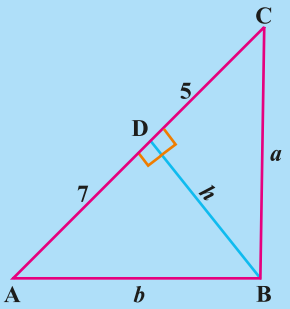
   iv.

3. ھڪ ٽڪنڊي جي ٽن پاسن جون ماپون 9.5cm ، 7.5cm ۽ $x$cm آھن. x جي ڪھڙي قيمت تي اھي پاسا گوني ڪنڊ ٽڪنڊي کي ظاھر ڪندا.
4. ABC ھڪ ٻيپور پاسو ٽڪنڊو آھي جنھن ۾ $m\overline{AB} = m\overline{AC} = 12\text{cm}$ ۽ $m\overline{BC} = 10\text{cm}$. A کان $\overline{BC}$ تائين عمودي فاصلو لھو.
5. ھڪ ڏاڪڻ جو ھيٺيون حصو (پايو) ڀت کان 6 فٽن جي فاصلي تي آھي جيڪڏھن ڏاڪڻ جو مٿاھون حصو (چوٽي) ڀت تي 8 فٽن جي اُوچائي تي رکيل آھي تہ پوءِ ڏاڪڻ جي ڊيگھ لھو.



6. پاسي واري شڪل ۾ x جو ملهه لهو.



7. ΔABC ۾ $\angle ADB$ هڪ گوني ڪنڊ آهي جيئن پر واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. h،a ۽ b جي ڊيگهه لهو جيڪڏهن ايڪا $m\overline{CD}=5$ ۽ ايڪا $m\overline{AD}=7$.

8. هڪ مستطيلي تيراڪي لاءِ تلاءُ جا پاسا 50m ۽ 30m ڊگها آهن ۽ سامهون وارن ڪنڊن چوٽين جي وچ واري ڊيگهه چا آهي.

9. ٽپور پاسي، ٽڪنڊي جي هر هڪ پاسي جي ڊيگهه 8 ايڪا آهي. ڪنهن به هڪ عمود جي ڊيگهه لهو.

10. هڪ ٽڪنڊي جي پاسن جي ڊيگهه x، $x+4$ ۽ 20 آهي جيڪڏهن سي کان ڏگهي پاسي جي ڊيگهه 20 آهي x جون ڪهڙيون قيمتون گوني ڪنڊ ٽڪنڊو ناهيندیون.

11. هڪ منتظر 18m سڌو اوپر ڏانهن وڃي ٿو ۽ ان کانپوءِ 24m سڌو اُتر ڏانهن وڃي ٿو. شروعاتي ٽپڪي کان هن جي هاڻوڪي هنڌ تائين فاصلو لهو.

12. هڪ مستطيل ABCD ۾ $m\overline{BC}+m\overline{CD}=17cm$ ۽ $m\overline{BD}+m\overline{AC}=26cm$. مستطيل جي ڊيگهه ۽ ويڪر معلوم ڪريو.

جائزي واري مشق 23

1. دُرست جواب چونڊيو.

i. مستطيل جي اُريب جي ماپ 6.5cm آهي جيڪڏهن ان جي ويڪر 2.5cm آهي تہ پوءِ ان جي ڊيگهه _____ آهي.

(a) 9cm (b) 4cm
(c) 6cm (d) 3cm

ii. هيٺين مان ڪهڙا گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا پاسا آهن

(a) 3, 4, 5 (b) 2, 3, 4
(c) 5, 6, 7 (d) 4, 5, 6

iii. هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي وڏي ۾ وڏي ڪنڊ _____ آهي:

In
(a) 100^o (b) 90^o
(c) 80^o (d) 110^o

iv. گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾، هئپاٽينيوز _____ جي سامهون وارو پاسو آهي.

(a) سوڙهي ڪنڊ (b) گوني ڪنڊ

(c) ويڪري ڪنڊ (d) ڪوبہ نہ

v. جيڪڏهن ڪنهن گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا پاسا a، b، c آهن ۽ سي کان وڏو پاسو c آهي تہ پوءِ

(a) $c^2 = a^2 + b^2$ (b) $b^2 = c^2 + a^2$

(c) $a^2 = b^2 + c^2$ (d) $c^2 = a^2 - b^2$

vi. جيڪڏهن گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جون ڊيگهون 5cm ۽ 12cm آهن تہ پوءِ هئپاٽينيوز _____ آهي:

(a) 16 (b) 15

(c) 14 (d) 13

vii. جيڪڏهن ٻيءِ پاسي گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جو هئپاٽينيوز $3\sqrt{2}$cm آهي تہ پوءِ هر هڪ پاسي جي ڊيگهہ _____ آهي.

(a) 2cm (b) 5cm

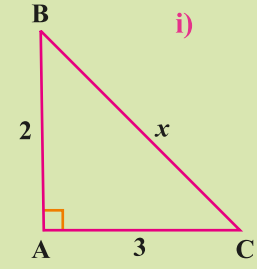
(c) 3cm (d) 1cm

2. فيثاغورث سڌيان جي وضاحت ڪريو.

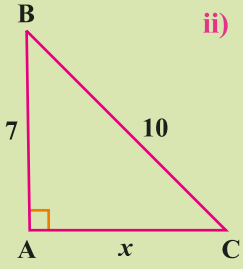
3. هڪ 25m ڊگهي ڏاڪڻ، اُپي پت تي رکيل آهي. ڏاڪڻ جو پايو. پت کان 7m جي فاصلي تي آهي. معلوم ڪريو تہ ڏاڪڻ پت تي ڪيتري اُوچائي تي رکيل آهي.

4. هيٺين مان هر هڪ شڪل ۾ نامعلوم رقمن کي معلوم ڪريو.

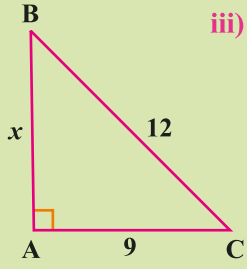
i)



ii)



iii)



خلاصو

- گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾، هئپاٽينيوز جي ڊيگهہ جو چورس ٻين پاسن جي ڊيگهن جي چورسن جي جوڙ اُپت جي برابر آهي.
- جيڪڏهن ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جو چورس ٻين پاسن جي چورسن جي جوڙ اُپت جي برابر آهي تہ پوءِ ٽڪنڊو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو ٿيندو.

نسبت ۽ تناسب
RATIO AND PROPORTION



شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- هيٺيان سڏيان انهن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجهن ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪن.
  - ٽڪندي جي هڪ پاسي جي پوروچوٽ، ليڪ جيڪا ٻين ٻن پاسن کي ڪپي ٿي، اها ٻنهي پاسن کي تناسب ۾ ورهائي ٿي.
  - جيڪڏهن ڪا ليڪ ڪنهن ٽڪندي جي ٻن پاسن کي متناسب ٽڪرن ۾ ورهائي ٿي ته پوءِ اها ٽڪندي جي ٽين پاسي جي پوروچوٽ ٽيندي.
  - ٽڪندي جي ڪنهن ڪنڊ جو اندريون اڌ ڪنڊڙ سامهون واري پاسي کي، ڪنڊ جي پاسن جي ڊيگهه جي نسبت ۾ ورهائي ٿو.
  - جيڪڏهن ٻه ٽڪندا هم شڪل آهن، ته مطابقت رکندڙ پاسن جون ڊيگهون متناسب هوندیون.

24.1 نسبت ۽ تناسب (Ratio and proportion):

هن باب ۾، اسين ٽڪنڊن جي هم شڪلي سان گڏوگڏ ٽڪندي جي پاسن جي نسبت ۽ تناسب سان واسطو رکندڙ سڌيان پڙهنداسين انهي کري سي کان اڳ ۾ اسان کي نسبت، تناسب ۽ هم شڪلي جي تصورن جو دؤر کرٽو آهي.

نسبت (Ratio):

ساڳي قسم ۽ ساڳي ايڪن وارين، مقدارن جي پيٽ کي نسبت چئبو آهي a ۽ b جي نسبت کي $a:b$ يا $\frac{a}{b}$ سان ظاهر کبو آهي جڏهن ته a کي مُنڌ (Antecedent) ۽ b کي پُڇڙ (Consequent) چئبو آهي.

مثال طور:

25 لٽر ۽ 5 لٽر جي نسبت 25:5 يا 5:1 آهي.

تناسب (Proportion):

بن نسبتن جي برابري کي تناسب چئبو آهي

جيڪڏهن به نسبتون $a:b$ ۽ $c:d$ برابر آهن. تہ پوءِ اسين هن ريت لکنداسين: $a:b=c:d$ يا $a:b::c:d$

۽ ان کي تناسب چوندا آهيون

تناسب $a:b=c:d$ ۾ a ۽ d کي باهريان رکن (Extremes) جڏهن تہ b ۽ c کي اندريان رُکن (Means) چئبو آهي.

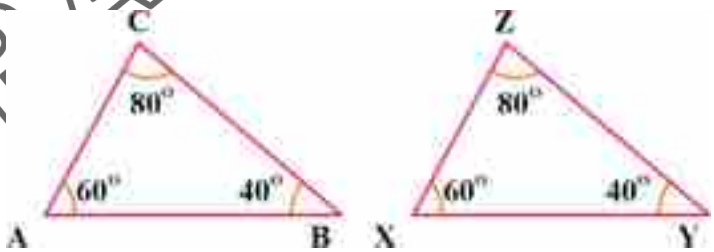
تناسب ۾، وچين رکنن جي ضرب اُپٽ باهرين رکنن جي ضرب اُپٽ جي برابر هوندي آهي.

هم شڪل ٽڪنڊا (Similar Triangles):

ٻہ ٽڪنڊا ABC ۽ PQR هم شڪل ٽڪنڊا کوٽبا جيڪڏهن انهن جون مطابقت رکندڙ ڪنڊون يڪسان هجن.

نشانين ۾ اسين هن ريت لکنداسين $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ڏنل شڪل ۾ $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$



هم شڪل ٽڪنڊن لاءِ هيٺيون سڌيان ڏاڍو اهم آهي.

" جيڪڏهن ٻہ ٽڪنڊا هم شڪل آهن تہ پوءِ انهن جا مطابقت رکندڙ پاسا متناسب هوندا"

اسين اهو سڌيان آخر ۾ ثابت کنداسين

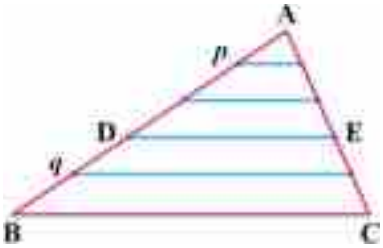
KAPACHIEDU.COM

سڌيان 24.1

ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي پوروچوٽ، ليڪ جيڪا ٻين ٻن پاسن کي ڪپي ٿي، اها ٻنهي پاسن کي تناسب ۾ ورهائي ٿي.

مليل: ΔABC ۾ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ۽ $\overline{DE}$ ٻين پاسن $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ کي ترتيبوار ٽپڪن D ۽ E تي ڪپي ٿي.

گهربل: $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$



جوڙجڪ: ڏيگهه جو ايڪو اهڙي طرح ڪنيو وڃي جو $p = m\overline{AD}$ ايڪا ۽ $q = m\overline{BD}$ ايڪا جڏهن ته p ۽ q قدرتي عدد آهن. $\overline{AD}$ کي p يڪسان ليڪ ٽڪرن ۾ ورهايو ۽ $\overline{BD}$ کي q يڪسان ليڪ ٽڪرن ۾ ورهايو.

انهي ڪري $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{p}{q}$ ورهاست وارن ٽپڪن مان $\overline{BC}$ جي پور وچوٽ ليڪون ڪڍيون وڃن.

ثابتي:

بيان	دليل
پوروچوٽ ليڪن سان $\overline{AD}$ کي p يڪسان ٽڪرن ۾ ورهايو ويو آهي	جوڙجڪ
$\overline{AE}$ پٽ ساڳي پور وچوٽ ليڪن سان p يڪسان ٽڪرن ۾ ورهايو ويو آهي	پورو چوٽ ليڪون ڪپيندڙ ليڪ تي برابر تعداد ۾ يڪسان ٽڪر ٺاهين ٿيون
ساڳي ريت $\overline{EC}$ پٽ q يڪسان ٽڪرن ۾ ورهايو ويو آهي	جيئن ته $\overline{BD}$ پورچوٽ ليڪن سان q يڪسان ٽڪرن ۾ ورهايو ويو آهي.
هاڻي $\frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}} = \frac{p}{q}$	جيئن ته $\overline{AE}$ ۽ $\overline{EC}$ ترتيبوار p ۽ q يڪسان ٽڪرن ۾ ورهايل آهن (مٿي ثابت ٿيل آهي)
پر $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{p}{q}$	جوڙجڪ
انهي ڪري $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$	مساوات جي متعدي خاصيت

Q.E.D

شامل نتيجو 1:

مٿين سڌيان جي شڪل مان اهو ثابت ڪري سگهجي ٿو ته $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{EC}}$

شامل نتيجو 2:

مٿي سڌيان جي شڪل مان اهو ثابت ڪري سگهجي ٿو تہ $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}}$.

شامل نتيجو 3:

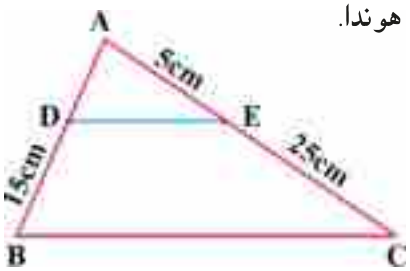
جيڪڏهن هڪ ليک ٻپور پاسي ٽڪنڊي جي پاڻي جي پورو چوٽ آهي ۽ ٻين ٻن يڪسان پاسن کي ڪپي ٿي تہ پوءِ انهن ٻنهي پاسن تي مطابقت رکندڙ ٽڪر يڪسان هوندا.

مثال:

پر واري شڪل ΔABC ۾ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$m\overline{AD}$ لهو جيڪڏهن $m\overline{AE} = 5cm$ ، $m\overline{BD} = 15cm$

۽ $m\overline{CE} = 25cm$



حل:

$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$\therefore \frac{m\overline{AD}}{m\overline{BD}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$

يعني تہ $\frac{m\overline{AD}}{15} = \frac{5}{25}$

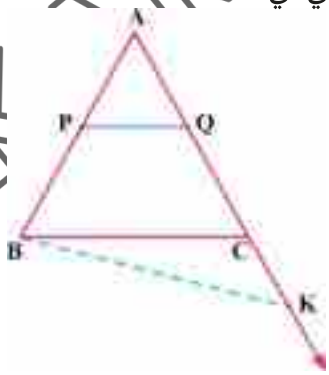
$\Rightarrow m\overline{AD} = \frac{15 \times 5}{25}$

$\Rightarrow m\overline{AD} = 3cm$

سڌيان 24.2

جيڪڏهن ڪا ليک ڪنهن ٽڪنڊي جي ٻن پاسن کي متناسب ٽڪرن ۾ ورهائي ٿي تہ پوءِ اها ٽڪنڊي جي ٽيئن پاسي جي پوروچوٽ ٿيندي.

مليل: ΔABC ۾ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{AC}$ کي $\overline{PQ}$ ترتيبوار ٽپڪن P ۽ Q تي ڪپي ٿي.



اهڙي طرح جو $\frac{m\overline{AP}}{m\overline{PB}} = \frac{m\overline{AQ}}{m\overline{QC}}$

گهربل: $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$

جوڙجڪ: جيڪڏهن $\overline{PQ}$ پورو چوٽ نہ آهي $\overline{BC}$ جي تہ $\overline{BK}$ کڏيو جيڪو $\overrightarrow{AC}$ سان ٽپڪي K تي ملي جيڪو C کان مختلف آهي.

اهڙي طرح جو $\overline{PQ} \parallel \overline{BK}$

K-RACHIEDU.COM

ثابتي:

بيان	دليل
ΔABK ۾ $\overline{PQ} \parallel \overline{BK}$	جوڙجڪ
$\frac{m\overline{AP}}{m\overline{PB}} = \frac{m\overline{AQ}}{m\overline{QK}}$	ٽڪندي جي هڪ پاسي جي پوروچوٽ ليڪ ٻين پاسن کي تناسب ۾ ورهائي ٿي
پر	
$\frac{m\overline{AP}}{m\overline{PB}} = \frac{m\overline{AQ}}{m\overline{QC}}$	مليل
انهي ڪري	
$\frac{m\overline{AQ}}{m\overline{QK}} = \frac{m\overline{AQ}}{m\overline{QC}}$	مساوات جي متعدي خاصيت
$\Rightarrow \quad m\overline{QK} = m\overline{QC}$	برابر نسبتن ۾ جيڪڏهن مُنڊ برابر آهن تہ پوءِ پڇاڙ بہ برابر هوندا.
يعني $\overline{QK} \cong \overline{QC}$	يڪسان ٽڪرن جي وصف مطابق
هي تڏهن ممڪن آهي جڏهن ٽبڪا K ۽ C ٺهڪي ايندا	Q ٻنهي ۾ مشترڪ ٽبڪو آهي.
انهي ڪري $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$	اسان جو مفروضو غلط آهي

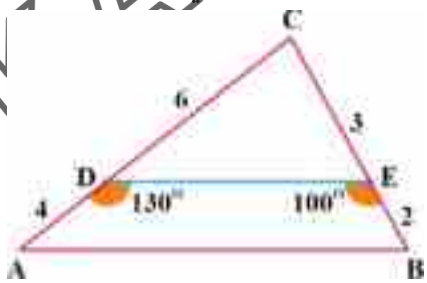
Q.E.D

شامل نتيجو:

ڪنهن ٽڪندي جي ٻن پاسن جي وچين ٽبڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر ٽئين پاسي جي پوروچوٽ ٽيندو.

مثال: پر واري شڪل ۾، ΔABC جي ٻن پاسن $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BC}$ کي $\overline{DE}$ ترتيبوار ٻن ٽبڪن D ۽ E تي ڪپي ٿو. پايي واريون ڪندون A ۽ B لهو جيڪڏهن $m\angle ADE = 130°$ ۽ $m\angle BED = 100°$ جڏهن تہ پاسن جون ڏيگهون مليل آهن جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

حل:



جيئن تہ $\angle ADE$ ۽ $\angle CDE$ سپليمينٽري آهن.

تنهنڪري $m\angle CDE = 50°$ $(\because m\angle ADE = 130°)$

ساڳي ريت

$m\angle DEC = 80°$

$\because \quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ يعني تہ $\overline{DE}$ ٻن پاسن $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BC}$ کي تناسب ۾ ڪپي ٿو

$\therefore \quad \overline{DE} \parallel \overline{AB}$

KARACHI

انهي ڪري $m\angle A = m\angle CDE$ چاڪاڻ ته پوروچوٽ ليڪن جون مطابقت رکندڙ ڪندون برابر هونديون آهن يعني ته

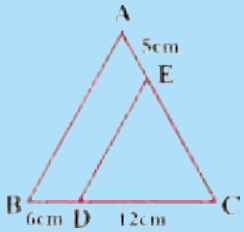
$$m\angle A = 50°$$

ساڳي ريت

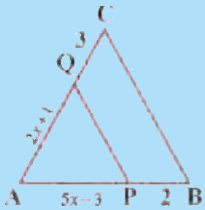
$$m\angle B = m\angle DEC = 80°$$

مشق 24.1

1. ΔABC ۾ $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ، $m\overline{DC} = 12cm$ ، $m\overline{BD} = 6cm$ ۽ $m\overline{AE} = 5cm$ لهو جيڪڏهن $m\overline{CE}$



2. ΔABC ۾ $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ، x جوملهه لهو جيڪڏهن $m\overline{AP} = 5x-3$ ، $m\overline{PB} = 2$ ، $m\overline{AQ} = 2x+1$ ۽ $m\overline{QC} = 3$



3. ثابت ڪريو ته ٽرئپيزيم جي پوروچوٽ پاسن جي پوروچوٽ ڪيل ليڪ غير پوروچوٽ پاسن کي تناسب ۾ ڪپي ٿي.
4. ثابت ڪريو ته هڪ ٽڪنڊي جي ڪنهن پاسي جي وچين ٽپڪي مان ڪيل ليڪ جيڪا ٻيئي پاسي جي پوروچوٽ هجي ته اها ٽيئن پاسي کي اڌ ڪندي.
5. ثابت ڪريو ته ٽرئپيزيم جي ٻن غير پوروچوٽ پاسن کي تناسب ۾ ڪپيندڙ ليڪ ٽيئن پاسي جي پورو چوٽ هوندي.

سڌيان 24.3

ٽڪنڊي جي ڪنهن ڪنڊ جو اندريون اڌ ڪندڙ سامهون واري پاسي کي، ڪنڊ جي پاسن جي ڊيگهه جي نسبت ۾ ورهائي ٿو.

مليل:

ΔABC جي $\angle ABC$ جو اڌ ڪندڙ $\overline{BD}$ آهي.

يعني ته

$$\angle 1 \cong \angle 2$$

گهربل:

$$\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DC}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}}$$

جوڙجڪ:

$\overline{BD}$ جي پوروچوٽ ليڪ $\overrightarrow{CE}$ ڪيو جيڪا $\overrightarrow{AB}$ سان ٽپڪي E تي ملي ٿي.

KARACHI

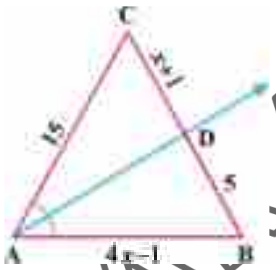
ثابتي:

بيان		دليل
$\overline{EC} \parallel \overline{BD}$	$\because$	جوڙجڪ
$m\angle E = m\angle 1 \ldots (i)$	$\therefore$	پوروچوٽ ليڪن جون نسبتي ڪنڊون
$m\angle 2 = m\angle 3$		پوروچوٽ ليڪن جون متبادل ڪنڊون مليل
$m\angle 1 = m\angle 2$	پر	
$m\angle 1 = m\angle 3$	تنهنڪري	مساوات جي متعدي خاصيت
$m\angle E = m\angle 3$		مساوات (i) جو استعمال ڪندي
ΔBCE ۾		ٽڪندي جي يڪسان ڪنڊن جا سامهون وارا پاسا يڪسان هوندا آهن.
$\overline{BC} \cong \overline{BE}$		
ΔACE ۾		
$\overline{BD} \parallel \overline{EC}$	$\because$	جوڙجڪ
$\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DC}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BE}}$	$\therefore$	ٽڪندي جي هڪ پاسي جي پوروچوٽ ليڪ بين پاسن کي نسبت ۾ ورهائي ٿي.
يا		
$\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DC}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}}$		$\overline{BC} \cong \overline{BE}$ (مٿي ثابت ٿيو)

Q.E.D

شامل نتيجو: جيڪڏهن ٽڪندي جي ڪنهن ڪنڊ جو اندرين اڌ ڪنڊڙ سامهون واري پاسي کي اڌ ڪري ٿو ته ٽڪندو ٻيهر پاسو ٽڪندو هوندو.

مثال:



پر واري شڪل ۾ ΔABC جي ڪنڊ $\angle A$ جو اڌ ڪنڊڙ $\overrightarrow{AD}$ آهي. x جو ملهه لهو جيڪڏهن $m\overline{AC} = 15$ cm ، $m\overline{AB} = 4x-1$ cm ، ۽ $m\overline{CD} = x+1$ cm $m\overline{BD} = 5$cm ٽڪندي جي قسم پڻ ٻڌايو جڏهن ته $x \in N$

حل:

$\because$ $\angle A$ جو اڌ ڪنڊڙ $\overrightarrow{AD}$ آهي

$$\therefore \quad \frac{m\overline{CD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}}$$

يعني ته

$$\frac{x+1}{5} = \frac{15}{4x-1}$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - x + 4x - 1 = 75$$
$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 3x - 76 = 0$$
$$\Rightarrow \quad 4x^2 + 19x - 16x - 76 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x(4x+19) - 4(4x+19) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (x-4)(4x+19) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x - 4 = 0 \quad \text{يا} \quad 4x + 19 = 0$$

KA...ACHI

$\Rightarrow \quad x = 4$ | $\Rightarrow \quad x = \frac{-19}{4}$

$\because \quad \frac{-19}{4} \notin N$

$\therefore$ اسين $\frac{-19}{4}$ کي نظر انداز ڪنداسين

انهيءَ ڪري $x = 4$

هاڻي $m\overline{AB} = 4x - 1$

$= 4 \times 4 - 1$

$= 15$

$\because \quad m\overline{AB} = m\overline{AC} = 15 \text{ cm}$

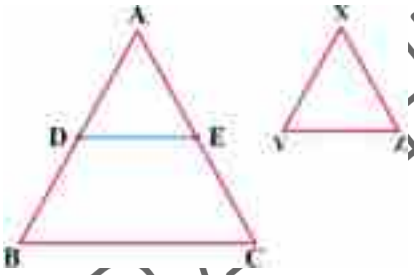
۽ $m\overline{BC} = x + 1 + 5 = 10 \text{ cm}$

$\therefore$ ΔABC پڻ پاسو ٽڪنڊو آهي.

سڌيان 24.4

جيڪڏهن هڪ ٽڪنڊا هم شڪل آهن، تہ مطابقت رکندڙ پاسن جون ڏيگهون متناسب هونديون.

مليل: ΔABC ۽ ΔXYZ هم شڪل ٽڪنڊا آهن.



يعني تہ $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta XYZ$ هڪ

$\angle A \cong \angle X$

$\angle B \cong \angle Y$

۽ $\angle C \cong \angle Z$

گهربل:

$$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{YZ}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{XZ}}$$

جوڙجڪ: $\overline{AB}$ مان، $\overline{AD} \cong \overline{XY}$ ڪيو ۽ $\overline{AC}$ مان $\overline{AE} \cong \overline{XZ}$ ڪيو. $\overline{DE}$ کي ناهيو.

ثابتي:

بيان	دليل
$\Delta ADE \leftrightarrow \Delta XYZ$ هڪ	
$\overline{AD} \cong \overline{XY}$	جوڙجڪ
$\angle A \cong \angle X$	مليل
$\overline{AE} \cong \overline{XZ}$	جوڙجڪ
$\Delta ADE \cong \Delta XYZ$	پ. ڪ. پ مفروضو
$\angle ADE \cong \angle Y$	يڪسان ٽڪنڊن جون مطابقت رکندڙ ڪنڊون
$\angle B \cong \angle Y$	مليل
$\angle ADE \cong \angle B$	متعدي خاصيت
پر تنهنڪري انهي ڪري	

KARACHIEDU.COM

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$	نسبتي ڪندون $\angle ADE$ ۽ $\angle B$ يڪسان آهن.
$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{AD}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AE}}$	سڌيان 1 (شامل نتيجو)
$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{XZ}}$...(i) يا	$m\overline{AD} = m\overline{XY}$ ۽ $m\overline{AE} = m\overline{XZ}$
$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{YZ}}$...(ii) ساڳي ريت	مٿيئن طريقي سان
$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{XY}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{YZ}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{XZ}}$ انهي ڪري	(i) ۽ (ii) مان

Q.E.D

شامل نتيجو:

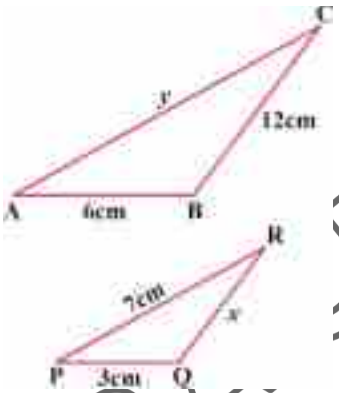
بن ڪندن جي مطابقت ۾ جيڪڏهن هڪ ڪندي جون ٻه ڪندون ٻيئي ڪندي جي ٻن ڪندن سان يڪسان هجن تہ پوءِ انهن جا مطابقت رکندڙ پاسا تناسب ۾ هوندا.

مثال 1:

ڏنل شڪل ۾ ΔABC ۽ ΔPQR هم شڪل آهن.

x ۽ y جا مُلهه لهو جيڪڏهن $m\overline{AB} = 6cm$ ، $m\overline{BC} = 12cm$ ،

$m\overline{PQ} = 3cm$ ۽ $m\overline{PR} = 7cm$



حل:

ΔABC ۽ ΔPQR هم شڪل ٺڪندا آهن.

$\therefore$ انهن جون مطابقت رکندر ڪندون برابر آهن.

يعني تہ $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}}$

(ڏنل ماپن جو استعمال ڪندي) $\Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{12}{x} = \frac{y}{7}$

$\Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{12}{x}$ ۽ $\frac{6}{3} = \frac{y}{7}$

$2 = \frac{12}{x}$ يا $2 = \frac{y}{7}$ يا

$2x = 12$ يا $14 = y$ يا

$\Rightarrow x = 6$ cm يا $y = 14$ cm

انهي ڪري x ۽ y جا ملهه ترتيبوار 6cm ۽ 14cm آهن.

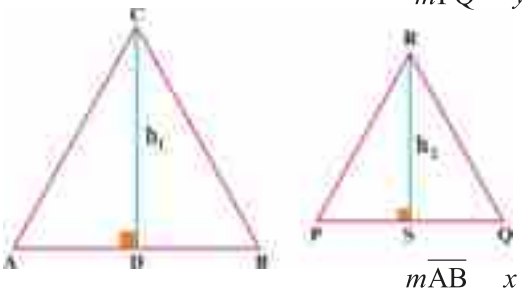
KARACHIEDU.COM

مثال 2:

ڏنل شڪل ۾، ΔABC ۽ ΔPQR هم شڪل آهن ۽ $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{x}{y}$ جڏهن ته h_1 ۽ h_2 ڏنل ٽڪنڊن جون اُوچائيون آهن.

ثابت ڪريو ته:

$$\frac{\Delta ABC \text{ جي ايراضي}}{\Delta PQR \text{ جي ايراضي}} = \frac{x^2}{y^2}$$



ثبوت:

$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{x}{y}$ اسان وٺ آهي

$\because$ ΔABC ۽ ΔPQR هم شڪل آهن

$\therefore$ $\frac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{QR}} = \frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{x}{y}$ ... (i)

$\Delta ADC \leftrightarrow \Delta PSR$ ۾

$m\angle A = m\angle P$ (ڏنل)

$\because$ $m\angle D = m\angle S = 90°$ ۽

$\therefore$ $\Delta ADC \sim \Delta PSR$

انهي ڪري

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{PR}} = \frac{x}{y}$ (مساوات (i) جو استعمال ڪندي)

هاڻي

$$\frac{\Delta ABC \text{ جي ايراضي}}{\Delta PQR \text{ جي ايراضي}} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(m\overline{AB}\right)h_1}{\frac{1}{2}\left(m\overline{PQ}\right)h_2}$$

$$= \frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} \times \frac{h_1}{h_2}$$

$$= \frac{x}{y} \times \frac{x}{y} \qquad \left(\because \frac{h_1}{h_2} = \frac{x}{y} \text{ ۽ } \frac{m\overline{AB}}{m\overline{PQ}} = \frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{x^2}{y^2}$$

انهيءَ ڪري ثابت ٿيو.

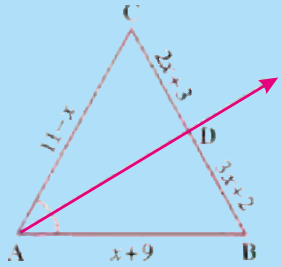
مٿين مثال مان اسين نتيجو ڪڍون ٿا تہ

ٻن هم شڪل ٽڪنڊن جي ايراضين جي نسبت، ڪن بہ ٻن مطابقت رکندڙ پاسن جي نسبت جي چورس جي برابر آهي.

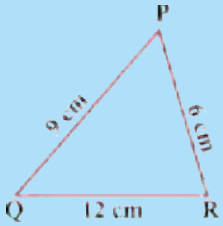
KARACHIEDU.COM

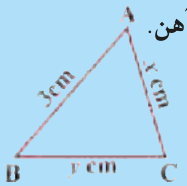
مشق 24.2

1. پاسي واري شڪل ۾، ΔABC جي $\angle A$ جو اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{AD}$ آهي.
x جو ملهه لهو جيڪڏهن $m\overline{AB} = x+9$ ، $m\overline{AC} = 11-x$ ،
$m\overline{CD} = 2x+3$ ۽ $m\overline{BD} = 3x+2$. ٽڪنڊي جي قسم پڻ ٻڌايو.

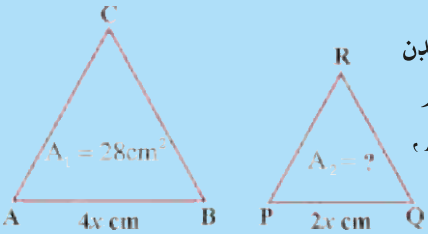


2. پاسي واري شڪل ۾، ΔABC ۽ ΔPQR هم شڪل آهن.
x ۽ y جو ملهه لهو جيڪڏهن پاسن جون ڏيکاريل شڪل ۾ ڏيکاريل آهن.





3. فرض ڪريو ته A_1 ۽ A_2 ترتيبوار ٻن هم شڪل ٽڪنڊن ΔABC ۽ ΔPQR جون ايراضيون آهن جيئن ته شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. معلوم ڪريو A_2 جيڪڏهن $A_1 = 28cm^2$ ،
$m\overline{AB} = 4\,x\,cm$ ۽ $m\overline{PQ} = 2\,x\,cm$.



4. ٻن هم شڪل ٽڪنڊن جي مطابقت رکندڙ پاسن جي نسبت $2:x-5$ ۽ انهن جي ايراضين جي نسبت $1:9$ آهي. x جو ملهه لهو.

5. ثابت ڪريو ته ٻن گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جا پاسا متناسب هوندا جيڪڏهن هڪ ٽڪنڊي جي سوڙهي ڪنڊ ٻئي جي سوڙهي ڪنڊ جي برابر هجي.

6. هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ گوني ڪنڊ ڪان هئپاٽينيوز تي ڪيل عمود ٽڪنڊي کي ٻن ٽڪنڊن ۾ ورهائي ٿو. ثابت ڪريو. ته انهن مان هر هڪ اصل ٽڪنڊي جو هم شڪل آهي.

جائزي واري مشق 24

1. درست جواب تي نشان لڳايو

i. تناسب ۾، وچين رُکن جي ضرب اُپت ٻاهرين رُکن جي _____ جي برابر آهي.
(a) جوڙ اُپت (b) فرق (c) وند اُپت (d) ضرب اُپت

ii. _____ هميشه هم شڪل هوندا آهن.
(a) گوني ڪنڊ ٽڪنڊا (b) اٽپور پاسو ٽڪنڊا (c) سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊا (d) ٽپور پاسو ٽڪنڊا

iii. ٽڪنڊن جي هم شڪلي جي علامت _____ آهي.
(a) $=$ (b) $\cong$ (c) $\sim$ (d) $\leftrightarrow$

iv. جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جي پايي جي پوروچوٽ ليک هڪ پاسي کي 3 : 2 ۾ وڙهائي ٿي ته پوءِ اها ٻيئي پاسي کي _____ ۾ ورهائيندي.

(a) 3:2 (b) 2:3 (c) 2:6 (d) 5:3

v. جيڪڏهن هڪ ليک ٽڪنڊي جي ٻن پاسن کي ساڳي نسبت ۾ ڪپي ٿي ته پوءِ اها ٻيئي پاسي جي _____ هوندي.

(a) پوروچوٽ ليک (b) غير پوروچوٽ ليک (c) نهڪندر ليک (d) ڪوبه نه

vi. ΔABC ۾ $\angle A$ جو اڌ ڪندڙ $\overline{BC}$ کي _____ نسبت ۾ ورهائي ٿو جيڪڏهن $m\overline{AB} = 6cm$ ۽ $m\overline{AC} = 8cm$.

(a) 5:8 (b) 3:4 (c) 1:1 (d) 5:7

vii. ٽپور پاسي ٽڪنڊي جي هڪ ڪنڊ جو اڌ ڪندڙ سامهون واري پاسي کي _____ ۾ ورهائي ٿو.

(a) 2:3 (b) 3:2 (c) 1:1 (d) 5:2

viii. ٻن هم شڪل ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا_____ هوندا آهن.

(a) برابر (b) غير مساوي (c) متناسب (d) ڪوبه نه

ix. جيڪڏهن هم شڪل ٽڪنڊن جي ٻن مطابقت رکندڙ پاسن جي نسبت 5:7 آهي ته پوءِ انهن جي ايراضن جي نسبت_____ جي برابر هوندي.

(a) 5:7 (b) 7:5 (c) 25:7 (d) 25:49

x. جيڪڏهن ٻن هم شڪل ٽڪنڊن جي ايراضين جي نسبت 121 : 36 آهي ته پوءِ انهن جي مطابقت رکندڙ پاسن جي نسبت_____ ٿيندي.

(a) 6:10 (b) 6:11 (c) 11:6 (d) 10:6

xi. جيڪڏهن هم شڪل ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا x : 2 نسبت ۾ آهن ۽ ايراضين جي نسبت 4:9 آهي ته پوءِ x = _____.

(a) 3 (b) –3 (c) b ۽ a ٻئي (d) ڪوبه نه

xii. ٻه ٽپور پاسا ٽڪنڊا _____ پڻ هوندا آهن.

(a) يڪسان ٽڪنڊا (b) هم شڪل ٽڪنڊا (c) متناسب (d) هڪجيترا ٽڪنڊا

خلاصو

- ٻن ساڳي مقدارن جي ويڙهه کي نسبت چئبو آهي.
- نسبت $a:b$ ۾ a کي منڍ چئبو آهي ۽ b کي پُڇڙ چئبو آهي.
- ٻن نسبتن جي برابري کي تناسب چئبو آهي.
- تناسب ۾ وچين رکنن جي ضرب اُپٽ ٻاهرين رکنن جي ضرب اُپٽ جي برابر هوندي آهي.
- ٻه ٽڪنڊا هم شڪل ڪوڻا جيڪڏهن اُهي مساوي ڪنڊن وارا ٽڪنڊا هجن.
- جيڪڏهن ٻه ٽڪنڊا هم شڪل آهن ته پوءِ انهن جا مطابقت رکندڙ پاسا متناسب هوندا.
- ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي پور وڌوٽ ليک جيڪا ٻين ٻن پاسن کي ڪپي ٿي اها ليک انهن ٻنهي پاسن کي تناسب ۾ ڪپيندي.
- جيڪڏهن هڪ ليک ٽڪر ٽڪنڊي جي ٻن پاسن کي ساڳي نسبت ۾ ڪپي ٿو ته پوءِ اهو ٽيئن پاسي جي پوروچوٽ هوندو.
- ٽڪنڊي جي ڪنهن ڪنڊ جو اندريون اڌ ڪندڙ سامهون واري پاسي کي، ڪنڊ جي پاسن جي ڊيگهه جي نسبت ۾ ورهائي ٿو.

گول جا زهه
CHORD OF A CIRCLE



شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- هيٺين سڌيان کي انهن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجهن ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪن
  - ٽن غير هم ليڪ ٽپڪن مان صرف ۽ صرف هڪ گول گذري سگهي ٿو
  - گول جر مرڪز مان نڪرندڙ ليڪ جيڪا زهه (جيڪو قطر نه آهي) کي اڌو اڌ ڪري ٿي. اها زهه تي عمودي هوندي.
  - گول جي مرڪز مان زهه تي عمود ،ان زهه کي اڌو اڌ ڪندو.
  - جيڪڏهن هڪ ئي گول جا ٻه زهه يڪسان آهن ته پوءِ اهي مرڪز کان هڪ ئي فاصلي تي هوندا.
  - گول جا ٻه زهه جيڪي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي آهن ، ته اهي يڪسان آهن.

تعارف (Introduction):

گذريل ڪلاسن ۾ يونٽن ۾، اسان جاميٽري ڪي تفصيل سان پڙهيو آهي جنهن ۾ ٽڪندا ۽ چوڪندا شامل هئا جيڪي سڀ ليڪ ٽڪرن سان ٺهن ٿا. ليڪ ٽڪرن ۾ وکڙ نه هوندا آهن. هتي اسين ثابتي سان گڏ ان سڌيانن ۽ ان سان لاڳاپيل مثالن تي ڌيان ڏينداسين جن جو تعلق گول سان آهي.

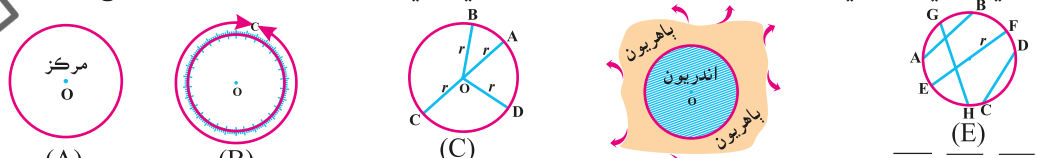
حقيقي دنيا جي شين جي شڪلين ڪي سمجهڻ ۾ گول اهم ڪردار ادا ڪن ٿا. گولن جي بنا، اسين گولائي واري رستي تي گاڏي جي حرڪت، گرهن جي مدارن ۾ شروعاتي واڌارو ، ڪنهن جوهر (Atom) ۾ اليڪٽرانن جي حرڪت ، واڇوڙن جون شڪليون وغيره ڪي سمجهڻ جي قابل نه هونداسين. اڳتي وڌيل(Advanced) شڪلين ڪي پڙهڻ لاءِ گول بنياد ناهن ٿا. اهي شڪليون آهن. بيضوي شڪليون ، گولا ، سلينڊر ، ۽ مخروط جيڪي وٽن جي ٽڪن ، پاڻي جي قطرن ، تارن ، نڙن ، قوڪٽن، گول سنبوسن(پائيز)، ڦيٽن، بال بيئرنگ وغيره ۾ استعمال ٿيندا آهن. حرڪت ڪندڙ ٽبڪو جنهن رستي تي هلي ٿو ان رستي ڪي ڊنگي ليڪ (Curve) چئبو آهي. هڪ ڪليل ڊنگي ليڪ (Open curve) جا شروعاتي ۽ پڇاڙي وارا ٽبڪا مختلف هوندا آهن. هڪ بند ڊنگي ليڪ(Closed curve) جنهن ٽبڪي کان شروع ٿئي ٿي ان تي ختم ٿئي ٿي. يا جنهن جا شروعاتي ۽ پڇاڙيءَ وارا ٽبڪا نه هجن، اها ڊنگي ليڪ جيڪا پنهنجي پاڻ کي نه ڪپي ، ان کي سادي ڊنگي ليڪ(Simple curve) چئبو آهي بي صورت ۾ اها غير سادي ڊنگي ليڪ ڪوٺبي. اها ڊنگي ليڪ جيڪا سادي هئڻ سان گڏوگڏ بند به هجي ته نه ان کي سادي بند ڊنگي ليڪ چئبو آهي. مثال طور شڪل(i) ۾ ڊنگي ليڪن کي ڏسو.



(A) سادي، ڪليل | (B) سادي، بند | (C) غير سادي، ڪليل | (D) غير سادي، بند | (E) سادي، بند

شڪل(i) ، ڪليل ، بند ، سادي ، ۽ غير سادي ڊنگي ليڪون

گول هڪ سادي بند ڊنگي ليڪ آهي ۽ ان جا سڀ ٽبڪا هڪ مقرر ٽبڪي کان ساڳي فاصلي تي آهن. ان مقرر ٽبڪي کي مرڪز چئبو آهي. گول جي حد (Boundary) جي ڊيگهه کي گول جو گهيرو چئبو آهي. هڪ ليڪ ٽڪر جيڪو گول جي مرڪز ۽ گول جي گهيري جي ڪنهن به ٽبڪي کي ملائي ان کي رداسي ٽڪر (Radial segment) چئبو آهي ۽ ان جي ڊيگهه کي گول جو رداس چئبو آهي. اهي ٽبڪا جيڪي گول جي اندر هجن اهي گول جو اندريون (Interior of circle) ناهين ٿا ۽ اهي ٽبڪا جيڪي باهر هجن اُهي گول جو باهريون(Exterior of circle) ناهين ٿا. هڪ ليڪ ٽڪر جيڪو گول جي ڪن به بن ٽبڪن کي ملائي انکي گول جو زهه(Chord)چئبو آهي. اهو زهه جيڪو گول جي مرڪز مان گذري تنهن کي قطر(Diameter) يا مرڪزي زهه چئبو آهي ۽ ان جي ڊيگهه گول جي سيني‌زهن جي ڊيگهن کان سڀ کان وڏي هوندي آهي. اهي اصطلاحون شڪل(ii) ۾ واضح ڪجن ٿيون.



(A) گول جو مرڪز O $(\odot O)$

(B) گول جو گهيرو "C"

(C) رداس r ۽ رداسي ٽڪر $\overline{OD}, \overline{OC}, \overline{OB}, \overline{OA}$

(D) اندريون ۽ باهريون $(\equiv)$

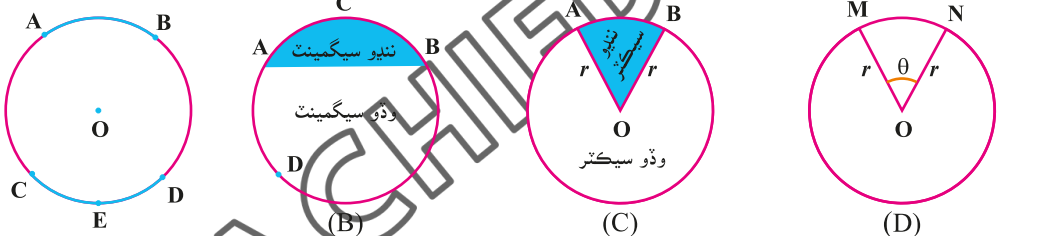
(E) زهه $\overline{GH}, \overline{CD}, \overline{AB}$ قطر $\overline{EF}$ $\left(m\overline{EF} = 2r\right)$

شڪل (ii)

KARACHIEDU.COM

جيڪڏهن r گول جو رداس آهي تہ پوءِ ان جو قطر ، گهيرو ۽ ايراضي ترتيبوار $2r$ ، $2\pi r$ ۽ πr^2 آهن. جڏهن تہ π (يوناني اکرپائي) هڪ غيرناطق عدد آهي.π گول جي گهيري جي ان جي قطر سان نسبت آهي. ان جو لڳ ڀڳ ملهه 22/7 آهي پر اهو ان جي برابر نہ آهي. حقيقت ۾ $\pi = 3.141592653\ldots$ اسين ڏسون ٿا تہ $22/7 = 3.142857142\ldots$ جو ملهه π جي ملهه سان رڳو ڏهائي جي ٻن درجن تائين ساڳيو آهي.

گول جي گهيري جي ڪنهن حصي کي گول جو قوس (Arc) چئبو آهي. هڪ زهه گول جي اندرين علائقي (Interior) کي ٽيڪ ٻن حصن يا ڦاڪن يا سيگمينٽس (Segments) ۾ ورهائي ٿو. قطر گول کي ٻن برابر سيگمينٽس ۾ ورهائي ٿو. سيگمينٽ جي حدبندي هڪ قوس ۽ لاڳاپيل زهه سان ٿيندي آهي. ڪنهن خاص زهه لاءِ گول جي اندرين علائقي جي وڏي حصي واري سيگمينٽ کي وڏي سيگمينٽ (Major segment) چئبو آهي. ۽ ٻئي واري کي ننڍي سيگمينٽ (Minor segment) چئبو آهي. انهن سان مطابقت وارا قوس ترتيبوار وڏو قوس (Major arc) ۽ ننڍو قوس (Minor arc) ڪوٺيا آهن. گول جي اندرين علائقي جو حصو جيڪو ڪنهن قوس ۽ ٻن رداسي ٽڪرن سان گهيريل هجي، ان کي گول جو سيڪٽر (Sector of a circle) چئبو آهي. سيڪٽر جا ٻہ قسم هوندا آهن. وڏو سيڪٽر (Major sector) ۽ ننڍو سيڪٽر (Minor Sector) لفظ Subtend جي معني آهي "جڪڙڻ" ۽ اهو عام طرح سان گول ۾ زهہ يا قوس جي هينيان ڪنهن ٽهڪي تي ڪنڊ ناهڻ لاءِ استعمال ٿيندو آهي. مرڪزي ڪنڊ (Central angle) اها ڪنڊ هوندي آهي جيڪا ڪو قوس گول جي مرڪز تي ناهي ٿو. يعني گول جو مرڪز مرڪزي ڪنڊ جي چوٽي (Vertex) هوندي آهي. شڪل (iii) اهي تصور واضح ڪري ٿي.



(A) قوس AB، CED

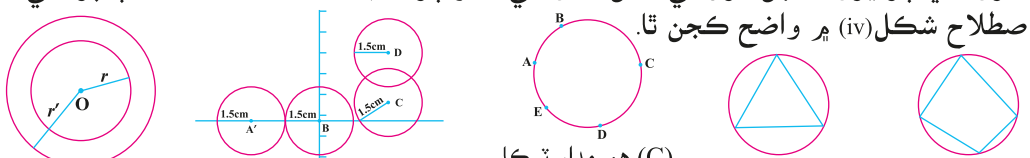
(B) ننڍو قوس ACB
وڏو قوس ADB
(ننڍا ۽ وڏا سيگمينٽ)

(C) سيڪٽر(قوس AB
۽ $\overline{OA}$، $\overline{OB}$ سان ٺهيل)

(D) مرڪزي ڪنڊ $\angle MON = \theta$
چوٽي O ۽ ٻانهون $\overline{OM}$، $\overline{ON}$

شڪل (iii)

گول جو مقام ۽ ماپ معلوم ڪرڻ لاءِ ترتيبوار مرڪز ۽ رداس استعمال ٿيندا آهن. ٻہ گول يڪسان ٿيندا جيڪڏهن انهن جا رداس برابر هجن. ساڳيئي مرڪز وارا ٻہ گول هم مرڪز (Concentric) گول ڪوٺيا. هڪ ئي ليڪ تي موجود ٽهڪا هم ليڪ (Collinear) چورائيا آهن پي صورت ۾ غير هم ليڪ (Non-collinear) ڪوٺيا. هڪ ئي گول تي موجود ٽهڪن کي هم مدار (Concyclic) ٽهڪا چئبو آهي. اهڙو گول جيڪو ڪنهن ٽڪنڊي جي ٽنهي چوٽين مان گذري ان کي گهيريندڙ گول (Circum circle) چئبو آهي. اهو چوڪنڊو جنهن جون سڀ چوٽيون ڪنهن گول تي هجن تہ ان کي مدار چوڪنڊو (Cyclic Quadrilateral) چئبو آهي. اهي سڀ اصطلاح شڪل(iv) ۾ واضح ڪجن ٿا.



(A) هم مرڪز گول

(B) يڪسان گول

(C) هم مدار ٽهڪا

(D) گهيريندڙ گول

(E) مدار چوڪنڊو

شڪل (iv)

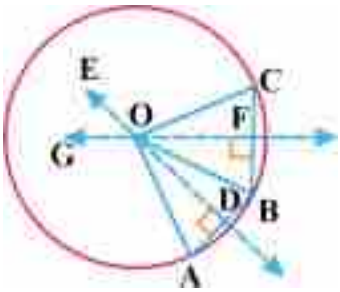
KARACHIEDU.COM

25.1 گول جا زهه (Chords of a Circle):

سڌيان 25.1: ٽن غير هم ليڪ ٽپڪن مان صرف ۽ صرف هڪ گول گذري سگهي ٿو.

مليل:

فرض ڪريو ته A , B ۽ C تي غير هم ليڪ ٽپڪا آهن.



گهربل:

ٽپڪن A , B ۽ C مان صرف ۽ صرف هڪ گول گذري سگهي ٿو

جوڙجڪ:

ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ ۽ $\overline{BC}$ ڪيو $\overline{AB}$ ۽ $\overline{BC}$ جا ترتيبوار عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{ED}$ ۽ $\overleftrightarrow{GF}$ ڪيو. $\overleftrightarrow{ED}$ ۽ $\overleftrightarrow{GF}$ هڪٻئي کي ٽپڪي O تي ڪپين ٿا. $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ۽ $\overline{OC}$ ڪيو.

ثابتي:

بيان	دليل
$\overleftrightarrow{ED}$ جا سي ٽپڪا A ۽ B کان هڪجيتري فاصلي تي آهن يعني $m\overline{OA} = m\overline{OB}$ ... (i)	$\overleftrightarrow{ED}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو ۽ O هڪ ٽپڪو آهي $\overleftrightarrow{ED}$ تي.
$\overleftrightarrow{GF}$ جا سي ٽپڪا B ۽ C کان هڪجيتري فاصلي تي آهن يعني $m\overline{OB} = m\overline{OC}$ ... (ii)	$\overleftrightarrow{GF}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{BC}$ جو ۽ $\overleftrightarrow{GF}$ ٽپڪي O مان گذري ٿي.
ٽپڪو O، $\overleftrightarrow{ED}$ ۽ $\overleftrightarrow{GF}$ جو هڪ ئي ميلاپ وارو ٽپڪو آهي ... (iii)	$\overleftrightarrow{ED}$ ۽ $\overleftrightarrow{GF}$ غير پورو چوٽ ليڪون آهن.
ٽپڪو O، هڪجيتري فاصلي تي آهي A , B ۽ C کان يعني $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = r$ ... (iv)	(i) ۽ (ii) مان
رڳو مرڪز O ۽ رداس r وارو گول ٽپڪن A، B ۽ C مان گذري ٿو. ... (v)	متعددي خاصيت
A، B ۽ C غير هم ليڪي ٽپڪا آهن ... (vi) انهيءَ ڪري هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول وجود رکي ٿو جنهن جو مرڪز O ۽ رداس r آهي ۽ جيڪو غير هم ليڪ ٽپڪن A , B ۽ C مان گذري ٿو	$\overline{OA}$، $\overline{OB}$ ۽ $\overline{OC}$ رداسي ٽڪر آهن ۽ (iii) مان مليل (iii)، (iv)، (v) ۽ (vi) مان

Q.E.D

شامل نتيجو: گول جا ڪي به ٽي ذار ذار ٽپڪا غير هم ليڪ هوندا آهن.

نوٽ 1: سڌيان 25.1 ان گول جي وجود ۽ يڪتائي جو مظاهرو ڪري ٿو جيڪو ڪن به ٽن غير هم ليڪ ٽپڪن مان ڪڍي سگهجي.

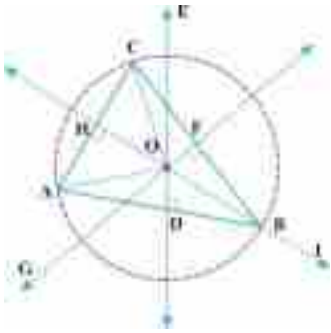
نوٽ 2: ٽي کان وڌيڪ تعداد وارا ٽپڪا جيڪي هڪ گول تي آهن اهي غير هم ليڪ هوندا.

مثال 1:

ثابت ڪيو ته صرف ۽ صرف هڪ ئي گول ڪنهن ٽڪندي جي تنهي چوٽين مان گذري سگهي ٿو.

مليل:

ΔABC جنهن جون چوٽيون A ، B ۽ C آهن.



گهربل:

صرف ۽ صرف هڪ گول ΔABC جي چوٽين مان گذري سگهي ٿو.

جوڙجڪ:

ΔABC جي پاسن $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AC}$ جا ترتيبوار عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{DE}$ ، $\overleftrightarrow{FG}$ ۽ $\overleftrightarrow{HI}$ ڪيو جيڪي ٽبڪي O تي ڪپين ٿا. $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ۽ $\overline{OC}$ ڪيو.

ثابتي:

بيان	دليل
O رڳو هڪ ئي ميلاپ وارو ٽبڪو آهي $\overleftrightarrow{DE}$ ، $\overleftrightarrow{FG}$ ۽ $\overleftrightarrow{HI}$ جو.	$\overleftrightarrow{DE}$ ، $\overleftrightarrow{FG}$ ۽ $\overleftrightarrow{HI}$ غير پورو چوٽ ليکون آهن ۽ O انهن سيني تي موجود آهي.
ΔABC جو گهيرندڙ مرڪز O آهي.	وصف مطابق
ٽبڪو O ، ΔABC جي چوٽين کان هڪجيتري فاصلي تي آهي.	
يعني ته $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = r$	گهيرندڙ مرڪز جي وصف مطابق
مرڪز O ۽ رداس r واروگول، ΔABC جي چوٽين مان گذري ٿو.	$\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ۽ $\overline{OC}$ رداسي ٽڪر آهن.

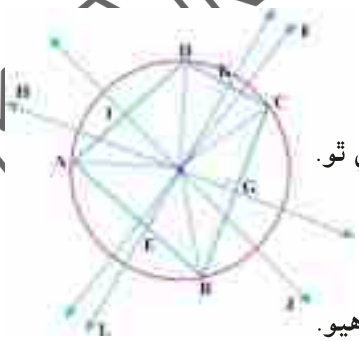
Q.E.D

مثال 2:

ثابت ڪريو ته چوڪنڊي جي چوٽين مان صرف ۽ صرف هڪ ئي گول گذري سگهي ٿو.

مليل:

هڪ چوڪنڊو $ABCD$



گهربل:

چوڪنڊي $ABCD$ جي چوٽين مان صرف ۽ صرف هڪ ئي گول گذري ٿو.

جوڙجڪ:

$\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ ۽ $\overline{AD}$ جا عمودي اڌ ڪندڙ ترتيبوار $\overleftrightarrow{EF}$ ، $\overleftrightarrow{GH}$ ، $\overleftrightarrow{IJ}$ ۽ $\overleftrightarrow{KL}$ ڪيو. اهي سڀ ٽبڪي O تي ملن ٿا. $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ، $\overline{OC}$ ۽ $\overline{OD}$ ناهيو.

MATHS RACE .COM

ثابتي:

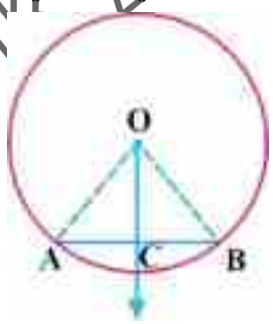
بيان	دليل
$\overleftrightarrow{EF}$ جا سي ٽبڪا A ۽ B کان هڪجيتري فاصلي تي آهن.	$\overleftrightarrow{EF}$ عمودي اڌ ڪندڙ آهي $\overline{AB}$ جو.
$\therefore \quad \overline{OA} \cong \overline{OB}$ (i)	O موجود آهي $\overleftrightarrow{EF}$ تي.
ساڳي ريت، $\overline{OB} \cong \overline{OC}$ (ii)	مٿيون ساڳيو طريقو
$\overline{OC} \cong \overline{OD}$ (iii)	مٿيون ساڳيو طريقو
$\overline{OD} \cong \overline{OA}$ (iv)	مٿيون ساڳيو طريقو
$\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{GH}, \overleftrightarrow{IJ}$ ۽ $\overleftrightarrow{KL}$ جو رڳو هڪ ئي ميلاپ وارو ٽبڪو O آهي.	O انهن سيني ليکن تي موجود آهي.
ٽبڪو O چوڪنڊي جي چوٽين A ، B ، C ۽ D کان هڪجيتري فاصلي تي آهي. انهيءَ ڪري $m\overline{OA} = m\overline{OB} = m\overline{OC} = m\overline{OD} = r$	(i) کان (iv) مان
مرڪز O ۽ رداس r وارو هڪ ئي گول چوڪنڊي جي چوٽين A, B, C ۽ D مان گذري ٿو.	$\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ ۽ $\overline{OD}$ رداسي ٽڪر ناهن ٿا.

Q.E.D

مشق 25.1

1. ڇا هڪ گول ٽن هر ليک ٽبڪن مان گذري سگهي ٿو. دليل سان واضح ڪريو.
2. ڇا توهان ڪنهن چار غير هر ليک ٽبڪن مان هڪ گول ڪڍي سگهو ٿا. دليل سان واضح ڪريو.
3. ثابت ڪري ڏيکاريو ته صرف ۽ صرف هڪ گول چورس جي چوٽين مان گذري سگهي ٿو.
4. ثابت ڪري ڏيکاريو ته صرف ۽ صرف هڪ گول پور پنج ڪنڊي جي چوٽين مان گذري سگهي ٿو.
5. ٽي ڳوٺ اهڙي ريت واقع آهن جو A جي اوپر ۾ 6Km جي فاصلي تي B آهي ۽ B جي اتر ۾ 8Km جي فاصلي تي C آهي. مسطر يا فٽ پٽي ، پلڪار ۽ وندڻي پلڪار جو استعمال ڪندي مسجد جو مقام لهو ته جيئن هر هڪ ڳوٺ مان سڀ ساڳي فاصلي جو پنڌ ڪن. اهو پڻ معلوم ڪريو ته هر هڪ ڳوناڻي کي گهٽو پنڌ ڪرڻو پوندو.

سڌيان 25.2: گول جي مرڪزمان نڪرندڙ ليڪ جيڪا زهه(جيڪو قطر نه آهي)کي اڌواڌ ڪري ٽي اهازهه تي عمود هوندي.



مليل : هڪ گول جنهن جو مرڪز O تي آهي ۽ $\overline{AB}$ هڪ زهه آهي جيڪو مرڪز مان نٿو گذري يعني O اهو قطر نه آهي. هڪ سڌي ليک OC جيڪا $\overline{AB}$ کي ٽبڪي C تي اڌو اڌ ڪري ٿي.

يعني ته $m\overline{AC} = m\overline{BC}$

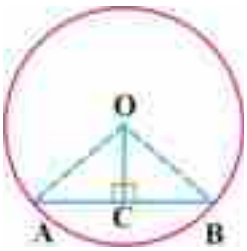
گهربل: $\overline{OC} \perp \overline{AB}$

جوڙجڪ : $\overline{OA}$ ۽ $\overline{OB}$ ناهيو.

ثابتي:

بيان	دليل
۾ $\Delta OCA \leftrightarrow \Delta OCB$	
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$	ساڳي گول جا رداس
$m\overline{AC} = m\overline{BC}$	مليل
$m\overline{OC} = m\overline{OC}$	مشترڪ پاسو
$\Delta OCA \cong \Delta OCB$	پ . پ . پ ≅ پ . پ . پ
$m\angle OCA = m\angle OCB \quad \cdots$ (i)	يڪسان ٽڪنڊن جون مطابقت رکندڙ ڪنڊون
$m\angle OCA + m\angle OCB = 180° \cdots$ (ii)	سپليمينٽري ڪنڊن جو موضوع
$m\angle OCA = 90° = m\angle OCB$	(i) ۽ (ii) مان
$\overleftrightarrow{OC} \perp \overline{AB}$ اهڙيءَ طرح	عمود جي وصف مطابق

Q.E.D



سڌيان 25.3: گول جي مرڪز مان زهر تي عمود، ان زهر کي اڌو اڌ ڪندو.

مليل : هڪ گول جنهن جو مرڪز O تي آهي ۽ $\overline{AB}$ ان جو زهر آهي. مرڪز O کان عمود $\overline{OC}$ ملي ٿو $\overline{AB}$ سان ٽبڪي C تي يعني $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ انهيءَ ڪري $\angle OCA$ ۽ $\angle OCB$ گونيي ڪنڊون آهن

گهربل : $\overline{OC}$ اڌو اڌ ڪري ٿو $\overline{AB}$ کي ٽبڪي C تي.

جوڙجڪ : $\overline{OA}$ ۽ $\overline{OB}$ ڪيو.

ثابتي:

بيان	دليل
۾ $\Delta AOC \leftrightarrow \Delta BOC$	
$m\angle OCA = 90° = m\angle OCB$	مليل
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$	ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
$\overline{OC} \cong \overline{OC}$	مشترڪ پاسو
$\Delta AOC \cong \Delta BOC$ انهيءَ ڪري	هـ . پ ≅ هـ . پ
$\because \overline{AC} \cong \overline{BC}$	يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت وارا پاسا
$\therefore \overline{OC}$، زهر $\overline{AB}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو.	$\overline{AB}$ جو وچيون ٽبڪو C آهي.

Q.E.D

شامل نتيجو 1:
هڪ گول جي زهر جو عمودي اڌ ڪندڙ گول جي مرڪز مان گذرندو.

شامل نتيجو 2:
گول جي مرڪز ۽ زهر جي وچ ۾ گهٽ ۾ گهٽ فاصلو ان جي وچين ٽبڪي کان هوندو آهي.

نوٽ:
سڌيان 25.2 ۽ 25.3 گول جي زهر ۽ مرڪز مان گذرندڙ ان جي اڌ ڪندڙ ليڪ ٽڪر جي وچ ۾ تعلق کي نمايان ڪن ٿا.
انهن سڌيان ۽ فيثاغورث سڌيان جي مدد سان اسين گول جي زهر جي ڊيگهه لهي سگهون ٿا.

KHIEDU.C

مثال 1:

هڪ زهه جي ڏيگهه لهو جنهن جو گول جي مرڪز کان عمودي فاصلو 5cm آهي ۽ رداس 9cm آهي.

حل :



هڪ گول ڪٽو جنهن جو مرڪز O ۽ زهه AB آهي. مرڪز O کان عمود، زهه AB سان ٽپڪي C تي ملي ٿو جيئن پر واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. ΔOCA ۾ فيثا غورث سڌيان جو استعمال ڪندي ، اسان وٽ آهي.

$$\left(m\overline{OA}\right)^2=\left(m\overline{OC}\right)^2+\left(m\overline{AC}\right)^2 \quad \text{يا} \quad 9^2=5^2+\left(m\overline{AC}\right)^2$$

$$\therefore\ m\overline{AC}=\sqrt{81-25}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}\ \text{cm.}$$

آخر ۾

(جيئن $\overline{OC}$ ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو) زهه جي لمبائي $=\overline{AB}=2\left(m\overline{AC}\right)$

$$=2\left(2\sqrt{14}\right)=4\sqrt{14}=14.967\text{cm}$$

مثال 2:

جيڪڏهن گول جي هڪ زهه جي ڏيگهه 8cm آهي ۽ گول جي مرڪز کان زهه تائين عمودي فاصلو 3cm آهي تہ پوءِ گول جو رداس ڇا ٿيندو؟

حل:



هڪ گول ڪٽو جنهن جو مرڪز O آهي ۽ ان جو زهه AB آهي. مرڪز کان عمود 8cm ڏيگهه واري زهه AB سان ٽپڪي C تي ملي ٿو جيئن تہ پر واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي ΔOCA ۾ فيثاغورث سڌيان استعمال ڪندي، اسان وٽ آهي.

$$\left(m\overline{OA}\right)^2=\left(m\overline{OC}\right)^2+\left(m\overline{AC}\right)^2$$

($\overline{OC}$ اڌو اڌ ڪري ٿو $\overline{AB}$ کي) يا $x^2=3^2+4^2$

$x^2=25 \Rightarrow x=5,$ منفي عدد کي نظرانداز ڪندي

اهڙيءَ طرح رداس $=m\overline{OA}=x=5\ \text{cm}$

مشق 25.2

1. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ گول جا قطر هڪبئي کي اڌو اڌ ڪن ٿا.
2. ثابت ڪري ڏيکاريو تہ گول جي مرڪز کان زهه جي وچئين ٽپڪي تي نهندڙ ڪنڊ گوني ڪنڊ هوندي.
3. جيڪڏهن زهه جي ڏيگهه 8cm آهي ۽ گول جي مرڪز کان زهه تائين عمودي فاصلو 3cm آهي تہ پوءِ گول جو گهيرو ۽ گول جي ايراضي لهو.
4. زهه جي ڏيگهه لهو جيڪو گول جي مرڪز کان k فاصلي تي آهي ۽ سندس رداس r هيٺين ريت آهي.

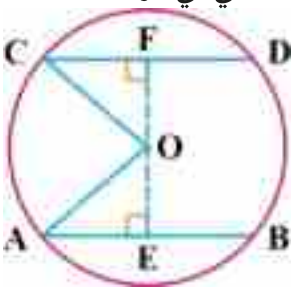
   a. $k=4\text{cm},\ r=9\text{cm}$ b. $k=3\text{cm},\ r=6\text{cm}$
5. گول جو رداس ڇا ٿيندو جيڪڏهن 10cm ڏيگهه واري زهه جو گول جي مرڪز کان فاصلو 3cm آهي.

PACHIEDU.COM

سڌيان 25.4:

جيڪڏهن هڪ ئي گول جا ٻه زهه يڪسان آهن تہ پوءِ اهي مرڪز کان هڪ ئي فاصلي تي هوندا.

مليل:



هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي. ان جا ٻه زهه $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ يڪسان آهن جڏهن تہ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ۽ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$.

گهربل:

$\overline{OE} \cong \overline{OF}$

جوڙجڪ:

$\overline{OA}$ ۽ $\overline{OC}$ ڪيو

ثابتي:

بيان		دليل
$m\overline{AE} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$ ... (i)		عمود $\overline{OE}$، زهه $\overline{AB}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو
$m\overline{CF} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$ ... (ii)		عمود $\overline{OF}$، زهه $\overline{CD}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو
$m\overline{AB} = m\overline{CD}$ ... (iii)	$\because$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (مليل آهي)
$\overline{AE} \cong \overline{CF}$	$\therefore$	(i)، (ii) ۽ (iii) جو استعمال ڪندي
گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي مطابقت		
$\Delta AEO \leftrightarrow \Delta CFO$	ھ	
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$		ساڳيئي گول جا رداسي ٽڪر
$\overline{AE} \cong \overline{CF}$		مٿي ثابت ٿيل آهي
$\Delta AEO \cong \Delta CFO$		ھ . پ ≅ ھ . پ
$\overline{OE} \cong \overline{OF}$	$\Rightarrow$	يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت وارا پاسا

Q.E.D

شامل نتيجو:

گول جا ٻه يڪسان زهن مرڪز تي برابر ڪنڊون ناهين ٿا.

نوٽ 1:

سڌيان 25.4 ٻن زهن جي يڪسانيت ۽ مرڪز کان انهن جي فاصلي جي وچ ۾ لاڳاپي کي واضح ڪري ٿو.

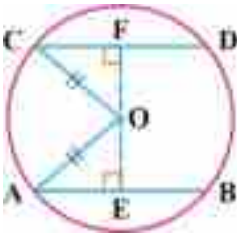
نوٽ 2:

جيڪڏهن ٻه زهه يڪسان نہ آهن تہ پوءِ اهي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي نہ هوندا.

KAKAR COM

سڌيان 25.5: گول جا ٻہ زهہ جيڪي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي آهن ، تہ اهي يڪسان آهن.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي گول جا ٻہ زهہ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ مرڪز O کان هڪجيتري فاصلي تي آهن. يعني تہ $\overline{OE} \cong \overline{OF}$ ان جو مطلب اهو ٻہ آهي تہ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ۽ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$



گهربل:

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

جوڙجڪ:

$\overline{OA}$ ۽ $\overline{OC}$ ڪيو

ثابتي:

بيان	دليل
گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي مطابقت	
۽ $\Delta AEO \leftrightarrow \Delta CFO$	
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$	ساڳيئي گول جا رداسي ٽڪر
$\overline{OE} \cong \overline{OF}$	مليل
$\therefore \Delta AEO \cong \Delta CFO$	هـ . پ ≅ هـ . پ
(i) ... $m\overline{AE} = m\overline{CF}$ انهيءَ ڪري	يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا
(ii) ... $m\overline{AE} = \frac{1}{2} m\overline{AB}$	عمود $\overline{OE}$ زهہ $\overline{AB}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو
(iii) ... $m\overline{CF} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	عمود $\overline{OF}$ زهہ $\overline{CD}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو
$\because \frac{1}{2} m\overline{AB} = \frac{1}{2} m\overline{CD}$	(i) ، (ii) ۽ (iii) جو استعمال ڪندي
$\therefore \overline{AB} \cong \overline{CD}$	

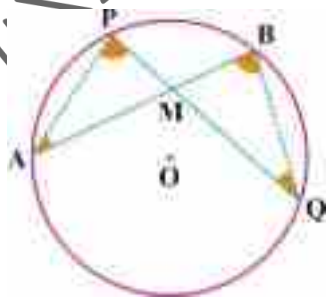
Q.E.D

شامل نتيجو: جيڪڏهن گول جا ٻہ زهہ مرڪز تي برابر ڪندون ناهين ٿا تہ پوءِ اهي يڪسان آهن.

نوٽ 1: سڌيان 25.5 عڪس آهي 25.4 جو

نوٽ 2: جيڪڏهن گول جا ٻہ زهہ مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي نہ آهن تہ پوءِ اهي يڪسان نہ هوندا.

مثال 1:



ثابت ڪري ڏيکاريو تہ جيڪڏهن هڪ گول جا ٻہ زهہ هڪبئي کي ڪپين ٿا تہ پوءِ انهن جي ٽڪرن جون ضرب اپتون برابر ٿيندیون.

مليل: مرڪز O واري گول جا ٻہ زهہ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{PQ}$ هڪبئي کي ٽپڪي M تي ڪپين ٿا

گهربل: $\left(m\overline{AM}\right) \times \left(m\overline{MB}\right) = \left(m\overline{PM}\right) \times \left(m\overline{QM}\right)$

جوڙجڪ: $\overline{AP}$ ۽ $\overline{BQ}$ ڪيو.

KARACHI

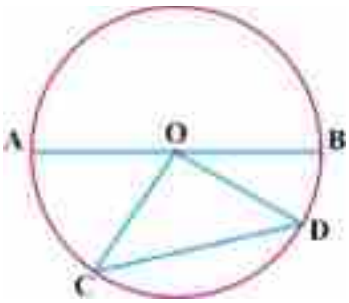
ثابتي:

بيان	دليل
$\angle PAM \cong \angle BQM \quad \cdots \quad (i)$	ساڳيئي قوس PBجون ڪندون
$\angle APM \cong \angle QBM \quad \cdots \quad (ii)$	ساڳيئي قوسAQجون ڪندون
$\Delta APM \sim \Delta QBM$	(i) ۽ (ii) مان: (ڪ . ڪ ~ ڪ . ڪ)
$\frac{m\overline{AM}}{m\overline{QM}} = \frac{m\overline{PM}}{m\overline{BM}} \quad \cdots \quad (iii)$	هم شڪل تڪندن جا مطابقت رکندڙ پاسا
$\left(m\overline{AM}\right)\times\left(m\overline{BM}\right)=\left(m\overline{PM}\right)\times\left(m\overline{QM}\right)$	آمهون سامهون ضرب ڪرڻ سان

Q.E.D

مثال 2:

ثابت ڪري ڏيکاريو تہ هڪ گول ۾ قطر سڀ کان وڏو زهہ هوندو آهي



مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي ان جو هڪ قطر $\overline{AB}$ آهي. $\overline{AB}$ کانسواءِ، $\overline{CD}$ گول جو ڪو ٻيو زهہ آهي.

گهربل: $m\overline{AB} > m\overline{CD}$

جوڙ جڪ: ΔOCD مڪمل ڪرڻ لاءِ $\overline{OC}$ ۽ $\overline{OD}$ ڇڪو

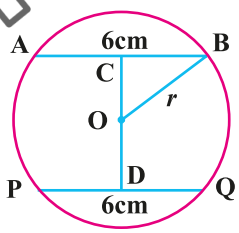
ثابتي:

بيان	دليل
ΔOCD, ۾	
$m\overline{OC} + m\overline{OD} > m\overline{CD} \quad \cdots \quad (i)$	تڪندي جي ٻن پاسن جي جوڙ اپت ٽئين پاسي کان وڏي هوندي آهي.
$m\overline{OC} + m\overline{OD} = m\overline{AB} \quad \cdots \quad (ii)$	$\overline{OC}$ ۽ $\overline{OD}$رداسي ٽڪرا آهن ۽ قطر جي وصف مطابق
$m\overline{AB} > m\overline{CD} \quad \cdots \quad (iii)$	(i) ۽ (ii) جو استعمال ڪندي
زهہ $\overline{AB}$جي ڏيگهہ، جيڪو قطر پڻ آهي وڏي آهي گول جي ڪنهن ٻيئي زهہ $\overline{CD}$ جي ڏيگهہ کان	(iii) مان ۽ ڪنهن بہ زهہ $\overline{CD}$ لاءِ سواءِ قطر جي

Q.E.D

مثال 3:

هڪ گول جي ٻن يڪسان زهن جي وچ ۾ فاصلو لهو جڏهن تہ هر هڪ زهہ جي ڏيگهہ 6cm ۽ گول جو گهيرو 10π cm آهي.



حل: مرڪز O واري گول جا 6m ڏيگهہ وارا ٻہ يڪسان زهہ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{PQ}$ آهن ۽ رداس r آهي جيئن پرواري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي اسان کي $m\overline{CD}$ کپي.

KHEDU.COM

$m\overline{OB} = r = \frac{C}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5\text{cm}.$: گول جو رداس

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ΔOCB ۾ فيثاغورث سڌيان استعمال ڪندي، اسان وٽ آهي

$$\left(m\overline{OB}\right)^2 = \left(m\overline{OC}\right)^2 + \left(m\overline{CB}\right)^2$$

$5^2 = \left(m\overline{OC}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}m\overline{AB}\right)^2$ (مرڪز کان O عمود $\overline{OC}$، زهه $\overline{AB}$ کي اڌو اڌ ڪري ٿو)

$5^2 = \left(m\overline{OC}\right)^2 + 3^2 \qquad \Rightarrow m\overline{OC} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4cm$

چاڪاڻ ته هڪ ئي ڪسان زهه گول جي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي هوندا آهن. انهيءَ ڪري

$m\overline{OD} = m\overline{OC} = 4\text{cm}$

آخر ۾

$m\overline{CD} = m\overline{OC} + m\overline{OD} = 4+4 = 8\text{cm}$

مشق 25.3

1. ثابت ڪريوته ٻن ڪسان گولن جاهه ڪسان زهه انهن جي مرڪزن کان هڪ جيتري فاصلي تي هوندا آهن.
2. ثابت ڪري ڏيکاريو ته ٻن ڪسان گولن جا هه زهه جيڪي مرڪز کان هڪجيترو فاصلو رکن ٿا اهي ڪسان هوندا.
3. رداس r واري هڪ گول ۾ α ڏيگهه وارن ٻن ڪسان زهن جي وچ ۾فاصلو لهو جڏهن ته α ۽ r جون قيمتون هيٺ ڏنل آهن

(a). $\alpha = 7\text{cm}$ and $r = 6\text{cm}$ (b). $\alpha = 5\text{cm}$ and $r = 4\text{cm}$

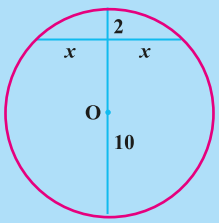
(c). $\alpha = 2\text{cm}$ and $r = 4\text{cm}$ (d). $\alpha = 4\text{cm}$ and $r = 9\text{cm}$

4. رداس r واري گول ۾ α ۽ β واري ڏيگهه جي ٻن پورو چوٽ زهه جي وچ ۾ فاصلو معلوم ڪريو جڏهن ته α ، β ۽ r جون قيمتون هيٺ ڏنل آهن.

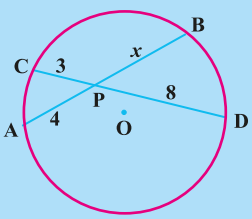
a. $\alpha = 6\text{cm}, \beta = 8\text{cm}, r = 5\text{cm}$ b. $\alpha = 3\text{cm}, \beta = 6\text{cm}, r = 14\text{cm}$

5. جيڪڏهن مرڪز O واري گول جا هه زهه $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ هڪبئي کي ٽبڪي P تي ڪپين ٿا ته پوءِ هيٺين ۾ x جو ملهه لهو.

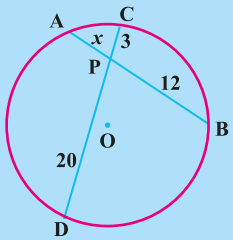
(a)



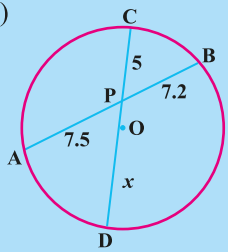
(b)



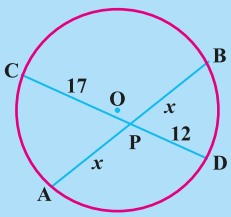
(c)



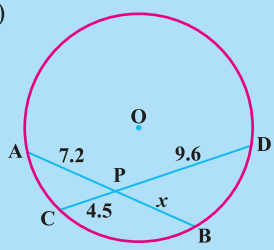
(d)



(e)



(f)



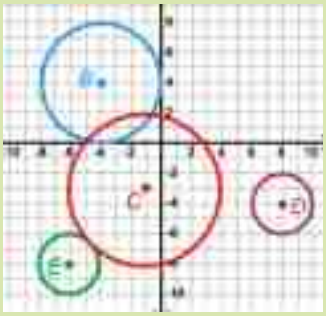
جائزي واري مشق 25

1. درست جواب تي نشان لڳايو

i. سڀ گول هميشه _____ هوندا آهن.

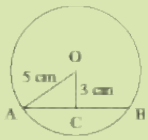
(a) يڪسان (b) هم شڪل
(c) ڇهڻا (d) ڪو به نه

ii. هيڪنين شڪل ۾ مرڪز D ۽ E وارا گول _____ آهن.



(a) يڪسان (b) هم شڪل
(c) ٻئي (a) ۽ (b) (d) ڪو به نه

iii. ڏنل شڪل ۾، زهه AB جي ڊيگهه _____ آهي.



(a) 4cm (b) 6cm (c) 8cm (d) 15cm

iv. هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول _____ ٽنهڪن مان گذرندو آهي.

(a) هم ليڪي (b) غير هم ليڪي (c) غير مشترڪ (d) ڪو به نه

v. "جيڪڏهن ڪنهن گول جا ٻه زهه يڪسان آهن ته پوءِ اهي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي هوندا." ان بيان جو مفروضو آهي :

(a) گول جا ٻه زهه مرڪز کان هڪ جيتري فاصلي تي آهن
(b) گول جا ٻه زهه يڪسان آهن
(c) هڪ گول جا ٻه زهه هوندا آهن
(d) گول جو مرڪز زهه کان هڪجيتري فاصلي تي هوندو آهي.

vi. "جيڪڏهن ڪنهن گول جا ٻه زهه يڪسان آهن ته پوءِ اهي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي هوندا" ان بيان جو نتيجو آهي:

(a) گول جا ٻه زهه مرڪز کان هڪ جيتري فاصلي تي آهن
(b) گول جا ٻه زهه يڪسان آهن
(c) هڪ گول جا ٻه زهه هوندا آهن
(d) گول جو مرڪز زهه کان هڪ جيتري فاصلي تي هوندو آهي.

vii. هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول ٽن غير هم ليڪ ٽبڪن مان گذري ٿو. ان بيان جو مفروضو آهي.

(a) تي ٽبڪا غير هم ليڪ آهن (b) هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول ٽن ٽبڪن مان گذري ٿو.

(c) ٽن ٽبڪن مان به گول گذرندا (d) تي ٽبڪا هم ليڪ آهن.

viii. "هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول ٽن غير هم ليڪ ٽبڪن مان گذري ٿو" ان بيان جو نتيجو آهي.

(a) تي ٽبڪا غير هم ليڪ آهن (b) هڪ ۽ صرف هڪ ئي گول ٽن ٽبڪن مان گذري ٿو.

(c) ٽن ٽبڪن مان به گول گذرندا (d) تي ٽبڪا هم ليڪ آهن.

ix. گول هڪ _____ ڏنگي ليڪ جي مثال آهي.

(a) سادي ۽ بند (b) سادي ۽ کليل

(c) غير سادي ۽ بند (d) غير سادي ۽ کليل

خلاصو

- گول هڪ سادي بند ڏنگي ليڪ آهي.
- گول جا سڀ ٽبڪا هڪ مقرر ٽبڪي کان هڪ ئي فاصلي تي هوندا آهن. اهو مقرر ٽبڪو مرڪز ڪوٺبو آهي ۽ مستقل فاصلي کي گول جو رداس چئبو آهي.
- گول جو رداسي ٽڪر هڪ اهڙو ليڪ ٽڪر آهي جيڪو گول جي مرڪز کان ان جي ڪنهن به ٽبڪي تائين هوندو آهي.
- گول جي ڪن به بن ٽبڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي زهه چئبو آهي. مرڪز مان گذرندڙ زهه کي گول جو قطر يا مرڪزي زهه چئبو آهي.
- رداس r واري گول جو قطر، گهيرو ۽ ايراضي ترتيبوار $2r$، $2\pi r$ ۽ πr^2 آهي.
- گول جي گهيري جي ڪنهن به حصي کي قوس چئبو آهي. انهن جا به قسم آهن. وڏو قوس ۽ ننڍو قوس.
- سيڪٽر گول علائقي جا اهي حصا آهن جيڪي بن رداسي ٽڪرن ۽ قوس سان گهيريل هجن، ان جا به قسم آهن وڏو سيڪٽر ۽ ننڍو سيڪٽر.
- سيگمينٽ گول علائقي جا اهي حصا آهن جيڪي هڪ زهه ۽ قوس سان گهيريل هجن. ان جا به قسم آهن وڏي سيگمينٽ ۽ ننڍي سيگمينٽ.
- سڀ گول هڪٻئي جا همشڪل هوندا آهن.
- به گول يڪسان هوندا جيڪڏهن انهن جا رداس برابر هجن.
- ساڳي مرڪز وارا گول هم مرڪز ڪوٺبا آهن.
- هڪ ئي گول تي موجود ٽبڪا هم مدار ڪوٺبا آهن.
- هڪ ۽ صرف هڪ گول ئي ٽن غير هم ليڪ ٽبڪن مان گذري سگهي ٿو.
- گول جي مرڪز مان گذرندڙ سڌي ليڪ جيڪا زهه(جيڪو قطر نه آهي) کي اڏو اڌ ڪري اها ان زهه تي عمود هوندي.
- گول جي مرڪز مان ڪنهن زهه تي عمود ، ان زهه کي اڏو اڌ ڪندو آهي.
- جيڪڏهن ڪنهن گول جا به زهه يڪسان آهن تہ پوءِ اهي مرڪز کان هڪ جيتري فاصلي تي هوندا.
- گول جا به زهه جيڪي مرڪز کان هڪجيتري فاصلي تي هجن ، اهي يڪسان هوندا.

گول جون ڇھٽي ليڪون

TANGENTS OF A CIRCLE

يونٽ 26

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

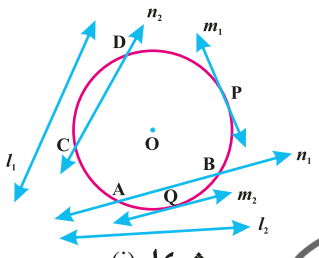
هن يونٽ جي پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا ته

- هيٺيان سڌيان انهن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجهن ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪن.
  - ❖ جيڪڏهن هڪ ليڪ گول جي رداسي ٽڪر جي ٻاهرئين ڇيڙي تي عمود هجي ته اها ليڪ ان ٽپڪي تي گول جي ڇهٽي ليڪ هوندي.
  - ❖ ڇهڻ ٽپڪي تي، گول جي ڇهٽي ليڪ ۽ گول جو رداسي ٽڪر ٻئي، هڪٻئي تي عمود هوندا آهن.
  - ❖ ڪنهن گول جي هڪ ٻاهرين ٽپڪي تان گول تي ڪيل ٻ ڇهٽي ليڪون، ڏيگهه ۾ برابر هونديون.
  - ❖ جيڪڏهن ٻ گول ٻاهريان ڇُهن ٿا ته انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو ترتيبوارانهن جي رداسن جي جوڙ اُپت يا فرق جي برابر آهي.

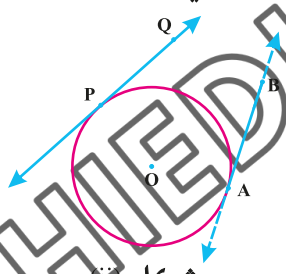


تعارف (Introduction):

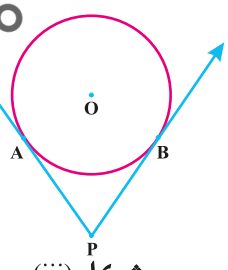
هتي ڇهڻي ليڪ يا ليڪن سان لاڳاپيل سڌيان ۽ انهن جون ثابتيون زير غور ايندين، رياضي جي هڪ شاخ ڪيلڪيولس (Calculus) ۾ ڊيريويٽو(Derivative) بيان ڪرڻ لاءِ ڇهڻي ليڪ جو تصور پڻ ڏاڍو اهم آهي. هڪ ليڪ گول کي ڪيڏي سگهي ٿي ۽ نه ٻه . جيڪڏهن ڪا ليڪ گول کي رڳو هڪ ئي ٽڪي ٿي ڇُهي ٿي ته اها گول جي ڇهڻي ليڪ (Tangent) آهي. ڇهڻي ليڪ ۽ گول جي وچ ۾ مشترڪ ٽڪي کي ميلاپ وارو ٽڪو يا ڇهڻ ٽڪو (Point of tangency or point of contract) چئبو آهي ۽ اها ليڪ جيڪا گول کي ٻن ٽڪن تي ڪٽي ته ان کي ڪيندڙ ليڪ (Secant) چئبو آهي. ڪيندڙ ليڪ ۽ گول جي وچ ۾ ميلاپ وارا ٻه ٽڪا هوندا آهن. شڪل (i) ۾ l_1 ۽ l_2 گول کي نٽيون ڇُهن. ليڪون m_1 ۽ m_2 ترتيبوار ٽڪن P ۽ Q تي ڇهڻي ليڪون آهن. ليڪون n_1 ۽ n_2 ترتيبوار ٽڪن A، B ۽ C، D تي ڪيندڙ ليڪون آهن. ڇهڻي ٽڪي کان ڇهڻي ليڪ جي ڪنهن ٻ ٽڪي تائين ليڪ ٽڪر کي ڇهڻي ليڪ ٽڪر (Tangent Segment) چئبو آهي. شڪل (ii) ۾ $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{AB}$ گول تي ڇهڻي ليڪون آهن جڏهن ته ترتيبوار $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{AB}$ ڇهڻي ليڪ ٽڪر آهن. ڇهڻي ليڪ ٽڪر $\overline{AB}$ جي ڏيڪهه $m\overset{\frown}{AB}$ آهي. گول کان ٻاهر موجود ڪنهن ٻ ٽڪي P مان ٻ ڇهڻي ليڪون $\overrightarrow{PA}$ ۽ $\overrightarrow{PB}$ ڪڍي سگهجن ٿيون جيئن شڪل (iii) ۾ ڏيکاريل آهي.



شڪل (i)

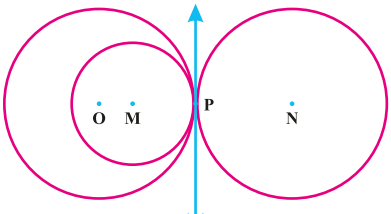


شڪل (ii)

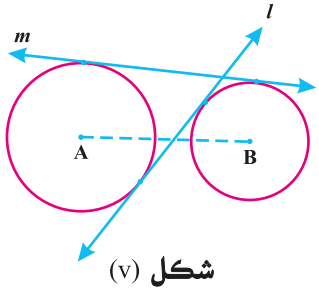


شڪل (iii)

اُهي گول جيڪي هڪٻئي کي اندران يا ٻاهريان ڇهن ٿا. انهن ۾ ڇهڻ ٽڪو مشترڪ هوندو آهي. شڪل (iv) ۾، ٽڪو P مشترڪ ڇهڻ ٽڪو آهي انهن گولن جو جنهن جا مرڪز M، O ۽ N آهن مرڪز O ۽ M وارا گول اندريان ڇهن ٿا. جڏهن ته O ۽ N مرڪزن (يا M ۽ N پڻ) وارا گول ٻاهريان ڇهن ٿا. هڪٻئي کي نه ڇهڻ وارا ٻه گول عام ڇهڻ ليڪون يا مشترڪ ڇهڻي ليڪون رکي سگهن. ٽاڙيا انهن جا ڇهڻ ٽڪا مختلف هوندا آهن ٻن نه ڇهڻ وارن گولن جي مشترڪ ڇهڻي ليڪ کي اندرين (يا آڏي) مشترڪ ڇهڻي ليڪ چئبو جيڪڏهن اها انهن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي ڪپي، پي صورت ۾ ان کي ٻاهرين (يا سڌي طرح) مشترڪ ڇهڻي ليڪ چئبو آهي شڪل (v) ۾ گولن تي ليڪ m هڪ ٻاهرين (يا سڌي طرح) مشترڪ ڇهڻي ليڪ آهي جڏهن ته ليڪ l هڪ اندرين (يا آڏي) مشترڪ ڇهڻي ليڪ آهي.



شڪل (iv)

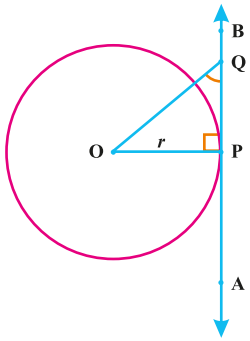


شڪل (v)

KARACHIEDU.COM

26.1 گول تي ڇهڻي ليڪ يا ليڪون

سڌيان 26.1: جيڪڏهن هڪ ليڪ گول جي رداسي ٽڪر جي ٻاهرئين ڇيڙي تي عمود هجي ته اها ليڪ ان ٽپڪي تي گول جي ڇهڻي ليڪ هوندي.



مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس r آهي. رداس $\overline{OP}$ تي عمود $\overleftrightarrow{AB}$ ڪڍيو ويو آهي يعني ٻاهرئين ڇيڙي P تي $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$.

گهربل: گول جي ٽپڪي P تي $\overleftrightarrow{AB}$ ڇهڻي ليڪ آهي.

جوڙجڪ: $\overline{OQ}$ ڪڍيو، جڏهن ته $\overleftrightarrow{AB}$ تي P کانسواءِ Q هڪ ٽپڪو آهي.

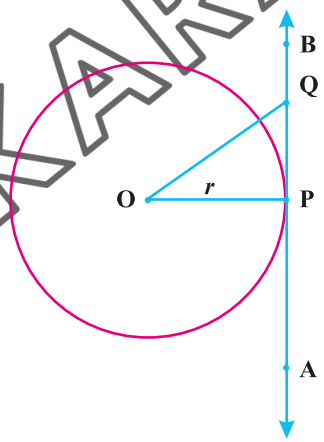
ثابتي:

بيان	دليل
گوني ڪندي ٽڪندي OPQ ۾ $m\angle OPQ = 90°$	P تي $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$ (مليل)
پر $m\angle OQP < 90°$	گوني ڪنڊ ٽڪندي ۾ گوني ڪنڊ کانسواءِ ٻيون ڪنڊون سوڙهي ڪنڊون هونديون آهن.
انهي ڪري $m\overline{OQ} > m\overline{OP}$	وڏي ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو وڏو هوندو آهي.
انهي ڪري Q گول کان ٻاهر موجود آهي.	$m\overline{OQ} > r$
P کانسواءِ $\overleftrightarrow{AB}$ جا سڀ ٽپڪا گول کان ٻاهر آهن	Q کو ٻيو ٽپڪو آهي P کانسواءِ (جوڙجڪ)
گول ۽ $\overleftrightarrow{AB}$ جو ميلاپ وارو ٽپڪو رڳو P آهي.	
انهي ڪري $\overleftrightarrow{AB}$ گول جي ٽپڪي P تي هڪ ڇهڻي ليڪ آهي.	ڇهڻي ليڪ جي وصف مطابق

Q.E.D.

سڌيان 26.2

ڇهڻ ٽپڪي تي، گول جي ڇهڻي ليڪ ۽ گول جو رداسي ٽڪر ٻئي، هڪٻئي تي عمود هوندا آهن.



مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O رداس r ۽ رداسي ٽڪر $\overline{OP}$ آهي. ٽپڪي P تي $\overleftrightarrow{AB}$ هڪ ڇهڻي ليڪ آهي.

گهربل: $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$

جوڙجڪ: $\overline{OQ}$ ڪڍيو، جڏهن ته P کانسواءِ Q هڪ ٽپڪو آهي جو $\overleftrightarrow{AB}$.

KARACHI.COM

ثابتي:

بيان	دليل
ٽبڪو Q گول کان ٻاهر آهي	P کانسواءِ Q کو ٻيو ٽبڪو آهي جو $\overleftrightarrow{AB}$
انهي ڪري $m\overline{OQ} > m\overline{OP} = r$ ... (i)	$\overline{OP}$ هڪ رداسي ٽڪر آهي
P کانسواءِ $\overleftrightarrow{AB}$ جي سيني ٽبڪن جو مرڪز کان فاصلو r کان وڌيڪ آهي	$m\overline{OP} = r$ ۽
تنهنڪري P کانسواءِ سي ٽبڪا گول کان ٻاهر آهن	P کانسواءِ Q کو ٻيو ٽبڪو آهي جو $\overleftrightarrow{AB}$ (جوڙجڪ)
مرڪز O کان $\overleftrightarrow{AB}$ جي ڪنهن به ٽبڪي تائين سي کان ننڍو ليڪ ٽڪر $\overline{OP}$ آهي.	(i) مان
انهي ڪري $m\angle OPQ = 90°$ ۽ $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$	P کانسواءِ $\overleftrightarrow{AB}$ جي ڪنهن به ٽبڪي Q لاءِ ٻيون سي ڪنڊون سوڙهيون ڪنڊون آهن

Q.E.D.

نوٽ 1:

سڌيان 26.1 ۽ 26.2 ڇهڻ ٽبڪي تي، گول جي ڇهڻي ليڪ ۽ ان سان واسطيدار رداسي ٽڪر جي وچ ۾ تعلق ڪي نمايان ڪن ٿا.

نوٽ 2:

سڌيان 26.1 ۽ سڌيان 26.2 هڪٻئي جا عڪس آهن.

شامل نتيجو 1:

ڇهڻ ٽبڪي تي، گول جي ڇهڻي ليڪ تي ڪا عمودي ليڪ هميشہ گول جي مرڪز مان گذرندي.

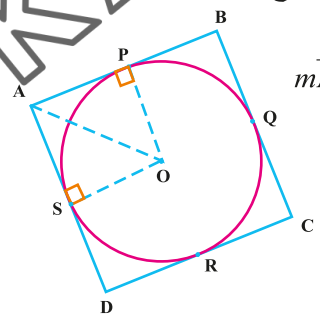
شامل نتيجو 2:

گول جي مرڪز، ڇهڻي ٽبڪي ۽ ڇهڻي ليڪ جي ڪنهن ٻيئي ٽبڪي سان ٺهيل ٽڪنڊو هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو هوندو

شامل نتيجو 3: گول جي ڪنهن هڪ ڏنل ٽبڪي مان صرف هڪ ئي ڇهڻي ليڪ ڪڍي سگهجي ٿي.

مثال 1: ثابت ڪري ڏيکاريو تہ ڪنهن گول کي گهيريندڙ پورو چوٽ چوڪنڊو رامبس آهي.

ڏنل: هڪ گول جو گهيريندڙ پورو چوٽ چوڪنڊو $ABCD$ $^{m}\|$ آهي. اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ ۽ $m\overline{AD} = m\overline{BC}$



گهربل: $ABCD$ $^{m}\|$ هڪ رامبس آهي يعني تہ $m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{AD}$

جوڙجڪ: گول جي ٽبڪن P، Q، R ۽ S تي ترتيبوار $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ ۽ $\overline{AD}$ ڇهڻي ليڪ ٽڪر آهن $\overline{OS}, \overline{OA}$ ۽ $\overline{OP}$ ڪيو.

KARACHIEDU.COM

ثابتي:

بيان		دليل
$\Delta OSA \leftrightarrow OPA$	هڪ	
$\overline{OS} \cong \overline{OP}$		ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
$m\angle OSA = 90° = m\angle OPA$		ڇهڻي ليڪ رداسي ٽڪر تي عمود آهي
$\overline{OA} \cong \overline{OA}$		ٽڪندي جو مشترڪ پاسو
$\Delta OSA \cong \Delta OPA$	$\Rightarrow$	هـ . ڪ . هـ
$m\overline{AS} = m\overline{AP} \quad \cdots (i)$		يڪسان ٽڪندن جا مطابقت رکندڙ پاسا
$\Delta OPB \cong \Delta OQB$	ساڳي ريت	ساڳي طريقي موجب
$m\overline{BQ} = m\overline{BP} \quad \cdots (ii)$		يڪسان ٽڪندن جا مطابقت رکندڙ پاسا
$\Delta OQC \cong \Delta ORC$		ساڳي طريقي موجب
$m\overline{QC} = m\overline{RC} \quad \cdots (iii)$		يڪسان ٽڪندن جا مطابقت رکندڙ پاسا
$\Delta ORD \cong \Delta OSD$		ساڳي طريقي موجب
$m\overline{DS} = m\overline{DR} \quad \cdots (iv)$		يڪسان ٽڪندن جا مطابقت رکندڙ پاسا
$m\overline{AS} + m\overline{BQ} + m\overline{QC} + m\overline{DS}$	هاڻي	(i)_(iv) مساواتن کي جوڙ ڪندي
$= m\overline{AP} + m\overline{BP} + m\overline{RC} + m\overline{DR}$		
$\left(m\overline{AS} + m\overline{DS}\right) + \left(m\overline{BQ} + m\overline{QC}\right)$	يا	پيهر، ترتيب ڏيندي
$= \left(m\overline{AP} + m\overline{BP}\right) + \left(m\overline{RC} + m\overline{DR}\right)$		
$m\overline{AD} + m\overline{BC} = m\overline{AB} + m\overline{CD} \quad (v)$	يا	شڪل مان
$2m\overline{BC} = 2m\overline{AB} \Rightarrow m\overline{AB} = m\overline{BC} \quad (vi)$		پورو چوڪٹ چوڪندي جي وصف مطابق (مليل)
$m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{AD}$		مليل ۽ (vi) جو استعمال ڪندي
انهي ڪري ABCD $\|\|^m$ هڪ رامبس آهي		

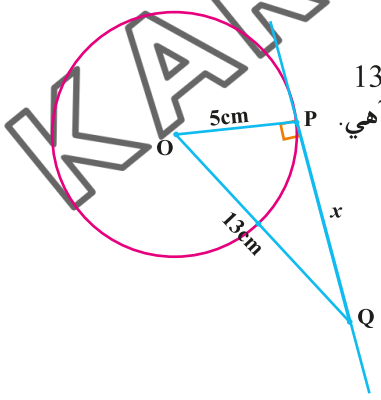
Q.E.D.

مثال 2: 5cm رداس واري گول جي ڇهڻي ليڪ ٽڪر جي ڊيگهه لهو جنهن جو ڇيڙو گول جي مرڪز کان 13cm پري آهي.

حل: فرض ڪريو ته گول جو مرڪز O آهي ۽ ڇهڻ ٽپڪو P آهي.
فرض ڪريو ته Q ڇهڻي ليڪ جو اهو ٽپڪو آهي جيڪو مرڪز کان 13cm جي فاصلي تي آهي جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. شڪل مان، اسان وٽ آهي.

$m\overline{OP} = r = 5cm$ ، $m\overline{OQ} = 13cm$ ۽ $m\overline{PQ} = x = ?$

فيثاغورث سڌيان جو استعمال ڪندي



$$\left(m\overline{OQ}\right)^2 = \left(m\overline{OP}\right)^2 + \left(m\overline{PQ}\right)^2$$
$$(13)^2 = (5)^2 + (x)^2$$
$$169 = 25 + x^2$$
$$x^2 = 169 - 25 = 144 \quad \text{يا}$$
$$m\overline{PQ} = x = \sqrt{144} = 12cm.$$

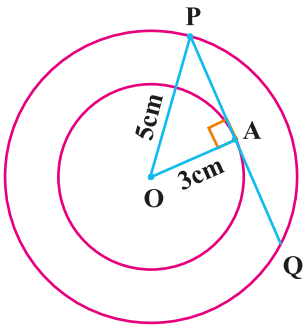
KARA

مثال 3: بن هم مرڪز گولن جا ترتيبوار رداس 5cm ۽ 3cm آهن. وڏي گول جي ٽيڪن کان ننڍي گول تي ڇهڻي ليک ٽڪر جي ڏيکهه لهو. وڏي گول جي زهه جي ڏيکهه پٽ لهو جيکو ننڍي گول کي ڇُهي ٿو.

حل: ڏنل رداسن وارا بہ هم مرڪز گول شڪل ۾ ڏيکاريل آهن جن جو مشترڪ مرڪز O آهي.

يعني ته $m\overline{OA}=3cm$ ۽ $m\overline{OP}=5cm$ سڀ کان اڳ ۾ اسانکي $m\overline{AP}$ ۽ $m\overline{AQ}$ لهڻ جي ضرورت آهي.

يعني وڏي گول جي ٽيڪن P ۽ Q کان ننڍي گول تي ڇهڻي ليک ٽڪرن جي ڏيکهه.



فيثاغورث سڌيان جو استعمال ڪندي اسان وٽ آهي

$$\left(m\overline{OP}\right)^2=\left(m\overline{OA}\right)^2+\left(m\overline{AP}\right)^2$$

يعني $25=9+\left(m\overline{AP}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad \left(m\overline{AP}\right)^2=16$$

يا $m\overline{AP}=4cm$

پر رداسي ٽڪر $\overline{OA}$ اڏو ڪري تو زهه $\overline{PQ}$ کي تنهنڪري $m\overline{AP}=m\overline{AQ}$

$$\Rightarrow m\overline{AQ}=4cm$$

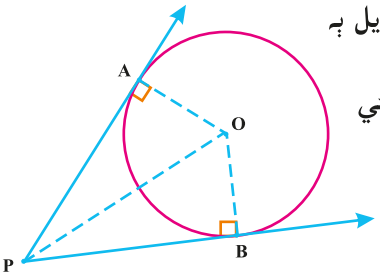
آخر ۾، اسان کي وڏي گول جي زهه $\overline{PQ}$ جي ڏيکهه ڪڍي ٿي جيکو ننڍي گول کي ڇُهي ٿو. جيکو آهي:

$$m\overline{PQ}=m\overline{AP}+m\overline{AQ}=8cm$$

مشق 26.1

1. ثابت ڪري ڏيکاريو ته گول کي گهيريندڙ ٽڪندو هڪ ٽپور پاسو ٽڪندو آهي.
2. ثابت ڪري ڏيکاريو ته گول کي گهيريندڙ مستطيل هڪ چورس آهي.
3. بن هم مرڪز گولن جا ترتيبوار قطر 10cm ۽ 5cm آهن. باهرين گول جي هڪ ٽيڪي کان ننڍي گول تي هڪ ڇهڻي ليک ٽڪر جي ڏيکهه لهو. باهرين گول جي ان زهه جي ڏيکهه پٽ لهو جيکو اندرين گول کي ڇُهي ٿو.
4. گول جي مرڪز کان 5cm جي فاصلي تي هڪ ٽيڪو آهي. ان ٽيڪي کان گول جي ڇهڻي ليک ٽڪر جي ڏيکهه 4cm آهي. گول جو قطر، گهيرو ۽ ايراضي لهو.
5. 7cm رداس واري گول جي مرڪز کان هڪ ٽيڪو 25cm جي فاصلي تي آهي. ان ٽيڪي کان گول تي هڪ ڇهڻي ليک ٽڪر جي ڏيکهه معلوم ڪريو.
6. 3cm رداس واري گول جي مرڪز کان ڪيترو پري هڪ 10cm ڏيکهه وارو ڇهڻي ليک ٽڪر گول تي ڪڍي سگهجي ٿو؟

SINDHIEDU.COM



سڌيان 26.3: ڪنهن گول جي هڪ ٻاهرين ٽپڪي تان گول تي ڪيل ٻه چھٽي ليڪون، ڊيگھ ۾ برابر هوندیون.

مليل: هڪ ٻاهرين ٽپڪي P کان گول جي ٽپڪن A ۽ B تي ٻه چھٹي ليکون $\overrightarrow{PA}$ ۽ $\overrightarrow{PB}$ آهن

گھربل: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

جوڙجڪ: $\overline{OA}, \overline{OB}$ ۽ $\overline{OP}$ ڪيو

ثابتي:

بيان	دليل
$\overline{OA} \perp \overrightarrow{PA}$ ۽ $m\angle OAP = 90°$	چھٹي ليڪ رداسي ٽڪر تي عمود آهي
$\overline{OB} \perp \overrightarrow{PB}$ ۽ $m\angle OBP = 90°$	ساڳي ريت چھٹي ليڪ رداسي ٽڪرتي عمود آهي.
$\Delta OAP \leftrightarrow \Delta OBP$ گوني ڪنڊ ٽڪنڊن ۾	
$\overline{OP} \cong \overline{OP}$	مشترڪ پاسو
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$	ساڳيئي گول جا رداسي ٽڪر
$\therefore \quad \Delta OAP \cong \Delta OBP$	ھ . پ ≅ ھ . پ
$\therefore \quad \overline{PA} \cong \overline{PB}$	يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا

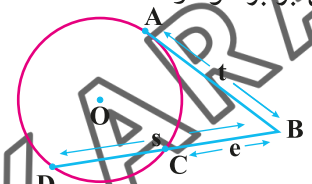
Q.E.D.

نوٽ 1: سڌيان 26.3 ظاهر ڪري ٿو ته ڪنهن گول جون ٻه چھٹي ليڪون جيڪي هڪ ٻئي کي گول کان ٻاهر ڪنهن ٽپڪي تي ڪپين ٿا اهي ڊيگھ ۾ برابر هوندیون.

شامل نتيجو 1: ڪنهن گول جون ٻاهرين ٽپڪي کان ڪيل چھٹي ليڪون مرڪز تي يڪسان ڪنڊون ٺاهن ٿيون.

شامل نتيجو 2: ڪنهن گول جون ٻه پوروڇوٽ چھٹي ليڪون گول کان ٻاهر ساڳيئي ٽپڪي تي نه ڪپنديون.

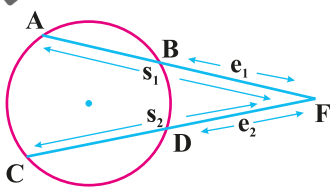
نوٽ 2: جيڪڏهن ڪنهن گول جي چھٹي ليڪ ۽ ڪپندڙ ليڪ هڪٻئي کي گول کان ٻاهر ڪپين جيئن پر واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. تہ پوءِ چھٹي ليڪ ٽڪر جي ڊيگھ جو چورس برابر هوندو ڪپندڙ ليڪ ٽڪرءِ ان جي ٻاهرين حصي جي ڊيگھن جي ضرب اُپت جي.



يعني ته

$$\left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{DB}\right)\cdot\left(m\overline{BC}\right) \quad \text{يا} \quad t^2 = s\cdot e$$

نوٽ 3: جيڪڏهن ٻه ڪپندڙ ليڪون هڪٻئي کي گول کان ٻاهر ڪپين ٿيون جيئن پر واري شڪل ۾ ڏيکاريل آهي ته پوءِ هڪ ڪپندڙ ليڪ ٽڪر ءِ ان جي ٻاهرين حصي جي ڊيگھن جي ضرب اُپت برابر هوندي، ٻيئي ڪپندڙ ليڪ ٽڪر ءِ ان جي ٻاهرين حصي جي ڊيگھن جي ضرب اُپت جي. يعني ته



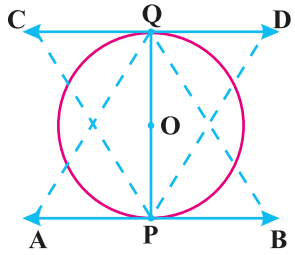
$$\left(m\overline{AF}\right)\times\left(m\overline{BF}\right) = \left(m\overline{CF}\right)\times\left(m\overline{DF}\right) \quad \text{يا} \quad s_1e_1 = s_2e_2$$

KARACHIEDU.COM

مثال 1:

ثابت ڪريو تہ ڪنهن گول جي قطر جي ڇيڙن تي ڪيل ڇڪتي ليڪون پوروڇوت هونديون.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي. $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ ترتيبوار قطر جي ڇيڙن P ۽ Q تي ڇڪتي ليڪون آهن



گهربل: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

جوڙجڪ: $\overline{CP}$، $\overline{DP}$، $\overline{AQ}$ ۽ $\overline{BQ}$ ڪيو

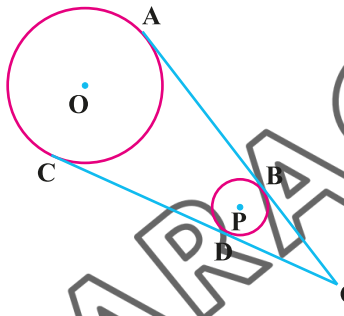
ثابتي:

بيان		دليل
$m\angle APO = 90° = m\angle BPO$		$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$
$m\angle CQO = 90° = m\angle DQO$		$\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{OQ}$
$m\angle CPQ = m\angle BQP$	(i)	متبادل ڪنڊون
$m\angle AQP = m\angle QPD$	(ii)	متبادل ڪنڊون
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	∴	ساڳيون اندريون متبادل ڪنڊون ، (i)، (ii)

Q.E.D.

مثال 2:

ثابت ڪريو تہ بن گولن جون بہ سڌي طرح مشترڪ ڇڪتي ليڪون، ديگهہ ۾ برابر آهن.



مليل: $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ بہ سڌي طرح مشترڪ ڇڪتي ليڪون آهن بن گولن تي جن جا مرڪز O ۽ P آهن.

گهربل: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$

جوڙجڪ: $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ کي وڌايو تہ جيئن اهي هڪ ٻئي کي Q تي ڪپين.

ثابتي:

بيان		دليل
$m\overline{AQ} = m\overline{CQ}$	(i)	⊙O جي ٻاهرين ٻئي Q مان ڪيل ڇڪتي ليڪون
$m\overline{BQ} = m\overline{DQ}$	(ii)	⊙P جي ٻاهرين ٻئي Q مان ڪيل ڇڪتي ليڪون
$m\overline{AQ} - m\overline{BQ} = m\overline{CQ} - m\overline{DQ}$		(i) مان (ii) کي ڪٽ ڪندي
$m\overline{AB} = m\overline{CD}$	∴	شڪل جو استعمال ڪندي.

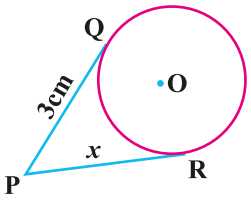
Q.E.D.

KARACHIEDU.COM

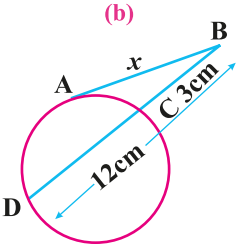
مثال 3:

هيٺين شڪلين ۾ نامعلوم ڏيکهه x لهو.

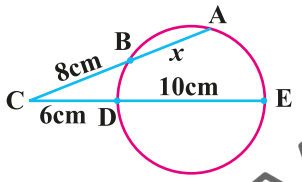
(a)



(b)



(c)



حل:

(a). ڇهٽي ليڪون $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{PR}$ گول جي ٻاهر ٽپڪي P تي ملن ٿيون. تنهنڪري اهي ڏيکهه ۾ لازمي برابر هوندا يعني $m\overline{PQ} = m\overline{PR}$ انهي ڪري $x = 3\text{cm}$

(b). ڇهٽي ليڪ $\overline{AB}$ ڪيبنڊڙ ليڪ $\overrightarrow{DC}$ سان گول جي ٻاهر ٽپڪي B تي ملي ٿي. انهي ڪري اسان وٽ آهي.

$$\left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{DB}\right)\cdot\left(m\overline{BC}\right) \quad \text{يا} \quad x^2 = 12\times 3 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6cm.$$

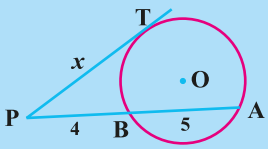
(c). ٻه ڪيبنڊڙ ليڪون $\overrightarrow{AB}$ ۽ $\overrightarrow{ED}$ گول ڪان ٻاهر ٽپڪي C تي هڪٻئي کي ڪٽين ٿيون. انهي ڪري اسان وٽ آهي. $\left(m\overline{AC}\right)\times\left(m\overline{BC}\right) = \left(m\overline{EC}\right)\times\left(m\overline{CD}\right)$ يا $(x+8)\times 8 = (10+6)\times 6 \Rightarrow 8x+64 = 96$

آخر ۾ $8x = 96-64 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = 4\text{cm}$

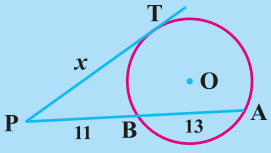
مشق 26.2

1. ثابت ڪري ڏيکاريو ته ڪنهن گول جي زهه جي چيڙن تي ڪيل ڇهٽي ليڪون ان زهه سان برابر ڪنڊون ناهيندیون.
2. ثابت ڪريو ته جيڪڏهن گول جون ٻه ڇهٽي ليڪون پوروچوٽ آهن ته پوءِ ڇهٽ ٽپڪا گول جي هڪ قطر جا چيڙا آهن.
3. ثابت ڪري ڏيکاريو ته جيڪڏهن گول جون ٻه ڇهٽي ليڪون پوروچوٽ نه آهن ته پوءِ ڇهٽ ٽپڪا گول جي هڪ زهه جا چيڙا آهن.
4. هيٺين ۾ نامعلوم x جو ملهه لهو.

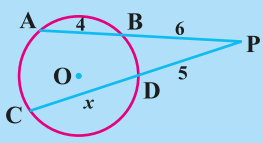
(a)



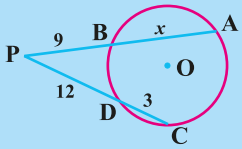
(b)



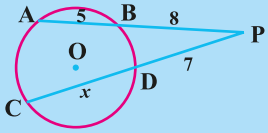
(c)



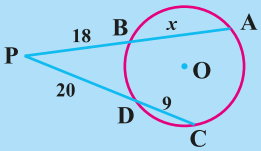
(d)



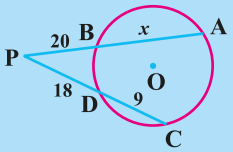
(e)



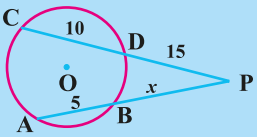
(f)



(g)



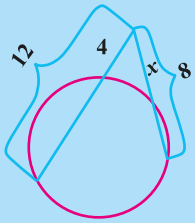
(h)



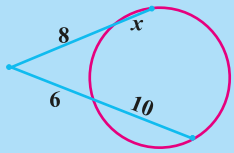
SINDHEDU.COM

5. هيٺين ۾ نامعلوم x جو ملهه لهو.

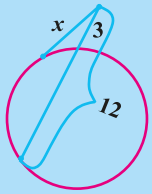
(a)



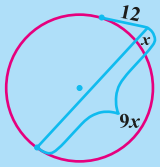
(b)



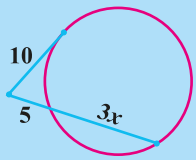
(c)



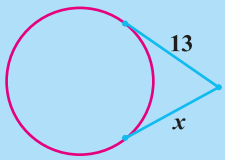
(d)



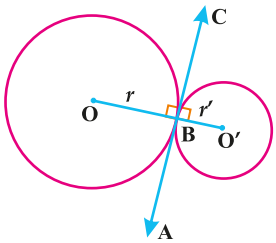
(e)



(f)



سڌيان 26.4 : صورت (A):



جيڪڏهن ٻه گول ٻاهريان ڇُهن ٿا تہ انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت جي برابر آهي.

مليل: ٻہ گول جن جا مرڪز O ۽ O' آهن ۽ انهن جا رداس ترتيبوار r ۽ r' آهن. اهي گول هڪبئي کي ٻاهريان ڇُهن ٿا.

گهربل: $m\overline{OO'} = r + r'$

جوڙجڪ: ٻنهي گولن جي هڪ مشترڪ ڇهڻي ليک $\overleftrightarrow{AC}$ کڻو جيکا ٻئي کي B مان گذري ٿي.

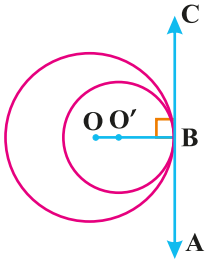
ثابتي:

بيان	دليل
$\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ تنهنڪري $m\angle OBC = 90°$ ... (i)	ڇهڻي ليک رداسي ٽڪر تي عمود آهي.
$\overline{O'B} \perp \overleftrightarrow{AC}$ تنهنڪري $m\angle O'BC = 90°$ ... (ii)	ڇهڻي ليک رداسي ٽڪر تي عمود آهي.
$m\angle OBC + m\angle O'BC = 180°$ ... (iii)	(i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪندي
B، O ۽ O' هم ليک ٻئي آهن ۽ B موجود آهي O ۽ O' جي وچ ۾	(i)، (ii) ۽ (ii) مان
$\therefore \quad m\overline{OB} + m\overline{O'B} = m\overline{OO'}$	وصف مطابق
يا $m\overline{OO'} = r + r'$	$m\overline{OB} = r$ ۽ $m\overline{O'B} = r'$

Q.E.D.

K CHIEDU

سڌيان 26.4 : صورت (B): جيڪڏهن ٻه گول اندريان ڇُهن ٿا تہ انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي فرق جي برابر آهي.



مليل: ٻہ گول جن جا مرڪز O ۽ O' آهن ۽ انهن جا رداس ترتيبوار r ۽ r' آهن.
اهي گول هڪ ٻيئي کي ٻَڪي B تي اندريان ڇُهن ٿا.

گهربل: $m\overline{OO'} = r - r'$

جوڙجڪ: ٻنهي گولن جي هڪ مشترڪ ڇهڻي ليڪ $\overleftrightarrow{AC}$ کڏو جيڪا ٻَڪي B مان گذري ٿي.

ثابتي:

بيان	دليل
(i) $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ تنهنڪري $m\angle OBC = 90°$	ڇهڻي ليڪ رداسي ٽڪر تي عمود آهي.
(ii) $\overline{O'B} \perp \overleftrightarrow{AC}$ تنهنڪري $m\angle O'BC = 90°$	ڇهڻي ليڪ رداسي ٽڪر تي عمود آهي.
(iii) $m\angle OBC = m\angle O'BC = 90°$	(i) ۽ (ii) مان
O، O' ۽ B هم ليڪ ٻَڪا آهن ۽ O' موجود آهي O ۽ B جي وچ ۾	(i)، (ii) ۽ (iii) مان
(iv) $\therefore\ m\overline{OO'} = m\overline{O'B} + m\overline{OB}$ يا $m\overline{OO'} = m\overline{OB} - m\overline{O'B} = r - r'$	وصف مطابق (iv) مان $m\overline{OB} = r$ ، $m\overline{O'B} = r'$.

Q.E.D.

شامل نتيجو 1:
جيڪڏهن ٻن گولن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت (يا فرق) جي برابر آهي تہ پوءِ اهي ٻاهريان (يا اندران) ڇُهن ٿا

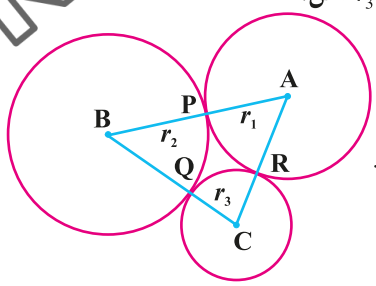
شامل نتيجو 2:
جيڪڏهن ٻن گولن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت يا فرق جي برابر نہ آهي تہ پوءِ گول هڪ ٻيئي کي نٽا ڇُهن.

مثال 1: جيڪڏهن ٽي گول جوڙن ۾ ٻاهريان ڇهن ٿا تہ پوءِ انهن جي مرڪزن کي ملائڻ سان ٺهندڙ ٽڪنڊي جو پيريميٽر، انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت جي بيٽ جي برابر آهي.

مليل: ٽي گول جن جا مرڪز A، B، C ۽ انهن جا رداس ترتيبوار r_1، r_2، r_3 آهن.
اهي گول ٻَڪن P، Q ۽ R تي جوڙن ۾ ٻاهريان ڇهن ٿا.

گهربل: ΔABC جو پيريميٽر $= 2(r_1 + r_2 + r_3)$

جوڙجڪ: ΔABC ناهڻ لاءِ P، Q ۽ R مان ترتيبوار $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AC}$ ناهيو.



KARACHI.COM

ثابتي:

بيان	دليل
$m\overline{AB} = m\overline{AP} + m\overline{BP}$ (i)	A ۽ B جي وچ ۾ P موجود آهي.
$m\overline{BC} = m\overline{BQ} + m\overline{CQ}$ (ii)	B ۽ C جي وچ ۾ Q موجود آهي.
$m\overline{AC} = m\overline{AR} + m\overline{CR}$ (iii)	A ۽ C جي وچ ۾ R موجود آهي.
$m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{AC}$ $= m\overline{AP} + m\overline{BP} + m\overline{BQ} + m\overline{CQ} + m\overline{AR} + m\overline{CR}$	(i)، (ii) ۽ (iii) کي جوڙ ڪندي
$m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{AC}$ $= (m\overline{AP} + m\overline{AR}) + (m\overline{BP} + m\overline{BQ}) + (m\overline{CQ} + m\overline{CR})$	ٻيهر ترتيب ڏيڻ سان
$m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{AC} = (r_1 + r_1) + (r_2 + r_2) + (r_3 + r_3)$ $= 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 = 2(r_1 + r_2 + r_3)$	$m\overline{AP} = m\overline{AR} = r_1$ $m\overline{BP} = m\overline{BQ} = r_2$ $m\overline{CQ} = m\overline{CR} = r_3$
انهي کري $\Delta ABC = 2(r_1 + r_2 + r_3)$ جو پيريميٽر	

Q.E.D.

مثال 2: بن ڪپيندڙ گولن جا رداس 10cm ۽ 8cm آهن جيڪڏهن انهن جي هڪ مشترڪ زهه جي ڊيگهه 6cm آهي. انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو ڳا آهي.

حل: ٻه گول ڪٽو جن جا مرڪز O ۽ O′ آهن ۽ انهن جا رداس ترتيبوار 10cm ۽ 8cm آهن جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. شڪل مان اسان وٽ آهي.

$$m\overline{OA} = 10\text{cm},\quad m\overline{O'A} = 8\text{cm},\quad m\overline{AB} = 6\text{cm},\quad m\overline{OO'} = ?$$

جيئن ته P اڏو اڏ ڪري ٿو $\overline{AB}$ کي، تنهنڪري $m\overline{AP} = \frac{1}{2}m\overline{AB} = \frac{6}{2} = 3\text{cm}$

ΔAPO ۾، فيثاغورث سڌيان جو استعمال ڪندي اسان وٽ آهي.

$$10^2 = 3^2 + \left(m\overline{OP}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad m\overline{OP} = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91}\text{cm}.$$

$\Delta APO'$ ۾ فيثاغورث سڌيان استعمال ڪندي اسان وٽ آهي.

$$8^2 = 3^2 + \left(m\overline{O'P}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad m\overline{O'P} = \sqrt{64 - 9} = \sqrt{55}\text{cm}$$

آخر ۾ $m\overline{OO'} = m\overline{OP} + m\overline{O'P} = \sqrt{91} + \sqrt{55} = 16.955\text{cm}$ (تقريباً)

مثال 3: بن گولن جون ٻه مشترڪ آڏيون ڇهڻي ليڪون ڊيگهه ۾ برابر هونديون آهن. ثابت ڪريو.

ملبل: ٻه گول جن جا مرڪز O ۽ O′ آهن، انهن جون ترتيبوارمشترڪ آڏيون ڇهڻي ليڪون $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ آهن.

گهربل: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$

KADA CHIEDO

جوڙجڪ : ڇهڻي ليکون $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ ٽهڪي P تي ڪپين ٿيون.

ثابتي:

بيان		دليل
$m\overline{AP} = m\overline{CP}$ (i)		گول جي هڪ ٻاهرين ٽهڪي کان ڇهڻي ليکون
$m\overline{BP} = m\overline{DP}$ (ii)		گول جي هڪ ٻاهرين ٽهڪي کان ڇهڻي ليکون
$m\overline{AP} + m\overline{BP} = m\overline{CP} + m\overline{DP}$ (iii)		(i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪندي
$m\overline{AB} = m\overline{CD}$	$\Rightarrow$	شڪل ۽ مساوات (iii) مان

Q.E.D

مثال 4: ٻه گول هڪٻئي کي ٻاهريان ڇهن ٿا ۽ انهن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليک ٽڪر جي ڊيگهه 7cm آهي. جيڪڏهن هڪڙي جو رداس 3cm آهي ته ٻيئي گول جي ايراضي چا ٿيندي؟

حل: جيئن ته ٻه گول ٻاهريان ڇُهن ٿا انهي ڪري

مرڪزن کي ملائيندڙ ليک ٽڪر جي ڊيگهه $= r_1 + r_2$

$$7 = 3 + r_2$$

$$\Rightarrow r_2 = 7 - 3 = 4cm.$$

هاڻي ٻئي گول جي ايراضي $= \pi r_2^2 = \pi \cdot (4)^2 = 16\pi cm^2$

$$= 16\left(\frac{22}{7}\right)cm^2 = 50.286cm^2 \text{ (تقريباً)}$$

مشق 26.3

1. جيڪڏهن ٻن گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليک ٽڪر جي ڊيگهه، انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت جي برابر آهي ته پوءِ ثابت ڪريو ته گول ٻاهريان ڇهن ٿا.
2. هڪ ٽڪندو جنهن جون چوٽيون ٽن گولن جا مرڪز آهن. جيڪڏهن ان ٽڪندي جو پيريميٽر گولن جي قطرن جي جوڙ اُپت جي برابر آهي ته پوءِ ثابت ڪريو ته تي گول، جوڙن ۾ ٻاهريان ڇُهن ٿا.
3. ٻه يڪسان گول جيڪي ٻاهريان ڇهن ٿا جيڪڏهن انهن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليک ٽڪر جي ڊيگهه 12cm آهي ته پوءِ انهن جا رداس ۽ گولن جا گهيرا معلوم ڪريو.
4. جيڪڏهن ڏنل گول جي هڪ ٻاهرين ٽهڪي P کان گول تي ٻه ڇهڻي ليکون $\overline{PA}$ ۽ $\overline{PB}$ آهن جيئن شڪلين ۾ ڏيکاريل آهي ته پوءِ نامعلوم ڪنڊ معلوم ڪريو.



5. ثابت ڪري ڏيکاريو ته جيڪڏهن ٻه گول ٻاهريان ڇهن ٿا ته پوءِ ڇهڻ ٽهڪو ان ليک ٽڪر تي موجود هوندو جيڪو ٻنهي مرڪزن کي ملائي ٿو.

SINDHIEDU.COM

6. جيڪڏهن 2.5cm رداس واري گول جا ٻه زهه هڪبئي کان 3.9cm پري آهن ۽ هڪ زهه جي ڊيگهه 1.4cm آهي. تہ پوءِ بئي زهه جي ڊيگهه لهو.

7. جيڪڏهن تي گول جوڙن ۾ ٻاهريان ڇهن ٽا ۽ بن گولن جا رداس 4cm ۽ 5cm آهن تہ پوءِ ٽيئن گول جو رداس معلوم ڪريو جيڪڏهن انهن جي مرڪزن مان ٺهندڙ ٽڪنڊي تي جو پيريميٽر 35cm آهي.

جائزي واري مشق 26

1. درست جواب تي نشان هڻو.

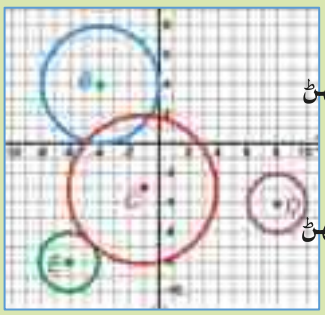
i. جيڪڏهن ڪو ٽپڪو گول کان ٻاهر آهي تہ پوءِ ان ٽپڪي مان اسين_____ ڇهڻي ليڪ يا ليڪون ڪڍي سگهون ٿا.

(a) هڪ (b) ٻہ (c) تي (d) ڪوبہ نہ

ii. ڇهڻي ليڪ ۽ رداسي ٽڪر جي وچ واري ڪنڊ جيڪا ان جي ٻاهرين چيڙي تي نهي تي اها ___ آهي.

(a) 45^0 (b) 60^0 (c) 90^0 (d) 120^0

iii. پر واري شڪل ۾، E ۽ C مرڪز وارا گول _____



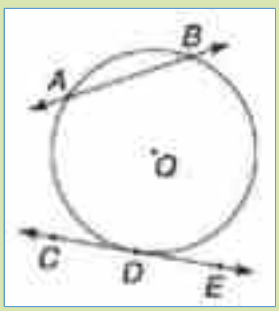
(a) اندريان ڇهن ٽا (b) ٻاهريان ڇهن ٽا
(c) نٽا ڇهن (d) يڪسان آهن

iv. پر واري شڪل ۾ ، B ۽ C مرڪزن وارن گولن جو / جا_____ ڇهڻ ٽپڪو/ ٽپڪا آهن

(a) هڪڙو بہ نہ (b) هڪ
(c) ٻہ (d) هنن مان ڪوبہ نہ

v. پر واري شڪل ۾، E ۽ C مرڪزن وارن گولن جو/ جا _____ ڇهڻ ٽپڪو/ ٽپڪا آهن.

(a) هڪڙو بہ نہ (b) هڪ
(c) ٻہ (d) هنن مان ڪوبہ نہ



vi. پر واري شڪل ۾ $\overleftrightarrow{AB}$ _____ آهي.

(a) ڇهڻي ليڪ (b) ڪپندڙ ليڪ
(c) زهه (d) ڪوبہ نہ

vii. پر واري شڪل ۾، $\overleftrightarrow{CDE}$ _____ آهي.

(a) ڇهڻي ليڪ (b) ڪپندڙ ليڪ
(c) زهه (d) ڪوبہ نہ

viii. پر واري شڪل ۾_____ ڇهڻ ٽپڪو آهي

(a) A (b) B (c) C (d) D

ix. گول جي ڪنهن قطر جي چيڙن تي ڪيل ڇهڻي ليڪون هڪبئي جي_____ آهن.

(a) پوروچوٽ (b) عمود (c) ڪپندڙ (d) (c)۽(b) بئي

x. بن گولن جي مشترڪ ڇهڻي ليڪن جو وڌ ۾ وڌ تعداد_____ آهي جيڪڏهن اُهي اندران ڇهن ٽيون.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

xi. بن گولن جي مشترڪ ڇُهڻي ليڪن جو وڌ ۾ وڌ تعداد_____ آهي جيڪڏهن اُهي ٻاهريان ڇُهن ٽيون.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

خلاصو

- هڪ سڌي ليڪ جيڪا گول کي رڳو هڪ ئي ٽپڪي تي ڇهي ان کي ڇهڻي ليڪ ڇئبو آهي ۽ مشترڪ ٽپڪي کي ڇهڻ ٽپڪو يا ميلاپ وارو ٽپڪو ڇئبو آهي.
- هڪ سڌي ليڪ جيڪا گول کي ٻن ٽپڪن تي ڪٽي ان کي ڪپيندڙ ليڪ ڇئبو آهي هڪ گول ۽ ڪپيندڙ ليڪ جي وچ ۾ ميلاپ جا ٻہ ٽپڪا هوندا آهن.
- ڇهڻي ليڪ ٽڪر هڪ اهڙو ليڪ ٽڪر آهي. جيڪو ڇهڻ ٽپڪي کان ڇهڻي ليڪ جي ڪنهن ٻيئي ٽپڪي تائين هوندو آهي.
- اهو ٽڪندو جيڪو گول جي مرڪز، ڇهڻ ٽپڪي ۽ ڇهڻي ليڪ جي ڪي ٻيئي ٽپڪي کي ملائڻ سان ٺهي تہ اهو هميشہ گوني ڪنڊ ٽڪندو هوندو آهي.
- جڏهن ٻہ گول اندريان يا ٻاهريان ڇهن تہ انهن جي وچ ۾ هڪ مشترڪ ڇهڻي ليڪ ۽هڪ مشترڪ ميلاپ وارو ٽپڪو هوندو آهي.
- ٻہ گول جيڪي هڪ ٻيئي کي نٽا ڇهن انهن کي ٻہ مشترڪ ڇهڻي ليڪون هونديون آهن: ٻاهريون (سڌي طرح) ۽ اندريون (آڏيون) مشترڪ ڇهڻي ليڪون.
- ٻن گولن جي سڌي طرح لاڳاپيل ڇهڻي ليڪن جون ڏيگهون برابر هونديون آهن.
- ٻن گولن جي آڏيون لاڳاپيل ڇهڻي ليڪن جون ڏيگهون برابر هونديون آهن.
- گول جي ڪنهن ٽپڪي تي صرف هڪ ئي ڇهڻي ليڪ ڪڍي سگهجي ٿي.
- جيڪڏهن ڪا ليڪ گول جي رداسي ٽڪر جي ٻاهرين ڇيڙي تي عمود آهي تہ پوءِ اها ان ٽپڪي تي ڇهڻي ليڪ هوندي.
- گول جي ڇهڻي ليڪ ۽ مرڪز کي ڇهڻ ٽپڪي سان ملائيندڙ ليڪ ٽڪر هڪٻئي تي عمود هوندا آهن.
- گول جي ڪنهن ٻاهرين ٽپڪي کان گول تي ڪڍيل ٻہ ڇهڻي ليڪون ڏيگهہ ۾ برابر هونديون آهن.
- جيڪڏهن ٻہ گول ، ٻاهريان ڇهن ٿا. تہ پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت جي برابر آهي.
- جيڪڏهن ٻہ گول اندريان ڇهن ٿا تہ پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي فرق جي برابر آهي.

زهه ۽ قوس
CHORDS AND ARCS

يونٽ 27

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

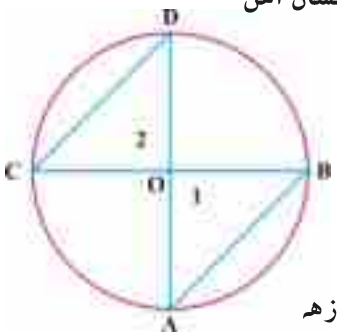
هي يونٽ پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- هيٺين سڌيانن کي انهن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجهن ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪن.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻہ قوس يڪسان آهن تہ پوءِ مطابقت رکندڙ زهہ برابر هوندا.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻہ زهہ برابر آهن تہ پوءِ انهن جا مطابقت رکندڙ قوس (وڏا قوس، ننڍا قوس، اڌ گول) يڪسان هوندا.
- هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا برابر زهہ مرڪز (يا مطابقت رکندڙ مرڪزن) تي برابر ڪندون ناهين ٿا.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا ٻن يڪسان گولن) جا زهہ مرڪز (يا مطابقت رکندڙ مرڪزن) تي برابر ڪندون ناهي / ناهين ٿا تہ پوءِ زهہ برابر هوندا.



تعارف: هن يونٽ ۾ اسين گول جي زهه ۽ قوسن سان لاڳاپيل سڌيان پڙهنداسين.

سڌيان 27. 1 : جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻه قوس يڪسان آهن تہ پوءِ مطابقت رکندڙ زهه برابر هوندا.



اسين سڌيان کي

i. هڪ گول لاءِ ثابت ڪنداسين.

ii. ٻن يڪسان گولن لاءِ ثابت ڪنداسين.

i. هڪ گول لاءِ

مليل: مرڪز O وارو گول جنهن ۾ $\overset{\frown}{AB}$ ۽ $\overset{\frown}{CD}$ يڪسان قوس آهن يعني جڏهن $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$. مليل يڪسان قوسن جا مطابقت رکندڙ زهه $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ آهن.

گهربل: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

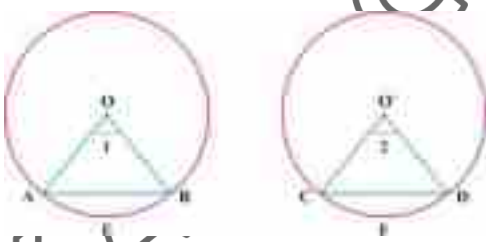
جوڙجڪ: C, B, A ۽ D سان ٽيڪي O کي ملايو.

ثابتي:

بيان		دليل
$\Delta OAB \leftrightarrow OCD$	۾	
$\overline{OA} \cong \overline{OC}$		ساڳي گول جا رداسي تڪر
$\overline{OB} \cong \overline{OD}$		ساڳي گول جا رداسي تڪر
$m\angle 1 = m\angle 2$		ٻن يڪسان قوسن جون مرڪزي ڪنڊون
$\Delta OAB \cong \Delta OCD$	$\therefore$	پ- ڪ- پ موضوع
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$		يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا

Q.E.D

ii. ٻن يڪسان گولن لاءِ



مليل: ٻه يڪسان گول جن جا مرڪز ترتيبوار O ۽ O' آهن. انهن گولن جا يڪسان قوس $\overset{\frown}{AB}$ ۽ $\overset{\frown}{CD}$ آهن جڏهن تہ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ مطابقت رکندڙ زهه آهن.

گهربل: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

جوڙجڪ: O کي A ۽ B سان ملايو. جڏهن تہ O' کي C ۽ D سان ملايو.

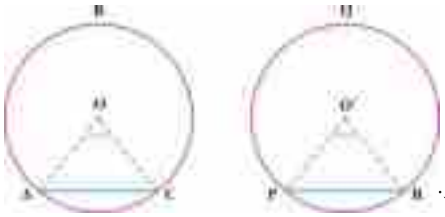
ثابتي:

بيان		دليل
$\Delta OAB \leftrightarrow \Delta O'CD$	۾	
$\overline{OA} \cong \overline{O'C}$		يڪسان گولن جا رداسي تڪر
$\overline{OB} \cong \overline{O'D}$		يڪسان گولن جا رداسي تڪر
$m\angle 1 = m\angle 2$		ٻن يڪسان قوسن جون مرڪزي ڪنڊون
$\Delta OAB \cong \Delta O'CD$		پ. ڪ. پ موضوع
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$		يڪسان ٽڪنڊن جا مطابقت رکندڙ پاسا

Q.E.D

سڌيان 27.2 (سڌيان 27.1 جو عڪس)

جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻه زهه برابر آهن تہ پوءِ انهن جا مطابقت رکندڙ قوس (وڏا قوس، ننڍا قوس، اڌ گول) يڪسان هوندا.



مليل: ٻہ يڪسان گول جن جا مرڪز ترتيبوار O ۽ O′ آهن ۽ انهن جا ٻہ زهه $\overline{PR}$ ۽ $\overline{AC}$ يڪسان آهن يعني تہ $\overline{AC} \cong \overline{PR}$

گهربل: $\widehat{AC} \cong \widehat{PR}$

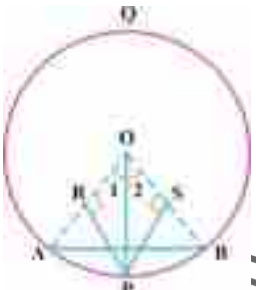
جوڙجڪ: O کي A ۽ C سان ملايو. O′ کي P ۽ R سان ملايو.

ثابتي:

بيان	دليل
$\Delta AOC \leftrightarrow \Delta PO'R$ ٻہ	
$\overline{OA} \cong \overline{O'P}$	يڪسان گولن جا رداسي ٽڪر
$\overline{OC} \cong \overline{O'R}$	يڪسان گولن جا رداسي ٽڪر
$\overline{AC} \cong \overline{PR}$	مليل
$\Delta OAC \cong \Delta PO'R$	پ. پ. پ. ≅ پ. پ. پ.
$m\angle AOC = m\angle PO'R$ (i)	يڪسان ٽڪندڙ جون مطابقت رکندڙ ڪندڙ
انهي ڪري	
$\widehat{AC} \cong \widehat{PR}$	مساوات (i) مان

Q.E.D

مثال1: هڪ گول جي گهيري تي هڪ ٽپڪو P رداسي ٽڪرن $\overline{OA}$ ۽ $\overline{OB}$ کان هڪجيتري فاصلي تي آهي. ثابت ڪريو تہ $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$



حل:

مليل: $\overline{AB}$ زهه آهي ان گول جو جنهن جو مرڪز O آهي، گول جي گهيري جو هڪ ٽپڪو P رداسي ٽڪرن $\overline{OA}$ ۽ $\overline{OB}$ کان هڪجيتري فاصلي تي آهي.

يعني تہ $m\overline{PR} = m\overline{PS}$

گهربل: $m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$

جوڙجڪ: O کي P سان ملايو شڪل ۾ $m\angle 1$ ۽ $m\angle 2$ کي ظاهر ڪريو.

ثابتي:

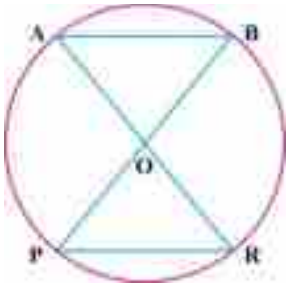
بيان			دليل
		گوني ڪنڊ ٽڪندڙ	
$\Delta OPR \leftrightarrow \Delta OPS$ ٻہ		$m\overline{OP} = m\overline{OP}$	مشترڪ پاسو
		$m\overline{PR} = m\overline{PS}$	مليل
	$\therefore$	$\Delta OPR \cong \Delta OPS$	هـ. پ ≅ هـ. پ
انهي ڪري	(i)	$m\angle 1 = m\angle 2$	يڪسان ٽڪندڙ جون مطابقت رکندڙ ڪندڙ
	$\Rightarrow$	$\widehat{AP} \cong \widehat{BP}$	(i)مان
اهڙي طرح		$m\widehat{AP} = m\widehat{BP}$	يڪسان قوسن جي وصف مطابق

Q.E.D

KASACHIS.COM

سڌيان 27.3: هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا برابر زهه مرڪز (يا مطابقت رکندڙ مرڪزن) تي برابر ڪنڈون ناهين ٿا. اسين اهو سڌيان ثابت ڪنداسين:

i) هڪ گول لاءِ ii) ٻن يڪسان گولن لاءِ



i) هڪ گول لاءِ

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي ان جا ٻه زهه $\overline{AB}$ ۽ $\overline{PR}$ يڪسان آهن.

يعني ته $\overline{AB} \cong \overline{PR}$

گهربل: $m\angle AOB = m\angle POR$

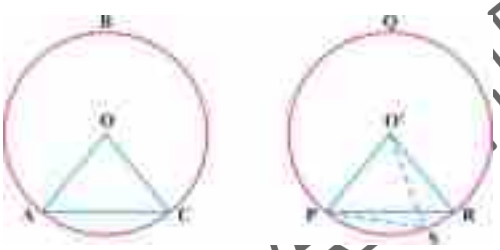
جوڙجڪ: O کي A ۽ B سان ملايو ۽ O کي P ۽ R سان پڻ ملايو.

ثابتي:

بيان	دليل
$\Delta AOB \leftrightarrow \Delta POR$ ۾	مليل
$\overline{AB} \cong \overline{PR}$ ... (i)	ساڳي گول جا رداسي ٿڪر
$\overline{OB} \cong \overline{OR}$ ... (ii)	ساڳي گول جا رداسي ٿڪر
$\overline{OA} \cong \overline{OP}$ ... (iii) ۽	پ. پ. پ. ≅ پ. پ. پ. پ.
$\Delta AOB \cong \Delta POR$	يڪسان ٽڪنڊن جون مطابق رکندڙ ڪنڈون
$m\angle AOB = m\angle POB$	

Q.E.D

ii) ٻن يڪسان گولن لاءِ



مليل: ٻه يڪسان گول جن جا مرڪز ترتيبوار O ۽ O′ آهن ۽ $m\overline{AC} = m\overline{PR}$ جڏهن ته $\overline{AC}$ ۽ $\overline{PR}$ گولن جا زهه آهن.

گهربل: $m\angle AOC = m\angle PO'R$

جوڙجڪ: قوس PR تي هڪ ٽڪو S ڪٽو ۽ S کي P ۽ O′

سان ملايو اهڙي طرح جو $\angle AOC \cong \angle PO'S$

ثابتي:

بيان		دليل
فرض ڪريو ته $m\angle AOC \neq m\angle PO'R$		
پر $m\angle AOC = m\angle PO'S$		جوڙجڪ
$\therefore \quad \widehat{AC} \cong \widehat{PS}$	(i)	برابر مرڪزي ڪنڈن جا قوس
$\therefore \quad m\overline{AC} = m\overline{PS}$	(ii)	سڌيان (i) مان
پر $m\overline{AC} = m\overline{PR}$	(iii)	مليل
$\therefore \quad m\overline{PR} = m\overline{PS}$		(ii) ۽ (iii) جو استعمال ڪندي
اهو تڏهن ئي ممڪن ٿيندو جڏهن R نهڪندڙ هجي S تي		چاڪاڻ ته P مشترڪ ٽڪو آهي
$\Rightarrow \quad m\angle AOC = m\angle POR$		اسانجو مفروضو غلط آهي.

Q.E.D

KRAMEEDOM

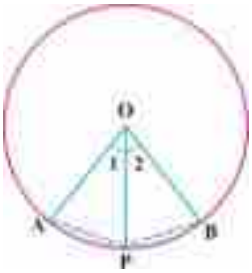
شامل نتيجو 1:

يڪسان گولن ۾ يا ساڳيئي گول ۾ جيڪڏهن مرڪزي ڪنڊون برابر آهن تہ پوءِ مطابقت رکندڙ سيڪٽر برابر هوندا

شامل نتيجو 2:

يڪسان گولن يا ساڳئي گول ۾، جيڪڏهن به زهہ برابر نہ آهن تہ پوءِ ان سان مطابقت رکندڙ قوس غير مساوي مرڪزي ڪنڊون ناهيندا.

مثال 1:



ثابت ڪريو تہ گول جي مرڪزي ڪنڊ جو اندريون اڌ ڪنڊڙ مطابقت رکندڙ قوس کي اڏو اڌ ڪنڊو.

مليل:

هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي. مرڪزي ڪنڊ AOB جو اندريون اڌ ڪنڊڙ $\overline{OP}$ آهي.

يعني تہ $\angle 1 \cong \angle 2$

گهربل:

$\overset{\frown}{AP} \cong \overset{\frown}{PB}$

جوڙجڪ:

$\overline{AP}$ ۽ $\overline{BP}$ ڪيو.

ثابتي:

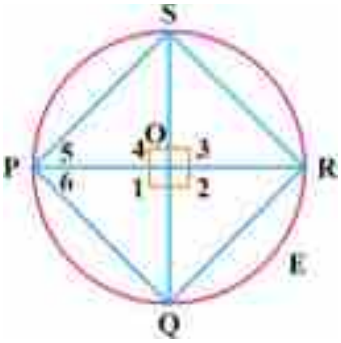
بيان		دليل
$\Delta OAP \leftrightarrow \Delta OBP$	۾	ساڳي گول جا رداس
$m\overline{OA} = m\overline{OB}$		مليل
$m\angle 1 = m\angle 2$		مشترڪ پاسو
$m\overline{OP} = m\overline{OP}$	۽	پ. ڪ. پ. مفروضو
$\Delta OAP \cong \Delta OBP$	$\therefore$	يڪسان ٽڪنڊن جا
$\overline{AP} \cong \overline{BP}$	انهي ڪري	مطابقت رکندڙ پاسا
$\overset{\frown}{AP} \cong \overset{\frown}{BP}$	$\Rightarrow$	برابر زهہ جا مطابقت رکندڙ قوس

Q.E.D

LAHORECHIEDU.COM

مثال 2:

ثابت ڪريو تہ ڪنهن گول ۾، جيڪڏهن هڪ قطر هڪبئي تي عمود هجن تہ پوءِ انهن جي چيڙن کي ملائيندڙ ليکون چورس ٺاهيندیون.



مليل: $\overline{PR}$ ۽ $\overline{QS}$ ان گول جا عمودي قطر آهن جنهن جو مرڪز O آهي.

انهي ڪري PQRS هڪ چوڪنڊو آهي.

گهربل: PQRS هڪ چورس آهي.

جوڙجڪ: ڪنڊن کي نالا ڏيو جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي: $\angle 1, \angle 2, \angle 3$، $\angle 4, \angle 5$ ۽ $\angle 6$.

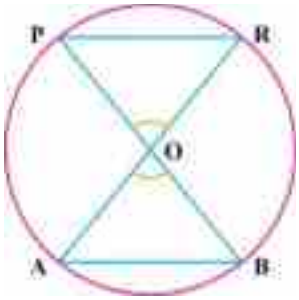
ثابتي:

بيان	دليل
$\overline{PR}$ ۽ $\overline{QS}$، مرڪز O واري گول جا عمودي قطر آهن.	مليل
$m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 4 = 90°$	قطر هڪبئي تي عمود آهن
$m\overset{\frown}{PQ} = m\overset{\frown}{QR} = m\overset{\frown}{RS} = m\overset{\frown}{SP}$ ... (i)	برابر مرڪزي ڪنڊن جا قوس
$m\overline{PQ} = m\overline{QR} = m\overline{RS} = m\overline{SP}$ ... (ii)	يڪسان قوسن جا مطابقت رکندڙ زهہ
گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ΔPOS ۾	
$m\overline{PO} = m\overline{OS}$ ... (iii)	ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
ΔPOS ۾ پيور پاسو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي	(iii) مان
$m\angle 5 = 45°$ ... (iv)	ΔPOS ۾ پيور پاسو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي.
ساڳي ريت	
ΔPOQ ۾ پيور پاسو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي.	
$m\angle 6 = 45°$ ... (v)	مٿين طريقي سان
هاڻي	
$m\angle P = m\angle 5 + m\angle 6$	ڪنڊن جي جوڙ وارو موضوع
$m\angle P = 45° + 45°$	(iv) ۽ (v) مان
$m\angle P = 90°$ ... (vi) يا	
ساڳي ريت	
$m\angle Q = m\angle R = m\angle S = 90°$ ... (vii)	مٿين طريقي سان
PQRS هڪ چورس آهي	(ii)، (vi) ۽ (vii) جو استعمال ڪندي

Q.E.D

سڌيان 27.4

جيڪڏهن هڪ گول (يا ٻن يڪسان گولن) جا زهه مرڪز (يا مطابقت رکندڙ مرڪزن) تي برابر ڪنڈون ناهي/ ناهين ٿا تہ پو زهه برابر هوندا.



(a) هڪ گول لاءِ

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O آهي. $\overline{PR}$ ۽ $\overline{AB}$ ان جا ٻہ زهه آهن.

ٻئي زهه برابر مرڪزي ڪنڈون POR ۽ AOB ناهين ٿا

يعني تہ $\angle POR \cong \angle AOB$

گهربل: $\overline{AB} \cong \overline{PR}$

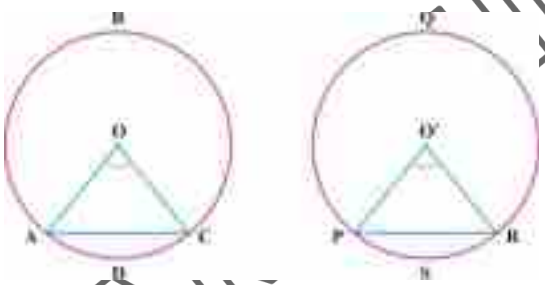
جوڙجڪ: O کي P ۽ R سان ملايو ۽ O کي A ۽ B سان پڻ ملايو.

ثابتي:

بيان		دليل
$\Delta PQR \leftrightarrow \Delta AOB$		ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
$\overline{OR} \cong \overline{OB}$	(i)	ساڳي گول جا رداسي ٽڪر
$\overline{OP} \cong \overline{OA}$	(ii)	مليل
$\angle POR \cong \angle AOB$	(iii) ۽	پ. ڪ. پ. مفروضو
$\Delta PQR \cong \Delta AOB$		
$\overline{AB} \cong \overline{PR}$		يڪسان ٽڪنڈن جا ٻہ مطابقت رکندڙ پاسا

Q.E.D

(b) ٻہ يڪسان گولن لاءِ



مليل: ٻہ يڪسان گول جن جا مرڪز O ۽ O′ آهن. $\overline{AC}$ ۽ $\overline{PR}$ ٻہ زهه آهن جيڪي مرڪزن تي برابر ڪنڈون ناهين ٿا. يعني تہ $\angle AOC \cong \angle PO'R$

گهربل: $m\overline{AC} = m\overline{PR}$

ثابتي:

بيان		دليل
$\Delta OAC \leftrightarrow \Delta O'PR$	۾	
$\overline{OA} \cong \overline{O'P}$		يڪسان گولن جا رداسي ٽڪر
$\angle AOC \cong \angle PO'R$		مليل
$\overline{OC} \cong \overline{O'R}$		يڪسان گولن جا رداسي ٽڪر
$\therefore \Delta OAC \cong \Delta O'PR$		پ. ڪ. پ. مفروضو
$m\overline{AC} = m\overline{PR}$	انهي ڪري	يڪسان ٽڪنڈن جا ٻہ مطابقت رکندڙ پاسا

Q.E.D

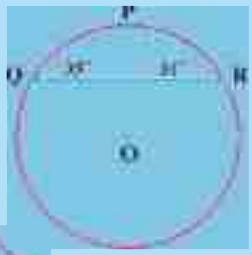
KAMJEE.COM

مشق 27.1

1. ثابت ڪريو تہ، هڪ گول ۾ بن پورچوٽ ۽ برابر زهن جا قوس برابر هوندا.
2. ثابت ڪريو تہ بن يڪسان گولن ۾ بن برابر مرڪزي ڪنڊن جا قوس برابر هوندا.
3. پر واري شڪل ۾، O گول جو مرڪز آهي. x ۽ y جو ملهه لهو.



4. پر واري شڪل ۾ $m\angle PQR = 35°$ ۽ $m\angle PRQ = 31°$ $m\angle QPR$ ۽ $m\angle OQR$ جو ملهه لهو.



5. پر واري شڪل ۾ O گول جو مرڪز آهي. $m\angle AOB = 120°$ ۽ $m\angle BCD = 85°$. $m\angle OAD$ جو ملهه لهو.



6. پر واري شڪل ۾، $\overline{AB}$ گول جو قطر آهي ۽ $m\angle DAB = 30°$ $m\angle ACD$ لهو.



جائزي واري مشق 27

1. دُرست جواب تي نشان هڻو.

i. جيڪڏهن هڪ زهہ $60°$ جي مرڪزي ڪنڊ ناهي ٿو تہ پوءِ زهہ ۽ رداسي ٽڪر_____آهن.
(a) پورو چوٽ (b) عمود (c) يڪسان (d) غير يڪسان

ii. جيڪڏهن هڪ قوس $45°$ جي مرڪزي ڪنڊ ناهي ٿو تہ پوءِ مطابقت رکندڙ زهہ_____ جي ڪنڊ مرڪز تي ناهيندو.
(a) $15°$ (b) $30°$ (c) $45°$ (d) $60°$

iii. جيڪڏهن گول جا ٻہ زهہ، ٻہ يڪسان مرڪزي ڪنڊون ناهين ٿا تہ اهي _____ آهن.
(a) غير يڪسان (b) عمود (c) يڪسان (d) ڪوبہ نہ

iv. گول جي يڪسان مرڪزي ڪنڊن جي سامهون وارا قوس_____ آهن.

(a) پورچوٽ (b) يڪسان (c) عمود (d) ڪوبہ نہ

v. هڪ 6cm ڊگهو زهہ 60° جي مرڪزي ڪنڊ ٺاهي ٿو. ان گول جو رداسي ٽڪر_____ڊگهو آهي.

(a) 4cm (b) 6cm (c) 5cm (d) 8cm

vi. ڪنهن گول جو هڪ زهہ جيڪو180°جي مرڪزي ڪنڊ ٺاهي ٿو.ان زهہ جي ڊيگهہ هميشہ___ هوندي.

(a) رداسي ٽڪر جي برابر
(b) رداسي ٽڪر کان ننڍي
(c) رداسي ٽڪر کان ڀيٽي
(d) رداسي ٽڪر جو اڌ

viii. جيڪڏهن ڪنهن گول جي زهہ ۽ رداسي ٽڪر جون ڊيگهون برابر آهن تہ پوءِ زهہ جي ٺاهيل مرڪزي ڪنڊ _____ ٿيندي.

(a) 60° (b) 75° (c) 90° (d) 45°

ix. گول جي ٻن قوسن مان جيڪڏهن هڪ قوس 30° جي مرڪزي ڪنڊ ٺاهي ٿو تہ پوءِ ٻيو قوس_____ مرڪزي ڪنڊ ٺاهيندو.

(a) 60° (b) 90° (c) 75° (d) 30°

x. قطر گول کي_____ حصن ۾ ورهائي ٿو.

(a) ٻہ (b) ٽي (c) چار (d) اهي سڀ ئي

خلاصو

- گول يڪسان هوندا جيڪڏهن انهن جا رداس برابر هجن.
- گول جا برابر زهہ مرڪز تي برابر مرڪزي ڪنڊون ٺاهيندا.
- گول جي ڪن ٻن ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي گول جو زهہ چئبو آهي.
- گول ايراضي جو اهو حصو جيڪو هڪ زهہ ۽ هڪ قوس سان گهيريل هجي ان کي گول جو سيگمينٽ چئبو آهي.
- هڪ گول رستي تي حرڪت ڪندڙ ٽپڪي سان ڪيئل ڏنگي ليڪ کي گول جي گهيرو چئبو آهي.
- گول جي گهيري جي ڪنهن حصي کي گول جو قوس چئبو آهي.
- گول جي مرڪز مان ڪيئل ليڪ جيڪا ڪنهن زهہ کي اڌو اڌ ڪري تہ اها ليڪ ان زهہ تي عمود هوندي آهي.
- ڪنهن گول جي مرڪز مان ڪيئل ليڪ جيڪا هڪ زهہ تي عمود آهي تہ اها ان زهہ کي اڌو اڌ ڪندي آهي.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻہ قوس برابر هجن تہ پوءِ انهن سان مطابقت رکندڙ زهہ برابر هوندا.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا ٻہ زهہ برابر آهن تہ پوءِ انهن سان مطابقت رکندڙ قوس وڏا قوس، ننڍا قوس، اڌ گول) يڪسان هوندا.
- هڪ گول (يا يڪسان گولن) جا برابر زهہ مرڪز (يا واسطيدار مرڪزن) تي برابر ڪنڊون ٺاهيندا.
- جيڪڏهن هڪ گول (يا ٻن گولن) جا ٻہ زهہ مرڪز (يا واسطيدار مرڪزن) تي برابر ڪنڊون ٺاهين ٿا تہ پوءِ اهي زهہ برابر هوندا.

يونٽ 28

گول جي سيگمينٽ ۾ ڪنڊون

ANGLES IN A SEGMENT A CIRCLE

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هي يونٽ پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- هينيان سڌيان انهن جي شامل نتيجن سان گڏ سمجهڻ ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪندا.
- هڪ گول جي ننڍي قوس جي مرڪزي ڪنڊ جي ماپ مطابقت رکندڙ وڏي قوس جي ان تي نهيل ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.
- گول جي سيگمينٽ ۾ ڪي به ٻہ ڪنڊون برابر هونديون آهن.
  - اڌ گول ۾ ڪنڊ هميشہ گوني ڪنڊ هوندي آهي.
  - اڌ گول کان وڏي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ هميشہ گوني ڪنڊ کان ننڍي هوندي آهي.
  - اڌ گول کان ننڍي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ هميشہ گوني ڪنڊ کان وڏي هوندي آهي.
  - ڪنهن به گهيريل چوڪنڊي جون سامهون واريون ڪنڊون سپليمينٽري آهن.

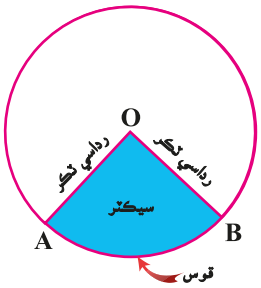


28.1 گول جي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ (Angle in a segment of a circle):

اسين اڳيئي گول سان لاڳاپيل ڪيتريون ئي اصطلاحون پڙهي چڪا آهيون جهڙوڪ زهه، ننڍو قوس ۽ وڏو قوس وغيره
هاڻي، گول جي سيگمينٽ وارين ڪنڊن سان لاڳاپيل سڌيان سمجهڻ لاءِ، اسان کي ڪجهه وڌيڪ اصطلاحن کي بيان ڪرڻو پوندو.

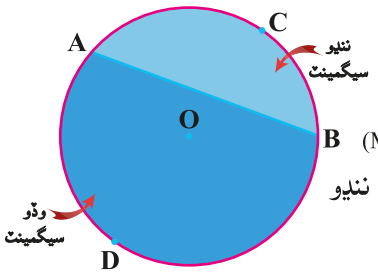
وصفون :

i. گول جو سيڪٽر (Sector of a circle):



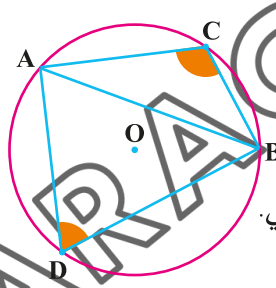
گول جو سيڪٽر، گول ايراضي جو اهو حصو آهي جيڪو ٻن رداسي ٽڪرن ۽ ان قوس سان گهيريل هوندو آهي. جيڪو اهي ڪپين ٿا. ڏنل شڪل ۾، مرڪز O واري گول جو سيڪٽر AOB آهي.

ii. گول جو سيگمينٽ (Segment of a circle):



گول جو سيگمينٽ گول ايراضي جو اهو حصو آهي. جيڪو هڪ قوس ۽ ان جي زهه سان گهيريل هوندو آهي. هڪ سيگمينٽ کي وڏو سيگمينٽ (Major segment) ڪوٺبو جيڪڏهن ان جو قوس وڏو قوس هجي ساڳي ريت هڪ سيگمينٽ کي ننڍو سيگمينٽ (Minor Segment) ڪوٺبو جيڪڏهن ان جو قوس ننڍو قوس هجي. پر واري شڪل ۾ ACB ننڍو سيگمينٽ ۽ ADB وڏو سيگمينٽ آهي.

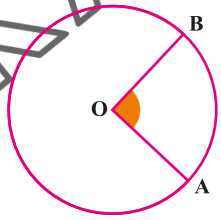
iii. گول جي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ (Angle in a segment of circle):



گول جي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ اها ڪنڊ هوندي آهي جيڪا گول جي سيگمينٽ جو زهه، سيگمينٽ جي قوس جي چيڙن ڪانسواءِ ان جي ڪنهن ٻيئي ٽپڪي تي ناهيندو آهي. پر واري شڪل ۾ ننڍي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ $\angle ACB$ آهي. جڏهن ته $\angle ADB$ هڪ اها ڪنڊ آهي. جيڪا وڏي سيگمينٽ ADB ۾ آهي.

نوٽ: گول جي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ کي سيگمينٽ جي قوس جي گهيريل ڪنڊ يا سولائي خاطر قوس سان ٺهيل ڪنڊ به چئبو آهي.

iv. هڪ قوس جي مرڪزي ڪنڊ (Central angle of an arc):



ڪنهن گول جي هڪ قوس جي مرڪزي ڪنڊ اها ڪنڊ هوندي آهي جيڪا گول جي مرڪز تي اهو قوس ناهيندو آهي. شڪل ۾، قوس AB جي مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ آهي.

➢ شامل نتيجن سان گڏ هينئين سڌيانن کي سمجهڻ ۽ گڏيل مسئلن کي حل ڪرڻ لاءِ انهن کي استعمال ڪرڻ:

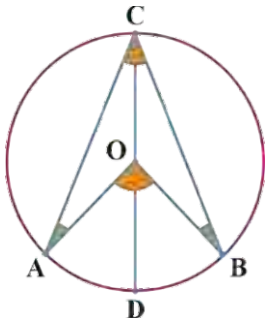
KARACHIEDU.COM

سڌيان 28.1:

هڪ گول جي ننڍي قوس جي مرڪزي ڪنڊ جي ماپ مطابقت رکندڙ وڏي قوس جي ان تي ٺهيل ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.

يا

ننڍي قوس جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ وڏي قوس جي گهيريل ڪنڊ کان ماپ ۾ ٻيڻي آهي.



مليل: مرڪز O واري گول ۾ ننڍي قوس AB جي مرڪزي ڪنڊ آهي. مطابقت رکندڙ وڏي قوس ACB جي گهيريل ڪنڊ $\angle ACB$ آهي.

گهربل: $m\angle AOB = 2m\angle ACB$

جوڙجڪ: $\overline{CO}$ کي ٻڌو ۽ ان کي گول جي ٻيڪي D تائين وڌايو.

ثابتي:

بيان	دليل
$\Delta AOC,\ \overline{OA} \cong \overline{OC}$ ۾	ساڳي گول جا رداسي ٿڪر
$m\angle OAC = m\angle OCA$ ...(i)	يڪسان پاسن جون سامهون واريون ڪنڊون.
هاڻي	
$m\angle AOD = m\angle OAC + m\angle OCA$	ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ: اندرين ڪنڊن جي جوڙ اُپٽ آهي.
$= 2m\angle OCA$ ...(ii)	مساوات (i) جو استعمال ڪندي
ساڳي ريت	
$m\angle BOD = 2m\angle OCB$ ...(iii)	ساڳي طريقي سان
هاڻي	
$m\angle AOB = m\angle AOD + m\angle BOD$	ڪنڊن جي جوڙ وارو موضوع
$= 2m\angle OCA + 2\,m\angle OCB$	(ii) ۽ (iii) جو استعمال ڪندي
$= 2(m\angle OCA + m\angle OCB)$	عام جزو 2 ٻاهر ڪڍيندي.
$m\angle AOB = 2\,m\angle ACB$	ڪنڊن جي جوڙ وارو موضوع

Q.E.D

شامل نتيجو 1:

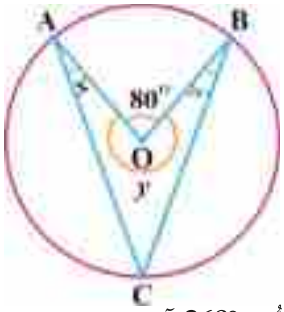
وڏي قوس جي مرڪزي ڪنڊ جي ماپ مطابقت رکندڙ ننڍي قوس جي گهيريل ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.

شامل نتيجو 2:

اڌ گول جي مرڪزي ڪنڊ جي ماپ مطابقت رکندڙ اڌ گول جي گهيرينڊڙ ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.

K...COM

مثال 1: پر واري شڪل ۾، ٽبڪو O گول جو مرڪز آهي. x جي قيمت لهو جيڪڏهن $m\angle AOB = 80°$ ۽ $m\angle OBC = 25°$



حل: شڪل ۾ $\overset{\frown}{AB}$ جي مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ آهي ۽ مطابقت رکندڙ $\overset{\frown}{ACB}$ جي گهيريل ڪنڊ $\angle ACB$ آهي.

$\because$ $\overset{\frown}{AB}$ جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ $\overset{\frown}{ACB}$ جي گهيريل ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.

$\therefore$ $m\angle AOB = 2m\angle ACB$

يعني ته $80° = 2m\angle ACB$

$m\angle ACB = 40°$

جيئن ته اسان کي خبر آهي ته هڪ ٽبڪي جي چوڌاري سيني ڪنڊن جي جوڙ اُپٽ $360°$ آهي.

تنهنڪري

$80° + y = 360°$

$\Rightarrow \quad y = 280°$

چوڪنڊي AOBC ۾

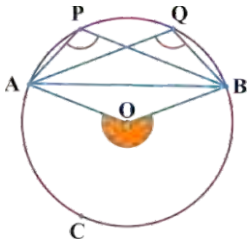
$x + y + 25° + m\angle ACB = 360°$

$\Rightarrow \quad x + 280° + 25° + 40° = 360°$

$\Rightarrow \quad x + 345° = 360°$

$x = 15°$

سڌيان 28.2: گول جي سيگمينٽ ۾ ڪي به ٻه ڪنڊون برابر هونديون آهن.



مليل: مرڪز O واري گول جي ساڳيئي سيگمينٽ APQB ۾ $\angle APB$ ۽ $\angle AQB$ ٻه ڪنڊون آهن.

گهربل: $m\angle APB = m\angle AQB$

جوڙجڪ: O کي A ۽ B سان ملايو ته جيئن $\overset{\frown}{ACB}$ جي مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ هجي.

ثابتي:

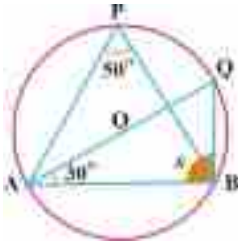
بيان	دليل
$\overset{\frown}{ACB}$ جي مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ آهي.	جوڙجڪ
$\angle APB$ ۽ $\angle AQB$ هڪ ئي سيگمينٽ جون ڪنڊون آهن	مليل
هاڻي	
$m\angle AOB = 2m\angle APB$	وڏي قوس جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ ننڍي قوس جي گهيريل ڪنڊ کان ٻيڻي هوندي آهي.
$m\angle AOB = 2m\angle AQB$	ساڳي طريقي سان
$2m\angle APB = 2m\angle AQB$	متعدي خاصيت سان
$m\angle APB = m\angle AQB$	ٻنهي پاسن کي 2 سان ونڊيندي

Q.E.D

شامل نتيجو 1: گول جي وڏي قوس ۾ ڪي به ٻه ڪنڊون برابر هونديون آهن.

SACHIEDU.COM

مثال : پر واري شڪل ۾ مرڪز O واري گول جي ساڳئي سيگمينٽ APQB ۾ $\angle P$ ۽ $\angle Q$ ۾ ڪنڊون آهن x يا $m\angle ABQ$ جي قيمت لهو جڏهن ته ڪنڊن جون ماپون شڪل ۾ ڏيڪاريل آهن.



حل:

$\angle P$ ۽ $\angle Q$ ساڳيئي سيگمينٽ تي ڪنڊون آهن

$\therefore \quad m\angle Q = m\angle P$

يعني ته $m\angle Q = 50° \quad (\because m\angle P = 50°)$

$\triangle ABQ$ ۾

$m\angle A + m\angle Q + x = 180°$

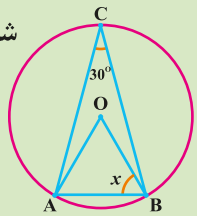
يعني ته $30° + 50° + x = 180°$

$\Rightarrow \quad x = 100°$

مشق 28.1

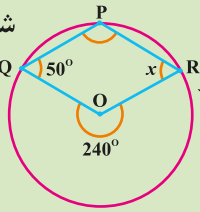
1. شڪل 1 ۾ ٽپڪو O گول جو مرڪز آهي x جي قيمت لهو جڏهن ته $m\angle C = 30°$

شڪل 1



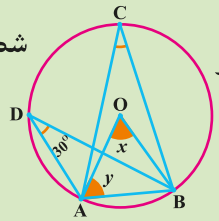
2. شڪل 2 ۾، ٽپڪو O گول جو مرڪز آهي. x جي قيمت لهو جڏهن ته $m\angle Q = 50°$

شڪل 2



3. شڪل 3 ۾ ٽپڪو O گول جو مرڪز آهي. $x+y$ جوملهه لهو جڏهن ته $m\angle D = 30°$

شڪل 3



4. ٻن يڪسان گولن جي ٻن يڪسان وڏي قوسن جون گهيريل ڪنڊون يڪسان هونديون آهن اهو ثابت ڪريو.

5. ثابت ڪريو ته ڪنهن گول ۾ وڏي قوس ۽ ان سان مطابقت رکندڙ ننڍي قوس جون گهيريل ڪنڊون برابر هونديون آهن.

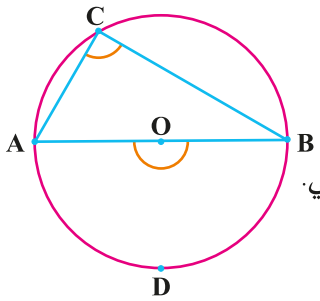
.COM

سڌيان (a) 28.3:

اڌ گول ۾ ڪنڊ هميشہ گوني ڪنڊ هوندي آهي.

يا

اڌ گول جي گهيريل ڪنڊ هميشہ گوني ڪنڊ هوندي آهي.



مليل: مرڪز O واري گول ۾ اڌ گول ADB جي مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ آهي.

ان سان مطابقت رکندڙ اڌ گول جي گهيريل ڪنڊ $\angle ACB$ آهي.

گهربل: $\angle ACB$ هڪ گوني ڪنڊ آهي.

ثابتي:

بيان	دليل
$m\angle AOB = 180°$ ...(i)	اڌ گول جي مرڪزي ڪنڊ
$m\angle AOB = 2m\angle ACB$ هاڻي	اڌ گول جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ اڌ گول جي گهيريندڙ ڪنڊ ڪان ٻيڻي آهي
$\Rightarrow \quad 2m\angle ACB = 180°$	مساوات (i) جو استعمال ڪندي
$m\angle ACB = 90°$ يا	ٻنهي پاسن کي 2 سان ونڊيندي
يعني تہ $\angle ACB$ گوني ڪنڊ آهي.	گوني ڪنڊ جي وصف مطابق

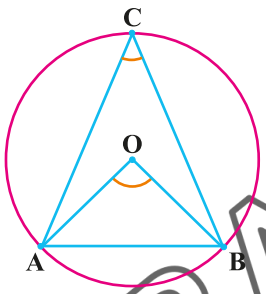
Q.E.D

سڌيان (b) 28.3

اڌ گول کان وڏي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ هميشہ گوني ڪنڊ ڪان ننڍي هوندي آهي.

يا

وڏي قوس ۾ گهيريل ڪنڊ سوڙهي هوندي آهي.



مليل: مرڪز O واري گول ۾، اڌ گول کان وڏي سيگمينٽ ACB ۾ ڪنڊ $\angle ACB$ آهي.

مطابقت رکندڙ ننڍي قوس AB جي مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ آهي.

گهربل: $\angle ACB$ هڪ سوڙهي ڪنڊ آهي.

ثابتي:

بيان	دليل
$m\angle AOB < 180°$ ...(i)	ننڍي قوس جي مرڪزي ڪنڊ
هاڻي $m\angle AOB = 2m\angle ACB$	ننڍي قوس جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ وڏي قوس جي گهيريل ڪنڊ ڪان ٻيڻي آهي.
$\Rightarrow \quad 2m\angle ACB < 180°$	مساوات (i) کي استعمال ڪندي
$m\angle ACB < 90°$	ٻنهي پاسن کي 2 سان ونڊيندي
يعني $\angle ACB$ هڪ سوڙهي ڪنڊ آهي.	سوڙهي ڪنڊ جي وصف مطابق

Q.E.D

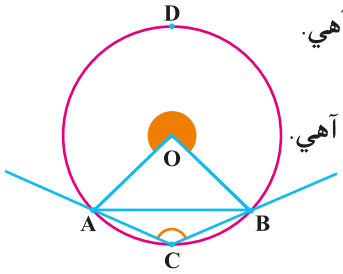
UNDER RACHIED

سڌيان (c) 28.3:

اڌ گول کان نندي سيگمينٽ ۾ ڪنڊ هميشہ گوني ڪنڊ کان وڏي هوندي آهي.

يا

نندي قوس ۾ گهيريل ڪنڊ هميشہ ويڪري ڪنڊ هوندي آهي.



مليل: مرڪز O واري گول ۾، نندي قوس AB جي گهيريل ڪنڊ $\angle ACB$ آهي.
مطابقت رکندڙ وڏي قوس ADB جي مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ آهي.

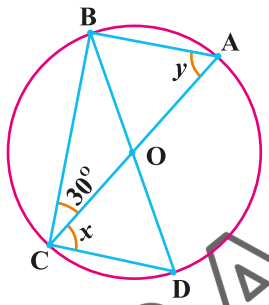
گهربل: $\angle ACB$ هڪ ويڪري ڪنڊ آهي

ثابتي:

بيان	دليل
$m\angle AOB > 180°$ ...(i)	وڏي قوس جي مرڪزي ڪنڊ
هاڻي	
$m\angle AOB = 2m\angle ACB$	وڏي قوس جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ نندي قوس جي گهيريل ڪنڊ کان ٻيڻي آهي.
$\Rightarrow \quad 2m\angle ACB > 180°$	مساوات(i) جو استعمال ڪندي
$m\angle ACB > 90°$ يا	ٻنهي پاسن کي 2 سان ونڊيندي
يعني $\angle ACB$ ويڪري ڪنڊ آهي.	ويڪري ڪنڊ جي وصف مطابق

Q.E.D

مثال: شڪل 1 ۾، ٽپڪو O گول جو مرڪز آهي. x ۽ y جون قيمتون لهو جيڪڏهن $m\angle BCO = 30°$، $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BD}$ قطر آهن



شڪل 1

حل:

$\because$ $\overline{BD}$ قطر آهي

$\therefore$ $\angle BCD$ اڌ گول جي گهيريل ڪنڊ آهي.

انهي ڪري $m\angle BCD = 90°$

$\Rightarrow \quad x + 30° = 90°$

$\Rightarrow \quad x = 60°$

$\overline{AC}$ قطر آهي ۽ اڌ گول جي گهيريل ڪنڊ $\angle CBA$ آهي.

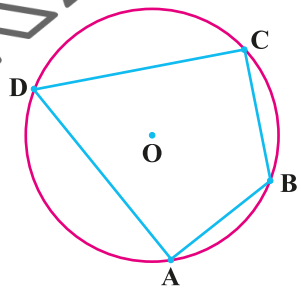
انهي ڪري $m\angle CBA = 90°$

۾ ΔABC,

$30° + m\angle CBA + y = 180°$

$\Rightarrow \quad 30° + 90° + y = 180°$

$\Rightarrow \quad y = 60°$



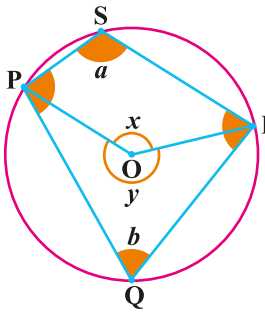
گهيريل چوڪنڊو يا مدار چوڪنڊو:

هڪ چوڪنڊي کي گهيريل چوڪنڊو يا مدار چوڪنڊو چئبو جيڪڏهن ان جون سڀ چوٽيون ساڳي گول تي موجود هجن. شڪل ۾ ABCD هڪ مدار چوڪنڊو آهي.

KARACHIEV

سڌيان 28.4: گول ۾ ڪنهن به گهيريل چوڪنڊي جون سامهون واريون ڪنڊون سپليمينٽري آهن.

مليل: مرڪز O واري گول ۾ PQRS گهيريل چوڪنڊو آهي.



گهربل:

$$m\angle Q + m\angle S = 180^\circ$$
$$m\angle P + m\angle R = 180^\circ$$

جوڙجڪ: $\overline{OP}$ ۽ $\overline{OR}$ ڪيو تہ جيئن $\angle POR$ يا $\angle x$، $\overset{\frown}{PR}$ جي مرڪزي ڪنڊ آهي ۽ $\angle y$ مطابقت رکندڙ $\overset{\frown}{PQR}$ جي مرڪزي ڪنڊ آهي.

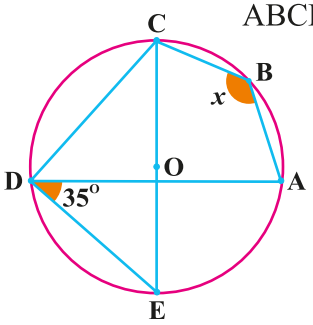
ثابتي:

بيان	دليل
$\overset{\frown}{PR}$ جي گهيريل ڪنڊ $\angle a$ يا $\angle S$ آهي	وصف مطابق
مطابقت رکندڙ $\overset{\frown}{PQR}$ جي مرڪزي ڪنڊ $\angle y$ آهي	جوڙجڪ
$m\angle y = 2m\angle a$	وڏي قوس جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ ننڍي قوس جي گهيريل ڪنڊ کان ٻيڻي هوندي آهي.
$\Rightarrow \quad m\angle a = \frac{1}{2}m\angle y \ldots (i)$	ٻنهي پاسن کي 2 سان ونڊيندي
هاڻي	
$\angle Q$ يا $\angle b$ وڏي قوس $\overset{\frown}{PQR}$ جي گهيريل ڪنڊ آهي.	وصف مطابق
۽ مطابقت رکندڙ $\overset{\frown}{PR}$ جي مرڪزي ڪنڊ $\angle x$ آهي.	جوڙجڪ
انهيءَ ڪري $m\angle x = 2m\angle b$	ننڍي قوس جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ وڏي قوس جي گهيريل ڪنڊ کان ٻيڻي هوندي آهي.
يعني $m\angle b = \frac{1}{2}m\angle x \ldots (ii)$	
هاڻي	
$m\angle a + m\angle b = \frac{1}{2}m\angle x + \frac{1}{2}m\angle y$	مساوات (i) ۽ (ii) کي جوڙ ڪرڻ سان
$= \frac{1}{2}(m\angle x + m\angle y)$	عام جزو $\frac{1}{2}$ ٻاهر ڪيڏندي
$= \frac{1}{2}(360^\circ)$	هڪ ٽپڪي جي چوڌاري سيني ڪنڊن جي جوڙ اُپٽ 360° آهي.
يعني $m\angle a + m\angle b = 180^\circ$	
يا $m\angle Q + m\angle S = 180^\circ$	$\because \angle a \cong \angle S$ ۽ $\angle b \cong \angle Q$
ساڳي ريت $m\angle P + m\angle R = 180^\circ$	ساڳي طريقي سان

Q.E.D

شامل نتيجو: گول ۾ گهيريل هڪ پوروچوٽ چوڪنڊو مستطيل هوندو آهي.

مثال: ڏنل شڪل ۾، ٽپڪو O گول جو مرڪز آهي. $\overline{CE}$ ان جو قطر ۽ ABCD مدار چوڪنڊو آهي. x جي قيمت لهو. جيڪڏهن $m\angle ODE = 35^\circ$



حل:

اڌ گول جي گهيريل ڪنڊ $\angle CDE$ آهي.

$$\therefore \quad m\angle CDE = 90^\circ$$

يعني تہ $35^\circ + m\angle ADC = 90^\circ$

$$\Rightarrow \quad m\angle ADC = 55^\circ$$

هاڻي

مدار چوڪنڊي ABCD ۾

$$x + m\angle ADC = 180^\circ$$

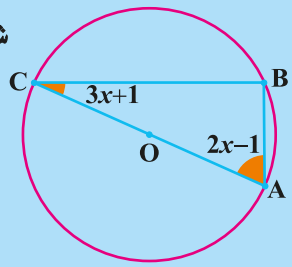
$$\Rightarrow \quad x + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad x = 180^\circ - 55^\circ$$

$$\Rightarrow \quad x = 125^\circ$$

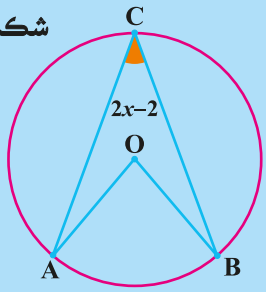
مشق 28.2

شڪل 1



1. شڪل 1 ۾، گول جو مرڪز O آهي. جڏهن تہ $\overline{AC}$ ان جو قطر آهي x جو ملهہ لهو.

شڪل 2



2. شڪل 2 ۾ ACB وڏو قوس آهي ان گول جوجنهن جو مرڪز O آهي ۽ BAC جي گهيريل ڪنڊ $\angle C$ آهي x جو ملهہ لهو جڏهن تہ $x \in \mathbb{R}$.

3. هڪ گول ۾، ننڍي قوس جي گهيريل ڪنڊ جي ماپ $7x-1$ آهي. x جي قيمت لهو جڏهن تہ $x \in \mathbb{R}$

4. ثابت ڪريو تہ گول جي اندر گهيريل رامبس هڪ چورس هوندو.

5. ثابت ڪريو تہ مدار چوڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ، سامهون واري اندرين ڪنڊ جي برابر آهي.

sindhiacademy.com

جائزي واري مشق 28

1. درست جواب تي نشان هڻو.

i. _____ جي گھيريل ڪنڊ ويڪري ڪنڊ آهي.

(a) نندي قوس (b) وڏي قوس (c) اڌ گول (d) اهي سڀ ئي

ii. _____ قوس ۽ زهه سان گھيريل گول ايراضي آهي.

(a) سيڪٹر (b) سيگمينٽ (c) وڏو قوس (d) گول جو گھيرو

iii. جيڪڏهن $2x$ نندي قوس جي گھيريل ڪنڊ جي ماپ آهي تہ پوءِ مطابقت رکندڙ وڏي قوس جي مرڪزي ڪنڊ _____ آهي.

(a) x (b) $2x$ (c) $3x$ (d) $4x$

iv. جيڪڏهن $2x$ ۽ $60°$ ساڳيئي سيگمينٽ جون گھيريل ڪنڊون آهن تہ پوءِ x = _____

(a) $120°$ (b) $60°$ (c) $20°$ (d) $30°$

v. گول جي نندي قوس جي گھيريل ڪنڊ _____ آهي.

(a) سوڙهي ڪنڊ (b) ويڪري ڪنڊ (c) گوني ڪنڊ (d) عڪسي ڪنڊ

vi. گول جي وڏي قوس جي گھيريل ڪنڊ _____ آهي.

(a) سوڙهي ڪنڊ (b) ويڪري ڪنڊ (c) گوني ڪنڊ (d) عڪسي ڪنڊ

vii. مدار چوڪنڊي جي سامهون وارين ڪنڊن جي جوڙ اُپت _____ آهي.

(a) $90°$ (b) $180°$ (c) $270°$ (d) $360°$

viii. گول جي اندر گھيريل پوروچوٽ چوڪنڊو _____ هوندو آهي.

(a) پتنگ (b) ٽرئپزيم (c) مستطيل (d) رامبس

ix. هڪ قوس جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ ٻيئي قوس جي گھيريندڙ ڪنڊ ڪان _____ هوندي آهي.

(a) نندي (b) وڏي (c) نندي يا برابر (d) وڏي يا برابر

x. هڪ گول جي سيني قوسن جي مرڪزي ڪنڊن جي جوڙ اُپت _____ آهي.

(a) $90°$ (b) $180°$ (c) $360°$ (d) $1000°$

خلاصو

- هڪ قوس ۽ ٻن رداسي ٽڪرن سان گھيريل گول جي ايراضي کي سيڪٹر چئبو آهي.
- هڪ قوس ۽ ان جي زهه سان گھيريل گول جي ايراضي کي سيگمينٽ چئبو آهي.
- گول جي سيگمينٽ ۽ ڪنڊ کي سيگمينٽ جي گھيريل ڪنڊ پڻ چئبو آهي.
- ڪنهن قوس سان گول جي مرڪز تي ٺهيل ڪنڊ کي مرڪزي ڪنڊ چئبو آهي.
- وڏي (يا نندي) قوس جي مرڪزي ڪنڊ مطابقت رکندڙ ترتيبوار نندي (يا وڏي) قوس جي گھيريندڙ ڪنڊ ڪان ٻيڻي هوندي آهي.
- ڪنهن گول جي ساڳيئي سيگمينٽ ۽ ڪي بہ ڪنڊون برابر هونديون آهن.
- اڌ گول جي گھيريندڙ ڪنڊ گوني ڪنڊ هوندي آهي.
- وڏي قوس جي گھيريندڙ ڪنڊ سوڙهي ڪنڊ هوندي آهي.
- نندي قوس جي گھيريندڙ ڪنڊ ويڪري ڪنڊ هوندي آهي.
- مدار چوڪنڊي جون سڀ چوٽيون ساڳيئي گول تي هونديون آهن.
- مدار چوڪنڊي جون سامهون واريون ڪنڊون سپليمينٽري ڪنڊون هونديون آهن.

عملي جاميٽري - گول

PRACTICAL GEOMETRY - CIRCLES

يونٽ 29

شاگردن جي سکيا جا حاصلات (SLOs)

هي يونٽ پڙهڻ کان پوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- ڏنل گول جي مرڪز جو هنڌ ڳولن.
- مليل ٽن غير هم ليڪي ٽپڪن مان گذرندڙ گول ڪڍن.
- گول کي پورو يا مڪمل ڪن.
  - مرڪز معلوم ڪندي.
  - مرڪز معلوم ڪرڻ کانسواءِ جڏهن گول جي گهيري جو ڪو حصو مليل هجي.
- مليل ٽڪنڊي کي گول ۾ گهيرن.
- ڏنل ٽڪنڊي ۾ گول کي گهيرن.
- هڪ ٽڪنڊي جو ٻاهريون گول ڪڍن.
- ڏنل گول کي ٽپور پاسي ٽڪنڊي سان گهيرن.
- مليل ٽڪنڊي ۾ هڪ ٽپور پاسي ٽڪنڊي کي گهيري ۾ آڻين.
- مليل گول ۾ هڪ ٽپور پاسي ٽڪنڊي کي گهيري ۾ آڻين.
- ڏنل گول جو گهيريندڙ چورس ناهين.
- هڪ ڏنل گول جو گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪنڊو ناهين.
- ڏنل گول ۾ هڪ گهيريل پور پاسو ڇهه ڪنڊو ناهين.
- مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، ڏنل ٽپڪي P مان مليل قوس جي ڇڪي ليڪ ڪڍن، جڏهن
  - P قوس جو وچيون ٽپڪو آهي.
  - P قوس جي چيڙي تي آهي.
  - P قوس کان ٻاهر آهي.
- هڪ ٽپڪي P مان، ڏنل گول جي ڇڪي ليڪ ڪڍن، جڏهن
  - P گول جي گهيري تي موجود آهي.
  - P گول کان ٻاهر موجود آهي.
- هڪ گول جون ٻہ ڇڪي ليڪون ڪڍن جيڪي هڪٻيئي سان ڏنل ڪنڊ تي ملن ٿيون.
- ٻن برابر گولن جون.
  - سڌي طرح گڏيل ڇڪيون ليڪون يا ٻاهريون ڇڪيون ليڪون ڪڍن.
  - آڏيون گڏيل ڇڪيون ليڪون يا اندريون ڇڪيون ليڪون ڪڍن.
- ٻہ غير مساوي گولن جون
  - سڌي طرح گڏيل ڇڪيون ليڪون يا ٻاهريون ڇڪيون ليڪون ڪڍن.
  - آڏيون گڏيل ڇڪيون ليڪون يا اندريون ڇڪيون ليڪون ڪڍن.
- ٻن غير مساوي ڇهندڙ گولن جي ڇڪي ليڪ ڪڍن.
- ٻن غير مساوي ڪپيندڙ گولن جي ڇڪي ليڪ ڪڍن.
- هڪ گول ڪڍن جيڪو
  - ڏنل ڪنڊ جي ٻنهي ٻانهن کي ڇُهي.
  - ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ٻن ليڪن کي ڇُهي ۽ انهن ليڪن جي وچ ۾ ڪنهن ٽپڪي مان گذري.
  - ميلاپ ڏانهن مائل ٽن ليڪن کي ڇُهي.

تعارف:

اسان کي خبر آهي تہ جاميٽري جي هڪ اهم شاخ عملي جاميٽري آهي جيڪا فن تعمير، ڪمپيوٽر گرافڪس، مصوري وغيره ۾ استعمال ٿئي ٿي. اسان گذريل ڪلاس ۾ اڳيئي ڪندن، ٽڪندن، مستطيل، پنج ڪندو وغيره کي ناهڻ سکي چڪا آهيون. اچو تہ گولن ۽ ان سان لاڳاپيل شڪلين جي جوڙجڪ سکون.

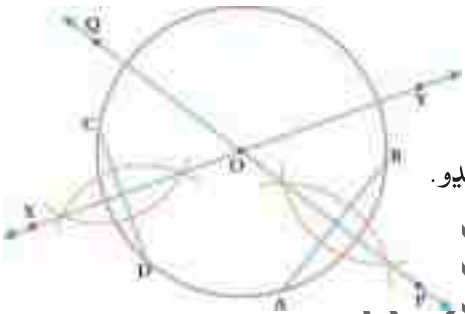
29.1 گولن جي جوڙجڪ (Construction of circles):

اسان کي خبر آهي تہ پلڪار جو استعمال ڪندي، سولائي سان گول ڪيي سگهجي ٿو جڏهن ان جو مرڪز ۽ رداس مليل هجن. ان سيڪشن ۾، اسين ان صورت ۾ پڻ گول ڪيڊ سکنداسين جڏهن مرڪز ۽ رداس مليل نہ هجن.

29.1 (i) ڏنل گول جي مرڪز جو هٿ ڳولڻ:

ڪنهن گول جي مرڪز جو هٿ ڳولڻ لاءِ اسين ان حقيقت جو استعمال ڪنداسين تہ گول جي غير پوروچوٽ زهہ جا عمودي اڌ ڪندر هميشہ هڪ ٻيئي کي گول جي مرڪز تي ڪپين ٿا. ڏنل گول جي مرڪز جي هٿ ڳولڻ جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو.

مثال: شڪل ۾ ڏيکاريل گول جي مرڪز جو هٿ ڳوليو.



مليل: هڪ گول

گهربل: ڏنل گول جي مرڪز جو هٿ ڳولڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ڏنل گول جا ٻہ غير پوروچوٽ زهہ $\overline{AB}$ ۽ $\overline{CD}$ ڪيو.

(ii) زهہ $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{PQ}$ ڪيو.

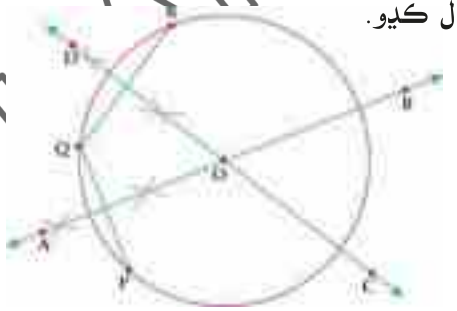
(iii) زهہ $\overline{CD}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{XY}$ ڪيو.

(iv) ٻئي عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{XY}$ هڪٻئي کي ٽپکي O تي ڪپين ٿا. ٽپکو O ڏنل گول جو مرڪز آهي.

29.1 (ii) مليل ٽن غير هم ليڪي ٽپکن مان گذرندڙ گول ڪيڊ:

مليل ٽن غير هم‌ليڪي ٽپکن مان گذرندڙ گول ڪيڊ لاءِ، اسين سڀ کان اڳ ۾ مرڪز جو هٿ ڳولينداسين ۽ ان کانپوءِ گول ڪيينداسين جيئن هيٺين مثال ۾ واضح ڪيو ويو آهي.

مثال: ٽي غير هم ليڪي ٽپکن P, Q ۽ R مان گذرندڙ گول ڪيو.



مليل: ٽي غير هم ليڪي ٽپڪا P, Q ۽ R.

گهربل: هڪ گول ڪيڊ جيڪو ٽپکن P, Q ۽ R مان گذري.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ڪي ٻہ ٽي غير هم ليڪي ٽپڪا P, Q ۽ R ڪٽو

(ii) $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{QR}$ ڪيو.

(iii) $\overline{PQ}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{AB}$ ڪيو.

(iv) $\overline{QR}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{CD}$ ڪيو.

(v) ٻئي عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ هڪٻئي کي ٽپکي O تي ڪپين ٿا جيڪو گهربل گول جو مرڪز آهي.

TRACHEDU.COM

(vi) مرڪز O ۽ رداس $\overline{mOP}$ يا $\overline{mOQ}$ يا $\overline{mOR}$ جي برابر ڪٽي، هڪ گول ڪيو.
اهو گول گهربل گول آهي.

29.1 (iii) گول کي پورو يا مڪمل ڪرڻ

- مرڪز معلوم ڪندي
- مرڪز معلوم ڪرڻ کانسواءِ

جڏهن گول جي گهيري جو ڪو حصو مليل هجي.

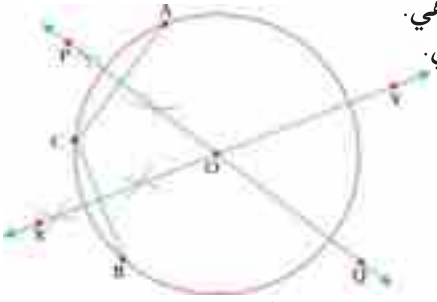
(a) مرڪز معلوم ڪندي گول کي پورو ڪرڻ جڏهن گول جي گهيري جو ڪو حصو مليل هجي.

اسين گول جي ڪن بہ ٽن غير هم ليڪي ٽپڪن جي مدد سان مرڪز ڳولينديو گول کي سگهون ٿا. جڏهن ان جي گهيري جو ڪو حصو يا قوس مليل هجي. اهو طريقو هينئين مثال ۾ واضح ڪيل آهي.

مثال: مرڪز ڳولينديو هڪ گول کي پورو ڪريو جڏهن ان جو قوس AB مليل آهي.

مليل: گول جي گهيري جو هڪ حصو يا قوس AB مليل آهي.

گهربل: هڪ گول کي پورو ڪرڻ جنهن جو قوس مليل آهي.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) قوس AB ڪيو.
(ii) $\overset{\frown}{AB}$ تي A ۽ B کانسواءِ ڪو بيو ٽپڪو C ڪڍو.
(iii) $\overline{AC}$ ۽ $\overline{BC}$ ڪيو.
(iv) $\overline{AC}$ جو عمودي اڌ کنڊ $\overleftrightarrow{PQ}$ ڪيو.
(v) $\overline{BC}$ جو عمودي اڌ کنڊ $\overleftrightarrow{XY}$ ڪيو
(vi) ٻئي عمودي اڌ کنڊ هڪٻئي کي ٽپڪي O تي ڪٽين ٿا جيڪو گول جو مرڪز آهي.
(vii) مرڪز O ۽ رداس $\overline{mAO}$ يا $\overline{mOB}$ يا $\overline{mOC}$ جي برابر ڪٽي، گول جو باقي رهيل حصو ڪيو
اهڙي طرح اسان وٽ قوس AB جو مڪمل گول آهي.

(b) مرڪز معلوم ڪرڻ کانسواءِ گول کي پورو ڪرڻ جڏهن ان جي گهيري جو ڪو حصو مليل هجي:

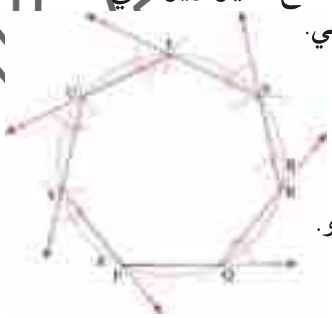
اسين پور پاسو گهٽ ڪندي جي مدد سان مرڪز ڳولڻ بنا گول کي سگهون ٿا جڏهن کو قوس مليل هجي.

اسين باهرين ڪنڊن يا اندرين ڪنڊن جي مدد سان پور پاسو گهٽ ڪندو ناهيندا سين اهي ڪنڊون يڪسان هوندينون. هينئين مثال جي مدد سان ان طريقي کي واضح ڪيو ويو آهي.

مثال: مرڪز ڳولڻ بنا هڪ گول کي پورو ڪريو جنهن جو قوس AB مليل آهي.

مليل: هڪ گول جو قوس AB

گهربل: $\overset{\frown}{AB}$ جو گول پورو ڪرڻ.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مليل $\overset{\frown}{AB}$ جا بہ يڪسان زهہ $\overline{PQ}$ ۽ $\overline{QR}$ ڪيو.
(ii) $\angle Q$ جي يڪسان باهرين ڪنڊ $\angle R$ ڪيو ۽ $\overline{PQ}$ جي يڪسان $\overline{RS}$ ڪيو.
(iii) $\angle R$ جي يڪسان باهرين ڪنڊ $\angle S$ ڪيو ۽ $\overline{PQ}$ جي يڪسان $\overline{ST}$ ڪيو.
(iv) ساڳئي طريقي سان، اسان ٽپڪا S، T، U ۽ $\angle V$ حاصل ڪريون ٿا.
(v) اهڙي طرح اسان هڪ پور پاسو ڇهہ ڪنڊون PQRSTUV حاصل ڪيو.

LARACHIEDU.COM

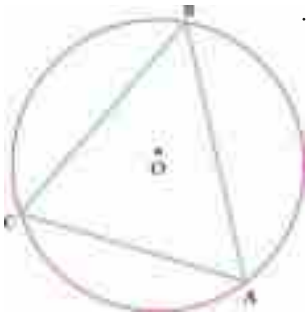
(vi) $\overline{RS}$، $\overline{ST}$، $\overline{TU}$، $\overline{UV}$ ۽ $\overline{VP}$ جا ٽِڪن وارا قوس ناهيو.

اهي ٽِڪيل قوس گول ڪي پورو ڪن ٿا.

مشق 29.1

1. گول شي جي مدد سان هڪ گول ڪيو. ان جي مرڪز جو هنڌ ڳوليو.
2. ٽي غير هم ليڪ ٽِڪا X, Y, Z ڪٽو ۽ هڪ گول ڪيو جيڪو انهن ٽِڪن مان گذري.
3. ڪنهن گول شي سان هڪ ننڍو قوس AB ڪيو. مرڪز معلوم ڪندي ان گول کي پورو ڪريو.
4. ڪنهن گول شي سان هڪ وڏو قوس ABC ڪيو. مرڪز معلوم ڪندي ان گول کي پورو ڪريو.
5. ڪنهن گول شي سان هڪ ننڍو قوس AB ڪيو. مرڪز معلوم ڪرڻ بنا ان گول کي پورو ڪريو.

29.2 گھڻ ڪنڊن سان ٺهيل گول:



ياد ڪريو ته گھڻ ڪنڊو ٽي يا وڌيڪ پاسن واري بند شڪل آهي.

مثال طور: ٽڪنڊو، چوڪنڊو، پنج ڪنڊو، ڇهه ڪنڊو وغيره.

گھڻ ڪنڊي سان ٺهيل گول اهي گول هوندا آهن جيڪي يا ته گھڻ ڪنڊي جي سيني چوٽين مان گذرن يا ان جي پاسن کي ڇُهن.

29.2 (i) مليل ٽڪنڊي کي گول ۾ گھيرڻ:

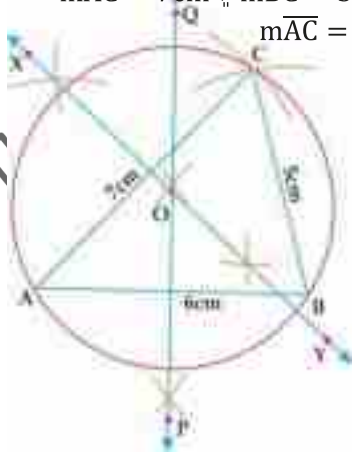
ٽڪنڊي جو گھيريندڙ گول (Circum Circle of Triangle)

اهو گول جيڪو ڪنهن ٽڪنڊي جي ٽنهي چوٽين مان گذري، ان کي ٽڪنڊي جو گھيريندڙ گول چئبو آهي. ڏنل شڪل ۾ ΔABC جو گھيريندڙ گول آهي جنهن جو مرڪز O آهي جيڪو گھيريندڙ مرڪز (Circum-centre) ڪوٺبو آهي.

مثال: ΔABC جو گھيريندڙ گول ڪيو جنهن ۾ $m\overline{AB} = 6cm$، $m\overline{BC} = 5cm$ ۽ $m\overline{AC} = 7cm$

مليل: هڪ ٽڪنڊو ABC جنهن ۾ $m\overline{AB} = 6\,cm$، $m\overline{BC} = 5cm$ ۽ $m\overline{AC} = 7cm$

گھربل: ΔABC جو گھيريندڙ گول ڪڍڻ



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مليل مواد جي مدد سان ΔABC ناهيو.

(ii) $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{PQ}$ ڪيو

(iii) $\overline{AC}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{XY}$ ڪيو.

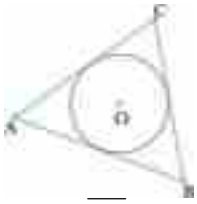
(iv) ٻئي عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{XY}$ هڪٻئي کي ٽِڪي O تي ڪپين ٿا.

(v) مرڪز O ۽ رداس $m\overline{OA}$ يا $m\overline{OB}$ يا $m\overline{OC}$ جي برابر ڪٽي هڪ گول ڪيو جيڪو ٽِڪن A, B ۽ C مان گذري ٿو.

اهو ΔABC جو گھربل گھيريندڙ گول آهي.

SACHIEDU.COM

29.2 (ii) ڏنل ٽڪنڊي ۾ گول کي گھيرڻ يا سموئڻ: ٽڪنڊي جو گھيريل گول يا اندريون گول:
(Inscribed circle or in-circle of Triangle)



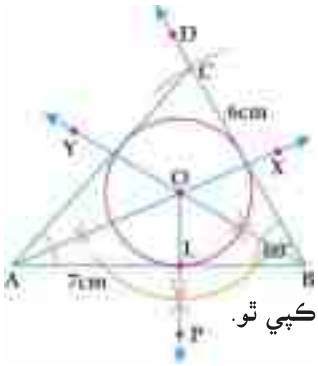
اھو گول جيڪو ٽڪنڊي جي سيني پاسن کي ڇُھي، ان کي اندريون گول يا گھيريل گول چئبو آھي. ۾ واري شڪل ۾ ΔABC جوگھيريل گول آھي جنھن جو مرڪز ٽپڪو O آھي. ان مرڪز کي اندريون مرڪز (In-centre) چئبو آھي.

مثال: ΔABC جو گھيريل گول ڪيو جنھن ۾ $m\overline{AB} = 7cm$، $m\angle B = 60°$ ۽ $m\overline{BC} = 6\ cm$

مليل: ھڪ ٽڪنڊو ABC ۾ جنھن $m\overline{AB} = 7cm$، $m\angle B = 60°$ ۽ $m\overline{BC} = 6cm$

گھربل: ΔABC جو گھيريل گول ڪڍڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



(i) ڏنل مواد جي مدد سان ΔABC ناھيو.

(ii) $\angle A$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{AX}$ ڪيو

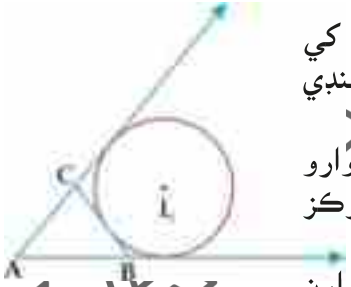
(iii) $\angle B$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{BY}$ ڪيو.

(iv) ٻئي اندريان اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{AX}$ ۽ $\overrightarrow{BY}$ ھڪٻئي کي ٽپڪي O تي ڪپين ٿا.

(v) ٽپڪي O کان $\overline{AB}$ تي ھڪ عمود $\overrightarrow{OP}$ ڪيو. $\overset{\frown}{AB}$ کي $\overrightarrow{OP}$ ٽپڪي L تي ڪپي ٿو.

(vi) مرڪز O ۽ رداس $m\overline{OL}$ جي برابر ڪٽي ھڪ گول ڪيو جيڪو ΔABC جي سيني پاسن کي ڇُھي ٿو. اھو گھربل گھيريل گول آھي.

29.2 (iii) ھڪ ٽڪنڊي جو ٻاھريون گول ڪڍڻ:
ٻاھريون گول (Escribed Circle or Ex-circle)



ھڪ گول جيڪو ڪنھن ٽڪنڊي جي ھڪ پاسي کي ٻاھريان ڇُھي ۽ ٻن وڌيل پاسن کي اندريان ڇُھي تہ ان کي ٽڪنڊي جو ٻاھريون گول چئبو آھي.

مليل شڪل ۾، ΔABC جو چوٽي A جي سامھون وارو ٻاھريون گول آھي ۽ ان جو مرڪز I_1 آھي جنھن کي ٻاھريون مرڪز (ex-circle) چئبو آھي.

ساڳي ريت ΔABC جي چوٽين B ۽ C جي سامھون وارن ٻاھرين گولن جا مرڪز ترتيبوار I_2 ۽ I_3 آھن.

مثال: ΔABC جو چوٽي A جي سامھون وارو ٻاھريون گول ڪيو جڏھن تہ $m\overline{AB} = 5cm$، $m\angle A = 30°$، $m\angle B = 60°$

مليل: ھڪ ٽڪنڊو ABC جنھن ۾ $m\overline{AB} = 5cm$، $m\angle A = 30°$ ۽ $m\angle B = 60°$

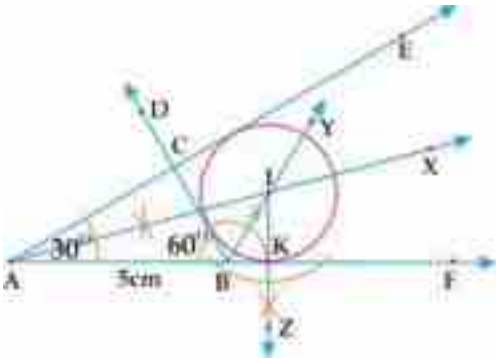
گھربل: ΔABC جو چوٽي A جي سامھون وارو ٻاھريون گول ڪڍڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ڏنل مواد جي مدد سان ΔABC ناھيو.

(ii) C کان پري $\overline{AC}$ کي وڌايو ۽ B کان پري $\overline{AB}$ کي وڌايو تہ جيئن ٻہ ٻاھريون ڪنڊون ترتيبوار BCE ۽ CBF ٺھن.

KHEDU.COM



(iii) $\angle A$ جو اندريون اڌ ڪنڊ $\overrightarrow{AX}$ ڪيو.

(iv) $\angle CBF$ جو اندريون اڌ ڪنڊ $\overrightarrow{BY}$ ڪيو.

(v) ٻئي اڌ ڪنڊ $\overrightarrow{AX}$ ۽ $\overrightarrow{BY}$ هڪٻئي کي ٽپڪي I تي ڪپين ٿا.

(vi) ٽپڪي I کان $\overrightarrow{AF}$ تي عمود $\overrightarrow{IZ}$ ڪيو جيڪو $\overrightarrow{AF}$ کي ٽپڪي K تي ڪپي ٿو.

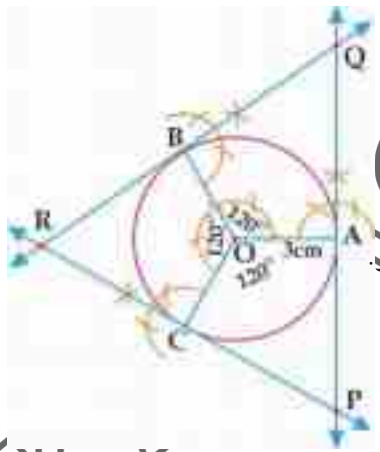
(vii) مرڪز I ۽ رداس $m\overline{IK}$ جي برابر ڪٽي هڪ گول ڪيو جيڪو $\overline{BC}$ کي ٻاهريان ۽ $\overrightarrow{AE}$ ۽ $\overrightarrow{AF}$ کي اندريان ڇهي ٿو.

اهو ΔABC جو چوٽي A جي سامهون وارو گهربل ٻاهريون گول آهي.

29.2 ڏنل گول کي ٽپور پاسي ٽڪندي سان گهيرڻ:

اسين هڪ ٽپور پاسو ٽڪندو ناهينداسين جيڪو ڏنل گول کي گهيري. ان لاءِ اسين ان حقيقت جو استعمال ڪنداسين ته جيڪڏهن ڪو گول ٽن يڪسان قوسن ۾ ورهايو وڃي ۽ ورهاست وارن ٽپڪن تي ڇهڻ ليکون ڪڍيون وڃن ته اهي ليکون ان گول جي گهيريندڙ ٽپور پاسي ٽڪندي جا پاسا ناهيندڙون. اهو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو.

مثال: 3cm رداس جو گول ڪيو جنهن جو مرڪز O آهي. ان گول جو گهيريندڙ ٽپور پاسو ٽڪندو ناهيو.



مليل: 3cm رداس وارو گول جنهن جو مرڪز O آهي.

گهربل: مليل گول جو گهيريندڙ ٽپور پاسو ٽڪندو ناهڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

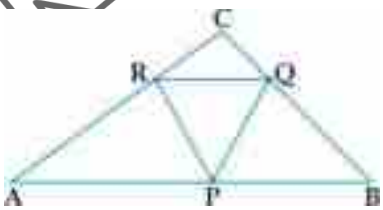
(i) 3cm رداس جو گول ڪيو جنهن جو مرڪز O آهي.

(ii) مرڪزي ڪنڊ کي ٽن يڪسان قوسن ۾ ورهائيندي، مليل گول کي ٽن يڪسان قوسن $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{BC}$ ۽ $\overset{\frown}{AC}$ ۾ ورهايو.

(iii) ٽپڪن A, B ۽ C تي گوني ڪندون ناهيندي انهن ٽپڪن تي ڇهڻ ليکون ڪيو.

(iv) اهي ڇهڻ ليکون هڪٻئي کي ٽپڪن P, Q ۽ R تي ڪپين ٽيون.

هاڻي PQR گهربل ٽپور پاسو ٽڪندو آهي.



29.2 (v) مليل ٽڪندي ۾ هڪ ٽپور پاسي ٽڪندي کي سموئڻ يا گهيري ۾ آڻڻ.

اسانکي خبر آهي ته مليل ٽڪندي ۾ هڪ ٽپور پاسو ٽڪندو گهيريل چورائبو جيڪڏهن ٽپور پاسي ٽڪندي جون سڀ چوٽيون مليل ٽڪندي جي مختلف پاسن تي موجود هجن. پر واري شڪل ۾، ΔABC جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو PQR آهي.

SCHEDU.COM

مثال: ΔABC جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو ناهيو جڏهن $m\overline{AB} = 4cm$ ، $m\overline{BC} = 5cm$ ۽ $m\overline{AC} = 7cm$

مليل: هڪ ٽڪندو ABC جنهن ۾ $m\overline{AB} = 4cm$, $m\overline{BC} = 5cm$ ۽ $m\overline{AC} = 7cm$

گهربل: ΔABC جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو ناهڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مليل مواد سان ΔABC ناهيو.

(ii) $\angle B$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{BD}$ ڪيو جڏهن ته $\angle B$ هڪ مناسب ڪنڊ آهي (عام طرح سان وڏي ڪنڊ)

(iii) اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{BD}$ کپي تو $\overline{AC}$ کي ٽڪي E تي.

(iv) ٽڪي E تي، پ ڪندون BEP ۽ BEQ ناهبو جنهن مان هر هڪ جي ماپ 30° آهي

(v) $\overrightarrow{EP}$ ۽ $\overrightarrow{EQ}$ ترتيبوار $\overline{BC}$ ۽ $\overline{AB}$ کي ٽڪن F ۽ G تي کپين ٿا.

(vi) $\overline{FG}$ ڪيو.

هاڻي ΔABC جو گهربل گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو EFG آهي.

29.2 (vi) مليل گول ۾ هڪ ٽپور پاسي ٽڪنڊي کي سموئڻ يا گهيري ۾ آڻڻ:

هڪ گول جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو.

هڪ ٽپور پاسو ٽڪندو گول جوگهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو چورائبو جيڪڏهن گول ان جي سيني چوٽين مان گذري پر واري شڪل ۾ مرڪز O واري گول جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو ABC آهي.

مثال: هڪ گول جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو ناهيو جڏهن ته گول جو رداس 3cm ۽ ان جو مرڪز O آهي.

گهربل: مليل گول جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو ناهڻ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز O ۽ رداس 3cm سان هڪ گول ڪيو.

(ii) گول تي هڪ ٽپڪو A ڪٽو. مرڪز A ۽ رداس 3cm سان شروعات ڪندي گول کي ٽپڪن B, C, D, E ۽ F تي يڪسان حصن ۾ ورهايو.

(iii) $\overline{AC}$، $\overline{AE}$ ۽ $\overline{CE}$ ڪيو.

هاڻي مليل گول جو گهربل گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو AEC آهي.

ACHIEDU.COM

مشق 29.2

1. ΔABC ناهيو ۽ هر هڪ صورت ۾ ان جو گهيريندڙ گول ڪيو.
   (i) $m\angle A = 50°$ ۽ $m\overline{AC} = 6cm$, $m\overline{AB} = 5.5cm$
   (ii) $m\overline{AC} = 5cm$ ۽ $m\overline{BC} = 4.5cm$, $m\overline{AB} = 6cm$
2. ΔPQR ناهيو ۽ هر هڪ صورت ۾ ان جو گهيريل گول ڪيو.
   (i) $m\overline{RP} = 5.5cm$ ۽ $m\overline{QR} = 6.5cm$, $m\overline{PQ} = 5cm$
   (ii) $m\angle Q = 50°$ ۽ $m\angle P = 60$, $m\overline{PQ} = 6cm$
3. ΔXYZ ناهيو ۽ هر هڪ صورت ۾ $\angle Y$ جي سامهون وارو پاهريون گول ڪيو
   (i) $m\angle Y = 30°$ ۽ $m\overline{YZ} = 5cm$, $m\overline{XY} = 4.5cm$
   (ii) $m\overline{XZ} = 2.5cm$ ۽ $m\overline{YZ} = 6cm$, $m\overline{XY} = 5.5cm$
4. مرڪز O ۽ رداس 3.5cm سان هڪ گول ڪيو ۽ ان گول جو گهيريندڙ ٽپور پاسو. ٽڪندو ناهيو.
5. ΔPQR جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو ناهيو جڏهن ته
   $m\overline{PR} = 8cm$ ۽ $m\overline{QR} = 5.5cm$, $m\overline{PQ} = 4.5cm$
6. هڪ گول جو گهيريل ٽپور پاسو ٽڪندو ناهيو جڏهن ته گول جو مرڪز O ۽ رداس 3.8cm آهي.

29.2 (vii) ڏنل گول جو گهيريندڙ چورس:

چورس يا چهه ڪندي يا ڪنهن بئي گهٽ ڪندي جا گهيريندڙ گول ڪيڻ يا گول ۾ انهن گهٽ ڪندن کي گهيرڻ کان اڳ ۾ اسان کي گول سان لاڳاپيل، پور پاسو گهٽ ڪندن جي حوالي سان هيٺين سڌيان جي جاڻ هڻڻ لازمي آهي.

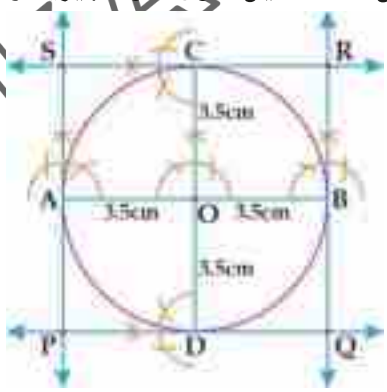
جيڪڏهن ڪنهن گول جو گهيرو n برابر قوسن ۾ ورهايو وڃي ته پوءِ

(i) وندينڊ ٽيڪا، گول ۾ گهيريل پورپاسو n- ڪندي جون چوٽيون هوندیون آهن.

(ii) انهن ٽيڪن تي گول جون ڇهڻي ليڪون، گول کي گهيريندڙ پور پاسو n- ڪندي جا پاسا هوندیون آهن.

ان جو مطلب آهي ته جيڪڏهن اسان کي هڪ چورس، پور پاسو پنج ڪندي، پور پاسو ڇهه ڪندي وغيره جا گهيريندڙ گول ڪيڻا هجن يا انهن ۾ گهيريل گول ڪيڻا هجن ته پوءِ اسين مليل گول کي ترتيبوار چار، پنج، ڇهه وغيره برابر حصن ۾ ورهائينداسين

اچو ته هيٺين مثال جي مدد سان اهو سکون ته ڪيئن هڪ مليل گول جو گهيريندڙ چورس ڪڍجي.



مثال: هڪ گول جو گهيريندڙ چورس ناهيو جڏهن ته گول جو مرڪز O ۽ رداس 3.5cm آهي.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس 3.5cm آهي.

گهربل: مليل گول جو گهيريندڙ چورس ناهڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز O ۽ رداس 3.5cm ڪٽي هڪ گول ڪيو.

(ii) هڪ قطر $\overline{AB}$ ڪيو

(iii) هڪ ٻيو قطر $\overline{CD}$ ڪيو جيڪو $\overline{AB}$ تي عمود هجي.

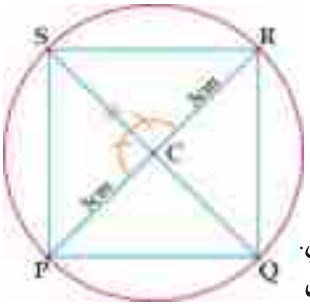
ARCHIVED

(iv) ٽبڪن C, B, A ۽ D تي ڇهڻي ليڪون ڪيو.
(v) اهي ڇهڻي ليڪون هڪبئي کي ٽبڪنP، Q، R ۽ S تي ڪپين ٿيون.
هاڻي PQRS گهربل چورس آهي جيڪو مليل گول جو گهيريندڙ آهي.
اچو ته هينئين مثال جي مدد سان مليل گول جو گهيريل چورس ناهيون.

مثال: هڪ گول ۾ گهيريل چورس ناهيو جڏهن ته گول جو مرڪز C ۽ رداس 3cm آهي.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز C ۽ رداس 3cm آهي.

گهربل: مليل گول ۾ گهيريل چورس ناهڻ.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز C ۽ رداس 3cm سان هڪ گول ڪيو.
(ii) هڪ قطر $\overline{PR}$ ڪيو
(iii) هڪ قطر $\overline{QS}$ ناهيو جيڪو $\overline{PR}$ تي عمود هجي.
(iv) مليل گول ٽبڪن P, Q, R ۽ S تي چار برابر حصن ۾ ورهائجي ويو آهي.
(v) $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$ ڪيو. هاڻي مليل گول جو گهربل گهيريل چورس PQRS آهي.

29.2 (viii) هڪ ڏنل گول جو گهريندڙ پور پاسو ڇهه ڪندو ناهڻ:

هڪ ڏنل گول جي گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪندي کي ناهڻ جو طريقو هينئين مثال جي مدد سان واضح ڪيو ويو آهي.

مثال: مرڪز O ۽ رداس 4cm واري گول جو گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪندو ناهيو.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس 4cm آهي.

گهربل: مليل گول جو گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪندو ناهڻ.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز O ۽ رداس 4cm ڪٽي هڪ گول ڪيو.
(ii) گول تي ڪو ٽبڪو A ڪٽو.
(iii) مرڪز A ۽ $m\overline{OA}$ جي برابر رداس سان شروعات ڪندي گول کي ڇهه برابر حصن ۾ ورهائڻ لاءِ قوس ڪيو ۽ وندبيندڙ ٽبڪا A, B, C, D, E ۽ F آهن
(iv) انهن وندبيندڙ ٽبڪن تي گول جون ڇُهڻي ليڪون ڪيو.
(v) اهي ڇهڻي ليڪون هڪ بيئي کي ٽبڪن P, Q, R, S, T ۽ U تي ڪپين ٿيون.
هاڻي مليل گول جو گهربل پور پاسو ڇهه ڪندو PQRSTU آهي.

29.2 (ix) ڏنل گول ۾ هڪ گهيريل پور پاسو ڇهه ڪندو ناهڻ.

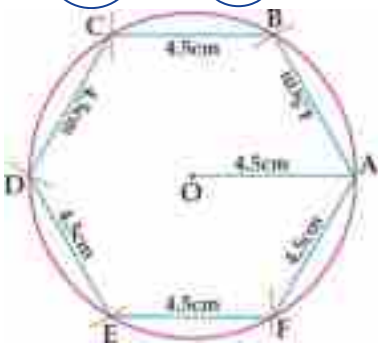
هينئين مثال جي مدد سان،ڏنل گول ۾ هڪ گهيريل پور پاسو ڇهه ڪندو ناهڻ جو طريقو واضح ڪجي ٿو.

مثال: مرڪز O ۽ رداس 4.5 cm واري گول ۾ هڪ گهيريندڙ پور پاسو ڇهه ڪندو ناهيو.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس 4.5 cm آهي.

گهربل: مليل گول ۾ گهيريل پور پاسو ڇهه ڪندو ناهڻ.

KUCHHEDU.COM



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز O ۽ رداس 4.5cm کٽي هڪ گول ڪيو.

(ii) گول تي ڪو ٽپڪو A کٽو.

(iii) مرڪز A ۽ $m\overline{AO}$ يا 4.5cm جي رداس سان شروعات ڪندي ڏنل گول کي ٽپڪن A، B، C، D، E ۽ F تي برابر حصن ۾ ورهائڻ لاءِ قوس ڪيو

(iv) $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$، $\overline{DE}$، $\overline{EF}$ ۽ $\overline{AF}$ ڪيو

هاڻي ABCDEF گهربل پور پاسو چهه ڪندو آهي جيڪو مليل گول ۾ گهيريل آهي.

مشق 29.3

1. مرڪز C ۽ 4.2cm رداس واري گول جو گهيرينڊ چورس ناهيو.
2. مرڪز O ۽ 3.6cm رداس واري گول ۾ هڪ گهيريل چورس ناهيو.
3. مرڪز O ۽ 4.8cm رداس واري گول جو گهيرينڊ پور پاسو چهه ڪندو ناهيو.
4. مرڪز C ۽ 4.4cm رداس واري گول ۾ گهيريل پورپاسو چهه ڪندو ناهيو.
5. مرڪز O ۽ 4.3cm واري گول ۾ گهيريل پور پاسو پنج ڪندو ناهيو.

(اشارو، مرڪز تي پنج يڪسان ڪندون ناهيو).

29.3 گول جون چهڻ ليڪون (Tangents to a circle)

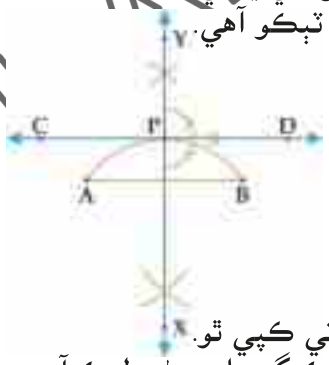
ياد ڪريو ته گول جي چهٽي ليڪ هڪ اهڙي ليڪ آهي جيڪا گول کي صرف هڪ ئي ٽپڪي تي ڇُهي ٿي.ميلاپ واري ٽپڪي تي گول جي چهٽي ليڪ ۽ رداسي ٽڪر هميشه هڪبيئي تي عمود هوندا آهن.

29.3 (i) مرڪز جو استعمال ڪري بنا، ڏنل ٽپڪي P مان مليل قوس جي چهٽي ليڪ ڪڍ جڏهن.

* P قوس جو وچيون ٽپڪو آهي.
* P قوس جي چيڙي تي آهي
* P قوس کان ٻاهر آهي.

صورت 1: جڏهن P قوس جو وچيون ٽپڪو آهي.

مرڪز جو استعمال ڪري بنا، ڏنل ٽپڪي P مان مليل قوس جي ڇُهي ليڪ ڪڍڻ جو طريقو هينين مثال سان واضح ڪجي ٿو، جڏهن ته P قوس جو وچيون ٽپڪو آهي.



مثال: هڪ قوس AB کٽو. مرڪز جو استعمال ڪري بنا، $\overset{\frown}{AB}$ جي وچين ٽپڪي P مان $\overset{\frown}{AB}$ جي چهٽي ليڪ ڪيو.

مليل: ٽپڪو P، $\overset{\frown}{AB}$ جو وچيون ٽپڪو آهي

گهربل: مرڪز جو استعمال ڪري بنا، P مان $\overset{\frown}{AB}$ تي چهٽي ليڪ ڪڍ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) هڪ قوس AB کٽو

(ii) زهه AB ڪيو.

(iii) $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overleftrightarrow{XY}$ ڪيو جيڪو قوس کي ٽپڪي P تي ڪپي ٿو.

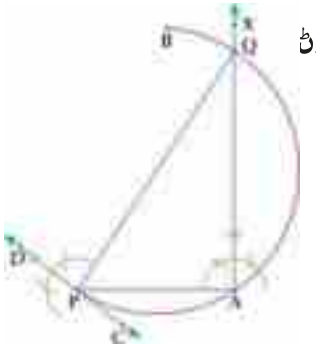
(iv) ٽپڪي P مان، $\overleftrightarrow{XY}$ تي هڪ عمود $\overleftrightarrow{CD}$ ڪيو اهڙي طرح $\overleftrightarrow{CD}$ هڪ گهربل چهٽي ليڪ آهي.

KARACHIEDU.COM

صورت 2: جڏهن P قوس جي چيڙي تي آهي.

مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، قوس جي چيڙي P مان قوس جي ڇهڻي ليک ڪڍڻ جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو.

مثال: هڪ قوس PAB ڪٽو. مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، $\overset{\frown}{PAB}$ جي ڇهڻي ليک قوس جي چيڙي P مان ڪڍو.



ملیل: ٽبڪو P، $\overset{\frown}{PAB}$ جو چيڙو آهي گهربل مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا $\overset{\frown}{PAB}$ جي ڇهڻي ليک قوس جي چيڙي P مان ڪڍڻ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز ۽ رداس پنهنجي مرضي مطابق ڪٽندي هڪ $\overset{\frown}{PAB}$ ڪڍو.

(ii) زهہ $\overline{AP}$ ڪڍو.

(iii) ٽبڪي A تي $\overline{PA}$ جي مٿان هڪ عمود $\overrightarrow{AX}$ ڪڍو جيڪو ڏنل قوس کي ٽبڪي Q تي ڪپي ٿو.

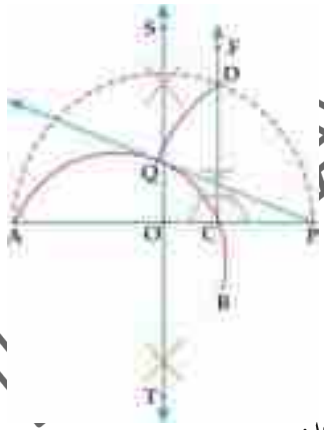
(iv) $\overline{PQ}$ ڪڍو جيڪو قوس جو قطر آهي.

(v) ٽبڪي P تي، $\overline{PQ}$ جي مٿان هڪ عمود $\overrightarrow{CD}$ ڪڍو.
هاڻي $\overleftrightarrow{CD}$ گهربل ڇهڻي ليک آهي.

صورت 3: جڏهن P قوس کان ٻاهر آهي

مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا، هڪ ٽبڪي P مان قوس جي ڇهڻي ليک ڪڍڻ جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو جڏهن ته ٽبڪو P قوس کان ٻاهر آهي.

مثال: هڪ قوس AB ڪٽو. مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا هڪ ٽبڪي P مان قوس AB جي ڇهڻي ليک ڪڍو جڏهن ته P قوس کان ٻاهر آهي.



ملیل: هڪ ٽبڪو P جيڪو قوس AB کان ٻاهر آهي.

گهربل: مرڪز جو استعمال ڪرڻ بنا ٽبڪي P مان قوس AB جي ڇهڻي ليک ڪڍڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) پنهنجي مرضي تي هڪ قوس AB ڪڍو.

(ii) $\overset{\frown}{AB}$ کان ٻاهر هڪ ٽبڪو P ڪٽو.

(iii) $\overline{AP}$ ڪڍو جيڪو ڏنل قوس کي ٽبڪي C تي ڪپي ٿو.

(iv) $\overline{AP}$ جو عمودي اڌ ڪندڙ $\overline{ST}$ ڪڍو جيڪو $\overline{AP}$ کي ٽبڪي O تي ڪپي ٿو.

(v) مرڪز O ۽ رداس $m\overline{AO}$ يا $m\overline{OP}$ جي برابر کڻي، هڪ اڌ گول ڪڍو.

(vi) ٽبڪي C تي $\overrightarrow{AP}$ جي مٿان هڪ عمود $\overrightarrow{CF}$ ڪڍو جيڪو اڳ ول کي ٽبڪي D تي ڪپي ٿو.

(vii) مرڪز P ۽ رداس $m\overline{PD}$ جي برابر کڻي هڪ قوس ڪڍو جيڪو $\overset{\frown}{AB}$ کي ٽبڪي Q تي ڪپي ٿو.

(viii) $\overrightarrow{PQ}$ ڪڍو
هاڻي $\overrightarrow{PQ}$ گهربل ڇهڻي ليک آهي.

SACHEDU.COM

29.3 (ii) هڪ ٽپڪي P مان، ڏنل گول جي ڇهڻي ليڪ ڪيڏ، جڏهن:

- P گول جي گهيري تي موجود آهي.
- P گول کان ٻاهر موجود آهي.

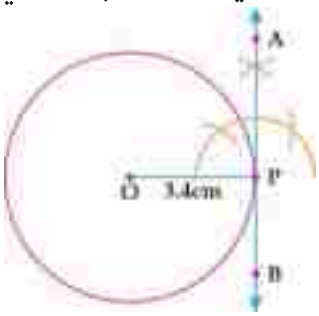
صورت 1: جڏهن ٽپڪو P، گول جي گهيري تي موجود آهي.

هڪ ٽپڪيP مان ڏنل گول جي ڇهڻي ليڪ ڪيڏ جو طريقو هيٺين مثال جي مدد سان واضح ڪجي ٿو جڏهن ته P گول جي گهيري تي موجود آهي.

مثال: 3.4cm رداس جو هڪ گول ڪيو جنهن جو مرڪز ٽپڪي O تي آهي.گول جي گهيري جي ٽپڪي P مان گول جي ڇهڻي ليڪ ڪيو.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس 3.4cm آهي ۽ P ان جي گهيري جو هڪ ٽپڪو آهي.

گهربل: ٽپڪي P تي گول جي ڇهڻي ليڪ ڪيو:



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ٽپڪي O کي مرڪز کڻي، 3.4cm رداس جو هڪ گول ڪيو.

(ii) گول جي گهيري تي هڪ ٽپڪو P کڻو

(ii) $\overline{OP}$ ڪيو.

(iii) ٽپڪيP تي، $\overline{OP}$ جي مٿان هڪ عمود $\overleftrightarrow{AB}$ ڪيو

هاڻي $\overleftrightarrow{AB}$ گهربل ڇهڻي ليڪ آهي.

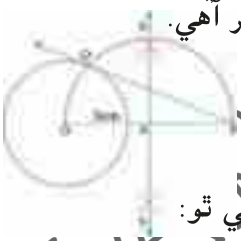
صورت 2: جڏهن ٽپڪو P گول کان ٻاهر آهي:

هڪ ٽپڪي P مان گول جي ڇهڻي ليڪ ڪيڏ جي طريقي کي هيٺين مثال جي مدد سان واضح ڪيو ويو آهي جڏهن ته P گول کان ٻاهر موجود آهي.

مثال: مرڪز O سان، 3cm رداس وارو هڪ گول ڪيو. هڪ ٽپڪي P مان گول جي ڇهڻي ليڪ ڪيو جڏهن ته P گول کان ٻاهر موجود آهي.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس 3cm آهي ۽ هڪ ٽپڪو P جيڪو گول کان ٻاهر آهي.

گهربل: هڪ ٽپڪي P مان گول جي ڇهڻي ليڪ ڪيڏ جڏهن ته P گول کان ٻاهر آهي.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) مرڪز O سان، 3cm جو هڪ گول ڪيو.

(ii) گول کان ٻاهر هڪ ٽپڪو P کڻو.

(iii) $\overline{OP}$ کي ڪيو

(iv) $\overline{OP}$ جو عمودي اڌ ڪنڊ $\overleftrightarrow{XY}$ ڪيو جيڪو ان کي ٽپڪي A تي ڪپي ٿو.

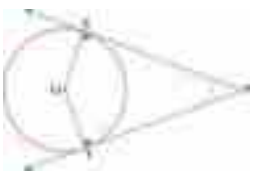
(v) مرڪز A ۽ رداس $m\overline{AO}$ جي برابر کڻي، هڪ اڌ گول ڪيو جيڪو مليل گول کي ٽپڪي Q تي ڪپي ٿو.

(vi) $\overrightarrow{PQ}$ ڪيو.

هاڻي $\overline{PQ}$ گهربل ڇهڻي ليڪ آهي.

9.3 (iii) هڪ گول جون ٻ ڇهڻي ليڪون ڪيڏ جيڪي هڪ ٻئي سان ڏنل ڪنڊ تي ملن ٿيون:

هڪ گول کڻو جنهن جو مرڪز O آهي $\overrightarrow{PS}$ ۽ $\overrightarrow{PT}$ گول جون ٻ ڇهڻي ليڪون آهن جڏهن ته $\angle P$ ٻنهي ڇهڻي ليڪن جي وچ ۾ ڪنڊ آهي.



هتي $m\angle PSO = 90°$ $(\because \overline{OS} \perp \overrightarrow{PS})$

۽ $m\angle PTO = 90°$ $(\because \overline{OT} \perp \overrightarrow{PT})$

هاڻي چوڪنڊي PSOT ۾

KARACHIEDU.COM

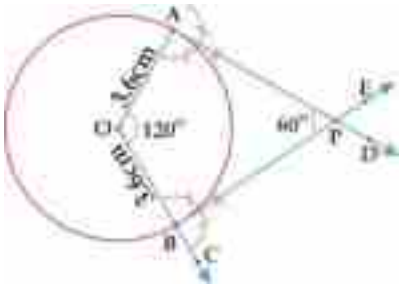
يعني تہ
$$m\angle P + m\angle PSO + m\angle O + m\angle PTO = 360°$$
$$m\angle P + 90° + m\angle O + 90° = 360°$$
$$\Rightarrow m\angle P + m\angle O = 180°$$
$$\Rightarrow m\angle O = 180° - m\angle P$$
يعني تہ ميلاپ واري ٻنڌڻ کي ملائيندڙ مرڪزي ڪنڊ، ڇڪي ليکن جي وچ واري ڪنڊ جي سپليمينٽ هوندي آهي.
ان حقيقت کي استعمال ڪندي اسين گول جون ٻہ ڇڪي ليکون ڪيڏاسين جيڪي هڪ ڏنل ڪنڊ تي ملن ٿيون. اهو طريقو هيٺين مثال جي مدد سان واضح ڪيو ويو آهي.

مثال: هڪ گول جون ٻہ ڇڪي ليکون ڪيو جڏهن تہ گول جو رداس 3.6cm ۽ مرڪز ٻڌڪي O تي آهي ۽ ڇڪي ليکون هڪٻيئي سان 60^o ماپ واري ڪنڊ ناهن ٿيون.

مليل: هڪ گول جنهن جو مرڪز O ۽ رداس 3.6cm آهي جڏهن تہ ڇڪي ليکن جي وچ واري ڪنڊ 60^o آهي.

گهربل: مليل گول جون ٻہ ڇڪي ليکون ڪيو جيڪي هڪٻئي سان 60^o جي ڪنڊ تي ملن ٿيون.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



(i) مرڪز O سان، 3.6cm رداس جو گول ڪيو
(ii) گول تي هڪ ٻڌڪو A ڪٽو ۽ ان کي O سان ملايو.
(iii) $120°$ جي $\angle AOC$ ڪيو (يعني تہ $180° - 60° = 120°$)
اهڙي طرح جو OC مليل گول کي ٻڌڪي B تي ڪپي ٿو.
(iv) ٻڌڪي A تي $\overline{OA}$ جي مٿان هڪ عمود $\overrightarrow{AD}$ ڪيو.
(v) ٻڌڪي B تي، $\overline{OB}$ جي مٿان هڪ عمود $\overrightarrow{BE}$ ڪيو.
(vi) ٻئي $\overrightarrow{AD}$ ۽ $\overrightarrow{BE}$ هڪٻئي کي ٻڌڪي P تي ڪپن ٿا.
اهڙي طرح $\overrightarrow{AP}$ ۽ $\overrightarrow{BP}$ گهربل ڇڪي ليکون آهن. اهڙي طرح جو $m\angle P = 60°$.

مشق 29.4

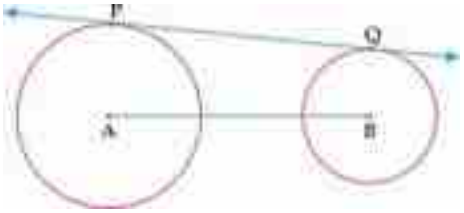
1. هڪ ننڍو قوس $\overset{\frown}{PQ}$ ڪٽو، مرڪز جو استعمال ڪري بنا $\overset{\frown}{PQ}$ جي ڇڪي ليک ڪيو جيڪا ان جي وچين ٻڌڪي مان گذري.
2. هڪ وڏو قوس $\overset{\frown}{PQR}$ ڪيو. مرڪز جو استعمال ڪري بنا، $\overset{\frown}{PQR}$ جي ڇڪي ليک ڪيو جيڪا ان جي چيڙي Q مان گذري.
3. هڪ ننڍو قوس $\overset{\frown}{XY}$ ڪٽو. مرڪز جو استعمال ڪري بنا، $\overset{\frown}{XY}$ جي ڇڪي ليک ڪيو جيڪا ٻڌڪي Z مان گذري جيڪو قوس کان ٻاهر آهي.
4. مرڪز C سان، 2.9cm رداس جو گول ڪيو. گول جي ٻڌڪي P مان گول جي هڪ ڇڪي ليک ڪيو.
5. مرڪز P سان 3.2cm رداس جو هڪ گول ڪيو گول جي ڇُهڻي ليک ڪيو ٻڌڪي Q مان جيڪو P کان 8cm جي فاصلي تي آهي.
6. مرڪز C ۽ 3.3 رداس جي گول جون ٻہ ڇڪي ليکون ڪيو جيڪي هڪٻئي سان هيٺين ڪنڊن تي ملن ٿيون. (i) $50°$ (ii) $63°$

29.3 (iv) ٻن برابر گولن جون:

* سڌيءَ طرح گڏيل ڇڪيون ليکون يا ٻاهريون ڇڪيون ليکون ڪهڙ
* آڏيون گڏيل ڇڪيون ليکون يا اندريون ڇڪيون ليکون ڪهڙ

(a) ٻن برابر گولن جون سڌيءَ طرح گڏيل ڇڪيون ليکون يا ٻاهريون ڇڪيون ليکون ڪهڙ سڌي طرح گڏيل ڇڪي ليک: (Direct Common Tangent):

SINDHIEDU.COM

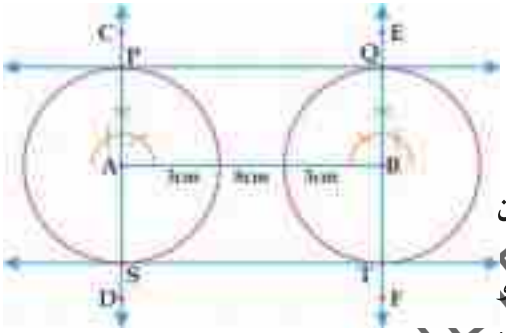


هڪ مشترڪ ڇھڻي ليڪ ڪي ٻن گولن جي سڌي طرح گڏيل ڇھڻي ليڪ يا ٻاهرين ڇھڻي ليڪ چئبو جيڪڏهن اها ڏنل ٻن گولن جي مرڪزن ڪي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر ڪي نہ ڪپي.

شڪل ۾ $\overleftrightarrow{PQ}$ سڌي طرح گڏيل ڇھڻي ليڪ آهي انهن ٻن گولن جي، جن جا مرڪز A ۽ B آهن. نوٽ ڪريو تہ $\overleftrightarrow{PQ}$ نڪتو ڪپي $\overline{AB}$ ڪي. ٻن برابر گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇھڻيون ليڪون ڪيڏ جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو.

مثال: ٻن برابر گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇھڻيون ليڪون ڪيو جڏهن تہ انهن گولن جا مرڪز ٽبڪن A ۽ B تي آهن ۽ انهن مان هرهڪ جو رداس 3cm آهي اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 8cm$.

مليل: ٻہ گول جن جا مرڪز ٽبڪن A ۽ B تي آهن ۽ هر هڪ جو رداس 3cm آهي اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 8cm$.



گهربل: ڏنل گولن تي ٻہ سڌي طرح گڏيل ڇھڻيون ليڪون ڪيڏ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 8cm ڏيگهہ جو $\overline{AB}$ ڪيو.

(ii) ٻہ برابر گول ٽبڪن A ۽ B تي ڪيو جن مان هر هڪ جو رداس 3cm آهي

(iii) ٽبڪي A تي $\overline{AB}$ جي مٿان عمود $\overleftrightarrow{CD}$ ڪيو جيڪو ان گول کي ٻن ٽبڪن P ۽ S تي ڪپي ٿو.

(iv) ٽبڪي B تي $\overline{AB}$ جي مٿان عمود $\overleftrightarrow{EF}$ ڪيو جيڪو ان گول کي ٻن ٽبڪن Q ۽ T تي ڪپي ٿو.

(v) $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{ST}$ ڪيو

(vi) هاڻي $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{ST}$ ڏنل گولن تي گهربل سڌي طرح گڏيل ڇھڻيون ليڪون آهن.

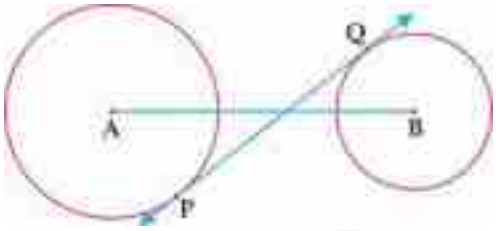
(b) ٻن برابر گولن جون گڏيل آڏيون ڇھڻيون ليڪون ڪيڏ:

آڏي گڏيل ڇھڻي ليڪ (Transverse Common Tangent):

هڪ مشترڪ ڇھڻي ليڪ کي ٻن گولن جي آڏي گڏيل ڇھڻي ليڪ يا اندرين ڇھڻي ليڪ چئبو جيڪڏهن اها ڏنل گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي ڪپي.

شڪل ۾ $\overleftrightarrow{PQ}$ آڏي گڏيل ڇھڻي ليڪ آهي ٻن گولن جي، جن جا مرڪز A ۽ B آهن.

نوٽ ڪريو تہ $\overleftrightarrow{PQ}$ ڪپي ٿو $\overline{AB}$ کي. ٻن برابر گولن جون آڏيون گڏيل ڇھڻيون ليڪون ڪيڏ جو طريقو هيٺين مثال جي مدد سان واضح ڪيو ويو آهي.



KARACHIEDU.COM

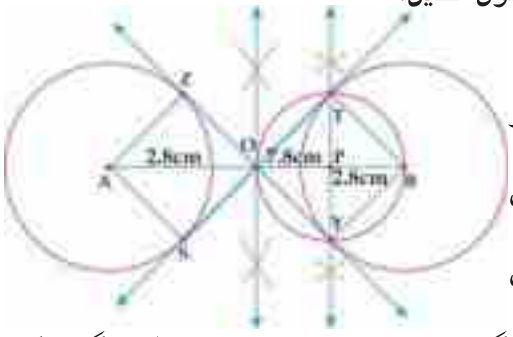
مثال: ٻن برابر گولن جون ٻه آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليکون ڪيو جڏهن ته انهن گولن مان هر هڪ جو رداس 2.8cm آهي ۽ انهن جا مرڪز ٽپڪن A ۽ Bتي آهن. اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 7.8cm$.

طريقو- I

مليل: ٻه گول جن مان هر هڪ جو رداس 2.8cm آهي ۽ انهن جا مرڪز A ۽ B تي آهن اهڙي طرح جو $m\overline{AB}=7.8cm$

گهربل: مليل گولن جون ٻه آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليکون ڪيڻ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



(i) 7.8cm ڏيگهه جو $\overline{AB}$ ڪيو

(ii) ٽپڪن A ۽ B تي ٻه گول ڪيو جن مان هر هڪ جو رداس 2.8cm آهي.

(iii) $\overline{AB}$ جو عمودي اڌ ڪنڊ ڪيو جيڪو ان کي ٽپڪي O تي ڪپي ٿو.

(iv) $\overline{OB}$ جو عمودي اڌ ڪنڊ ڪيو جيڪو ان کي ٽپڪي P تي ڪپي ٿو.

(v) مرڪز P ۽ رداس $m\overline{OP}$ جي برابر ڪٽي هڪ گول ڪيو جيڪو مرڪز B واري گول کي ٽپڪن T ۽ Y تي ڪپي ٿو.

(vi) $\overline{BT}$ ۽ $\overline{BY}$ ڪيو .

(vii) گونين (Set squares) جو استعمال ڪندي $\overline{AZ}||\overline{BY}$ ۽ $\overline{AS}||\overline{BT}$ ڪيو.

(viii) $\overleftrightarrow{ST}$ ۽ $\overleftrightarrow{YZ}$ ڪيو.

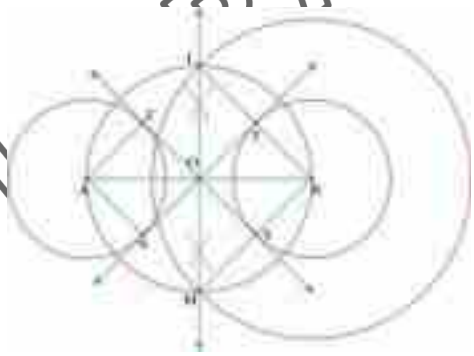
$\overline{ST}$ ۽ $\overline{YZ}$ گهربل آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليکون آهن

طريقو- 2

مليل: ٻه گول جن مان هر هڪ جو رداس 2.8cm آهي ۽ انهن جا مرڪز A ۽ Bآهن اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 7.8cm$

گهربل: مليل گولن جون ٻه آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليکون ڪيڻ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



(i) 7.8cm ڏيگهه جو $\overline{AB}$ ڪيو.

(ii) ٽپڪنA ۽ B تي ٻه گول ڪيو جن مان هر هڪ جو رداس 2.8cm آهي.

(iii) $\overline{AB}$ کي ٽپڪي O تي اڌ ڪيو ۽ مرڪز O سان ۽ رداس $m\overline{AO}$ جي برابر ڪٽي هڪ گول ڪيو.

(iv) مرڪزB ۽ (2.8cm) جي ٻيڻ 5.6cm جي برابر رداس ڪٽي هڪ گول ڪيو جيڪو مرڪز O واري پهرين گول کي ٽپڪنL ۽ M تي ڪپي ٿو.

(v) $\overline{BL}$ ۽ $\overline{BM}$ ڪيو جيڪي مرڪز B واري ننڍي گول کي ترتيبوار ٽپڪن T ۽ y تي ڪپين ٿا.

(vi) گونين (Set squares) جو استعمال ڪندي $\overline{AS}||\overline{BT}$ ، $\overline{AZ}||\overline{BY}$ ڪيو.

ACHIEDU.COM

$\overleftrightarrow{ST}$ ۽ $\overleftrightarrow{YZ}$ گهربل آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليڪون آهن.

29.3 (v) هڪ غير مساوي گولن جون:

* سڌي طرح گڏيل ڇهٽيون ليڪون يا ٻاهريون ڇهٽيون ليڪون ڪيڏ.
* آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليڪون يا اندريون ڇهٽيون ليڪون ڪيڏ.

(a) ٻن غير مساوي گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهٽيون ليڪون يا ٻاهريون ڇهٽيون ليڪون ڪيڏ:

ٻن غِير مساوي گولن جون سڌي طرح ڇهٽيون ليڪون ڪيڏ جي طريقي کي سکڻ لاءِ هيٺيون مثال مناسب آهي.

مثال: ٻن ڏنل گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهٽيون ليڪون ڪيو جن جا رداس 3.4cm ۽ 2.1cm آهن جڏهن ته انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو 7.5cm آهي.

طريقو- 1

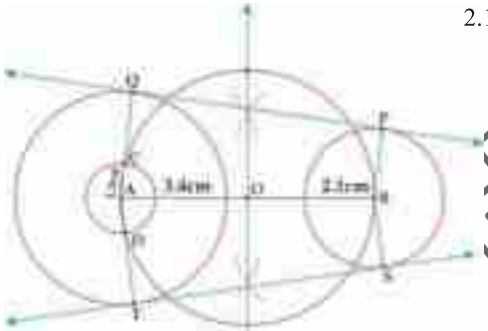
مليل: ٻه گول جن جا مرڪز A ۽ B آهن ۽ انهن جا رداس ترتيبوار 3.4cm ۽ 2.1cm آهن اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 7.5cm$

گهربل: ڏنل گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهٽيون ليڪون ڪيڏ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 7.5cm ڏيگهه جو $\overline{AB}$ ڪيو.

(ii) مرڪز A ۽ B سان، ترتيبوار رداس 3.4cm ۽ 2.1cm کڻي ٻه گول ڪيو.



(iii) $\overline{AB}$ کي ٽڪي O تي اڏ ڪيو ۽ مرڪز O سان هڪ گول ڪيو جنهن جو رداس $m\overline{AO}$ جي برابر آهي.

(iv) وڏي گول جي مرڪز A سان، رداس 1.3cm (يعني (3.4 – 2.1 = 1.3) کڻي هڪ گول ڪيو جيڪو پهرين گول کي ٽهڪن C ۽ D تي ڪپي ٿو.

(v) $\overline{AC}$ ڪيو ۽ ان کي وڌايو ته جيئن هي ڏنل هم مرڪز گول کي ٽڪي Q تي ڪپي.

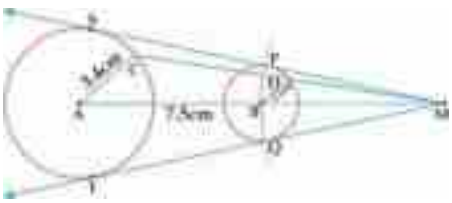
(vi) $\overline{AD}$ ڪيو ۽ ان کي وڌايو ته جيئن هي ڏنل هم مرڪز گول کي ٽڪي T تي

(vii) گونين (Set squares) جو استعمال ڪندي $\overline{BP}||\overline{AQ}$ ۽ $\overline{BS}||\overline{AT}$ ڪيو.

(viii) $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{ST}$ ڪيو.

هاڻي $\overleftrightarrow{PQ}$ ۽ $\overleftrightarrow{ST}$ گهربل سڌي طرح گڏيل ڇهٽيون ليڪون آهن.

طريقو- 2



مليل: ٻه گول جن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا ترتيبوار رداس 3.4cm ۽ 2.1cm آهن اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 7.5cm$

گهربل: ڏنل گولن تي سڌي طرح گڏيل ڇهٽيون ليڪون ڪيڏ.

KAKIEDU.COM

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 7.5cm ڊيگهه جو $\overline{AB}$ ڪيو

(ii) ٽبڪن A ۽ B تي ترتيبوار رداس 3.4cm ۽ 2.1cm جا گول ڪيو.

(iii) مرڪز A وارو گول تي ڪو ٽبڪو C ڪٽو ۽ $\overline{AC}$ ڪيو.

(iv) گونين (Set squares) جو استعمال ڪندي $\overline{BD} \| \overline{AC}$ ڪيو.

(v) $\overline{CD}$ ڪيو ۽ ان کي D کان پري وڌايو.

(vi) $\overline{AB}$ کي وڌايو تہ جيئن هو $\overleftrightarrow{CD}$ کي ٽبڪي M تي ڪپي.

(vii) مرڪز M ۽ رداس $m\overline{MB}$ جي برابر ڪٽي هڪ قوس ڪيو جيڪو مرڪز B واري گول کي ٽبڪن P ۽ Q تي ڪپي ٿو.

(viii) $\overline{MP}$ ڪيو ۽ ان کي وڌايو تہ جيئن اهو بيئي گول سان S تي ملي.

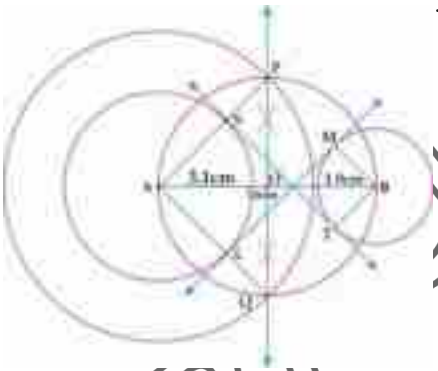
(ix) $\overline{MQ}$ ڪيو ۽ ان کي وڌايو تہ جيئن اهو بيئي گول سان ٽبڪي T تي ملي.

هاڻي $\overline{SP}$ ۽ $\overline{TQ}$ ڏنل گولن جون سڌي طرح ڳڏيل ڇهٽيون ليڪون آهن.

(b) بن غير مساوي گولن جون آڏيون ڳڏيل ڇهٽيون ليڪون يا اندريون ڇهٽيون ليڪون ڪيڏ:

اسين بن غير مساوي گولن جون آڏيون ڳڏيل ڇهٽيون ليڪون يا اندريون ڇهٽيون ليڪون ڪيڏ جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪريون ٿا.

مثال: بن گولن جون آڏيون ڳڏيل ڇهٽيون ليڪون ڪيو جڏهن تہ گولن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا رداس 3.1cm ۽ 1.9cm آهن اهڙي طرح جو انهن جي مرڪزن جي وچ ۾ فاصلو 7.6cm آهي.



ملیل: ہ گول جن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا ترتيبوار رداس 3.1cm ۽ 1.9cm آهن جڏهن $m\overline{AB}=7.6cm$

گهربل: بن ڏنل گولن جون آڏيون ڳڏيل ڇهٽيون ليڪون ڪيڏ.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 7.6cm ڊيگهه جو $\overline{AB}$ ڪيو.

(ii) ٽبڪن A ۽ B تي ترتيبوار 3.1cm ۽ 1.9cm رداس جا گول ڪيو

(iii) ٽبڪي O تي $\overline{AB}$ کي اڏ ڪريو ۽ مرڪز O ۽ رداس $m\overline{OA}$ جي برابر ڪٽي هڪ گول ڪيو.

(iv) مرڪز A (وڏي گول جو مرڪز) ۽ رداس 5cm (يعني 3.1cm+1.9cm=5cm) سان هڪ گول ڪيو جيڪو پهرين گول کي ٽبڪن P ۽ Q تي ڪپي ٿو.

(v) $\overline{AP}$ ڪيو جيڪو ڏنل وڏي گول کي ٽبڪي S تي ڪپي ٿو.

(vi) $\overline{AQ}$ ڪيو جيڪو ڏنل وڏي گول کي ٽبڪي L تي ڪپي ٿو.

(vii) $\overline{BM} \| \overline{AQ}$ ۽ $\overline{BT} \| \overline{AP}$ ڪيو.

(viii) $\overleftrightarrow{ST}$ ۽ $\overleftrightarrow{LM}$ ڪيو

هاڻي $\overleftrightarrow{ST}$ ۽ $\overleftrightarrow{LM}$ گهربل آڏيون ڳڏيل ڇهٽيون ليڪون آهن.

KARACHIEDU.COM

(vi) 29.3

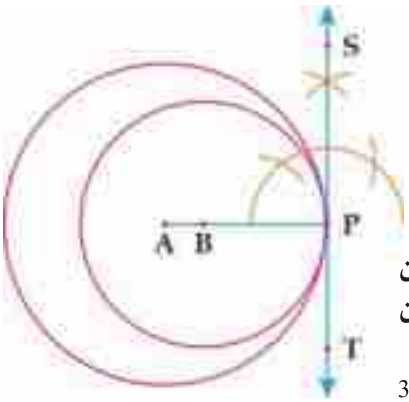
* بن غير مساوي ڇُهندڙ گولن جي ڇھٽي ليک ڪيڍ.
* بن غير مساوي ڪپيندڙ گولن جي ڇھٽي ليک ڪيڍ.

(a) **بن غير مساوي ڇُهندڙ گولن جي ڇھٽي ليک ڪيڍ.**

هتي ٻه صورتون آهن

صورت 1: جڏهن گول اندريان ڇهن ٿا.

اهو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪجي ٿو.



مثال: بن غير مساوي گولن جي ڇھٽي ليک ڪيو، ان گولن جا رداس 3cm ۽ 2cm ۽ مرڪز ترتيبوار A ۽ B آهن جڏهن ته ٻئي گول اندريان ڇُهن ٿا.

مليل: ٻه گول جن جا مرڪز A ۽ B ۽ ترتيبوار رداس 3cm ۽ 2cm آهن. اهي گول اندريان ڇُهن ٿا.

گهربل: انهن گولن تي هڪ ڇھٽي ليک ڪيڍ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ٽپڪي A کي مرڪز ڪٽي، 3cm رداس جو وڏو گول ڪيو.
(ii) ان گول تي کو ٽپڪو P ڪٽو ۽ $\overline{AP}$ ڪيو
(iii) ٽپڪي P کان 2cm جي فاصلي تي $\overline{AP}$ تي هڪ ٽپڪو B ڪٽو.
(iv) مرڪز B ۽ رداس 2cm ڪٽي هڪ گول ڪيو جيڪو وڏي گول کي ٽپڪي P تي ڇُهي ٿو.
(v) ميلاپ واري ٽپڪي P تي $\overline{AP}$ جي مٿان هڪ عمود $\overleftrightarrow{ST}$ ڪيو.
هاڻي $\overleftrightarrow{ST}$ گهربل ڇُهٽي ليک آهي.

صورت 2: جڏهن گول ٻاهريان ڇُهن ٿا.

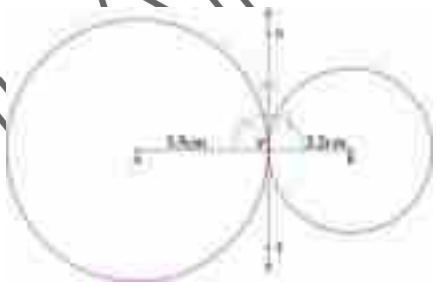
اهو طريقو هيٺين مثال ۾ واضح ڪيو ويو آهي.

مثال: هڪ ڇھٽي ليک ڪيو بن غير مساوي گولن تي جن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا رداس ترتيبوار 3.5cm ۽ 2.2cm آهن جڏهن ته ٻئي گول هڪٻئي کي ٻاهريان ڇُهن ٿا.

مليل: ٻه گول جن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا رداس ترتيبوار ۽ آهن 3.5cm ۽ 2.2cm جڏهن ته گول هڪٻئي کي ٻاهريان ڇُهن ٿا.

گهربل: انهن گولن جي هڪ ڇھٽي ليک ڪيڍ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:



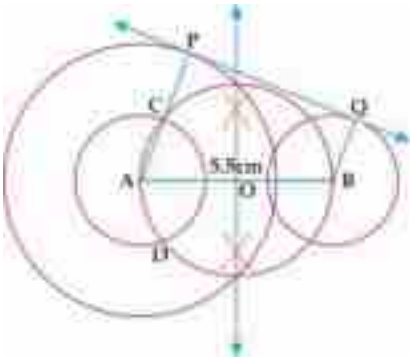
(i) مرڪزA سان 3.5cm رداس جو هڪ گول ڪيو
(ii) گول تي هڪ ٽپڪو P ڪٽو.
(iii) $\overline{AP}$ ڪيو ۽ ان کي ٽپڪي B تائين وڌايو
اهڙي طرح جو $m\overline{PB}=2.2cm$
(iv) مرڪزP ۽ رداس 2.2cm سان هڪ گول ڪيو جيڪو پهرين گول کي ٽپڪي P تي ڇُهي ٿو.
(v) ميلاپ واري ٽپڪي P تي $\overline{AP}$ جي مٿان هڪ عمود $\overleftrightarrow{ST}$ ڪيو:
هاڻي $\overleftrightarrow{ST}$ گهربل ڇُهٽي ليک آهي.

SINDHACHIEDU.COM

(b) **بن غير مساوي ڪپيندڙ گولن جي هڪ ڇهٽي ليک ڪڍڻ:**

ان جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪيل آهي.

مثال: بن غير مساوي ڪپيندڙ گولن جي هڪ ڇُهٽي ليک ڪيو جڏهن ته انهن گولن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا ترتيبوار رداس 4cm ۽ 2cm آهن اهڙي طرح جو $m\overline{AB}=5.5cm$



مليل: بہ غير مساوي ڪپيندڙ گول جن جا مرڪز A ۽ B ۽ انهن جا ترتيبوار رداس 4cm ۽ 2cm آهن جڏهن ته $m\overline{AB}=5.5cm$

گهربل: بهي گولن جي هڪ ڇهٽي ليک ڪڍڻ

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 5.5cm ڏيگهه جو $\overline{AB}$ ڪيو.

(ii) مرڪز A ۽ B سان، ترتيبوار رداس 4cm ۽ 2cm جا گول ڪيو.

(iii) مرڪز A (وڏي گول جو مرڪز) ۽ 2cm (يعني 4cm - 2cm = 2cm) رداس جو هڪ گول ڪيو.

(iv) $\overline{AB}$ کي ٽيڪي O تي اڌ ڪريو. مرڪز O ۽ رداس $m\overline{AO}$ جي برابر ڪٽي هڪ گول ڪيو جيڪو مرڪز A واري ننڍي گول کي ٽيڪن C ۽ D تي ڪپي ٿو.

(v) $\overline{AC}$ ڪيو ۽ ان کي وڌايو ته جيئن اهو مرڪز A واري وڏي هم مرڪز گول سان ٽيڪي P تي ملي.

(vi) گونين (Set squares) جو استعمال ڪندي $\overline{BQ}\|\overline{AP}$ ڪيو.

(vii) $\overline{PQ}$ ڪيو. هاڻي $\overleftrightarrow{PQ}$ گهربل ڇهٽي ليک آهي.

29.3 (vii) هڪ گول ڪڍڻ جيڪو.

* ڏنل ڪنڊ جي بنهن بانهن کي ڇُهي.
* ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ بن ليکن کي ڇُهي ۽ انهن ليکن جي وچ ۾ ڪنهن ٽيڪي مان گذري.
* ميلاپ ڏانهن مائل تن ليکن کي ڇُهي

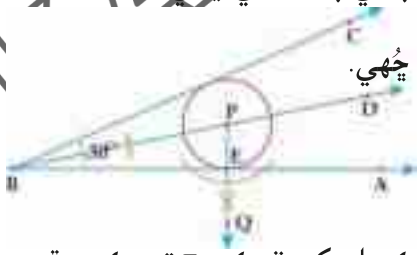
(a) **هڪ گول ڪڍڻ جيڪو ڏنل ڪنڊ جي بنهي بانهن کي ڇُهي ٿو.**

اسين، هڪ گول جيڪو ڏنل ڪنڊ جي بنهي بانهن کي ڇُهي ڪڍڻ، جو طريقو هيٺين مثال سان واضح ڪريون ٿا.

مثال: هڪ گول ڪيو جيڪو 30^o ماپ واري ڪنڊ ABC جي بنهي بانهن کي ڇُهي ٿو.

مليل: 30^o ماپ واري هڪ ڪنڊ ABC.

گهربل: هڪ گول ڪڍڻ جيڪو ڏنل ڪنڊ جي بنهي بانهن کي ڇُهي.



جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) 30^o جي هڪ $\angle ABC$ ڪيو.

(ii) $\angle ABC$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{BD}$ ڪيو.

(iii) $\overrightarrow{BD}$ تي کو ٽيڪو P ڪٽو.

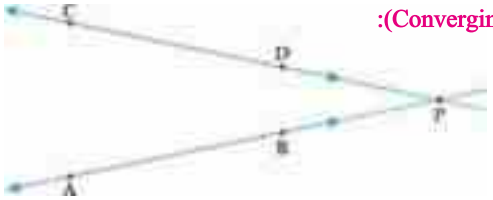
(iv) ٽيڪي P مان، $\overrightarrow{BA}$ جي مٿان هڪ عمود $\overrightarrow{PQ}$ ڪيو جيڪو ان کي ٽيڪي E تي ڪپي ٿو.

(v) مرڪز P ۽ رداس $m\overline{PE}$ جي برابر ڪٽي هڪ گول ڪيو جيڪو $\overrightarrow{BA}$ ۽ $\overrightarrow{BC}$ کي ڇُهي ٿو. اهو گهربل گول آهي.

ARACHIEDU.COM

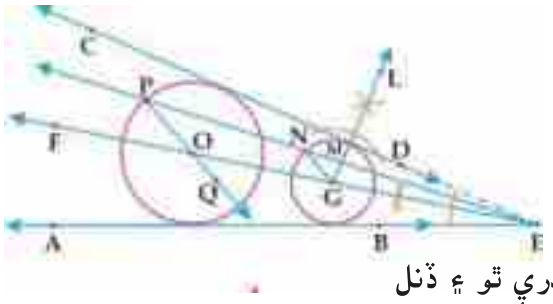
(b) **هڪ گول ڪيڊ جيڪو ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ٻن ليکن کي ڇُهي ۽ انهن ليکن جي وچ ۾ ڪنهن ٽڪي مان گذري.**

ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليکون (Converging Lines):



ٻہ يا وڌيڪ ليکون جيڪي هڪبئي جي ويجهو ٽيندیون وجن ۽ آخر ڪار ڪنهن ٽڪي تي وڃي ملن. انهن ليکن کي ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليکون چئبو آهي ۽ واري شڪل ۾ ٻہ ليکون AB ۽ CD ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليکون آهن ۽ اهي آخرڪار هڪ ٽڪي P تي ملن ٿيون.

مثال: هڪ گول ڪيو جيڪو ٻن ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ٻن ليکن $\overleftrightarrow{AB}$ ۽ $\overleftrightarrow{CD}$ جي وچ واري ٽڪي P مان گذري ۽ انهن ٻنهي ليکن کي ڇُهي ٿو



ملیل: ٻہ ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليکون AB ۽ CD ۽ انهن جي وچ واري هڪ ٽڪي P

گهربل: هڪ گول ڪيڊ جيڪو ٽڪي P مان گذري ٿو ۽ ڏنل ٻنهي ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليکن کي ڇُهي ٿو.

جوڙجڪ جا ڏاڪا:

(i) ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ٻہ ليکون AB ۽ CD ڪيو جيڪي ٽڪي E تي ملن ٿيون.

(ii) انهن ٻنهي ليکن جي وچ ۾ هڪ ٽڪو P ڪڍو.

(iii) $\angle E$ جو اندريون اڌ ڪندڙ $\overrightarrow{EF}$ ڪيو.

(iv) $\overrightarrow{EF}$ تي کو ٽڪو G ڪڍو.

(v) ٽڪي G مان، مرڪز $\overrightarrow{EC}$ جي مٿان هڪ عمود $\overrightarrow{GL}$ ڪيو جيڪو ان سان ٽڪي M تي ملي ٿو.

(vi) مرڪز G ۽ رداس $m\overline{GM}$ جي برابر ڪٽي، هڪ گول ڪيو جيڪو ٻنهي ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليکن کي ڇُهي ٿو.

(vii) $\overrightarrow{EP}$ ڪيو جيڪو ان گول کي ٽڪي N تي ڪپي ٿو.

(viii) $\overline{NG}$ ڪيو. $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{NG}$ پڻ ڪيو.

(ix) $\overrightarrow{PQ}$ ڪپي ٿو $\overrightarrow{EF}$ کي ٽڪي O تي.

(x) مرڪز O ۽ رداس $m\overline{OP}$ جي برابر ڪٽي، هڪ گول ڪيو جيڪو ٽڪي P مان گذري ٿو ۽ ٻنهي ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليکن کي ڇهي ٿو.

اهو گهربل گول آهي.

(c) **هڪ گول ڪيڊ جيڪو ٽن ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليکن کي ڇهي.**

ڪنهن متاڇري (Plane) ۾ هڪ اهڙو گول ڪيڊ جيڪو ٽن ميلاپ ڏانهن مائل ٽيندڙ ليکن کي ڇهي اهو ممڪن نہ آهي. پر اهو خلا (Space) ۾ ممڪن هي جيڪو هن ڪتاب جي دائري کان ٻاهر آهي.

KARACHIEDU.COM

مشق 29.5

1. ٻہ برابر گول ڪيو جنهن مان هر هڪ جو رداس 3.3cm ۽ مرڪز ٽنبڪن A ۽ B تي آهن اهڙي طرح جو $m\overline{AB} = 7.8cm.$
   (a) انهن گولن جون سڌيءَ طرح گڏيل ڇهٽيون ليڪون ڪيو.
   (b) انهن گولن جون آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليڪون ڪيو.
2. ٻہ غير مساوي گول ڪيو جن جا رداس 3.3cm ۽ 2.1 cm آهن ۽ مرڪز ترتيبوار ٽنبڪن A ۽ B تي آهن. اهڙي طرح جو $m\overline{AB}=8cm.$
   (a) انهن گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهٽيون ليڪون ڪيو.
   (b) انهن گولن جون آڏيون گڏيل ڇهٽيون ليڪون ڪيو.
3. ٻن غير مساوي گولن جي هڪ ڇهٽي ليڪ ڪيو. انهن گولن جا مرڪز A ۽ B ۽ ترتيبوار رداس 3.8cm ۽ 2.2 cm آهن. جڏهن تہ
   (i) گول اندريان ڇهن ٿا.
   (ii) گول ٻاهريان ڇهن ٿا.
   (iii) گول هڪبئي کي ڪپين ٿا ۽ $m\overline{AB}=5.6cm.$
4. هڪ گول ڪيو جيکو ڏنل ڪنڊن جي ٻنهي پاسن کي ڇهي ٿو. (i) 35° (ii) 40°
5. هڪ گول ڪيو جيکو هڪ ٽنبڪي M مان گذري جيکو ٻن ميلاپ ڏانهن مائل ليکن PQ ۽ ST جي وچ ۾ موجود آهي اهڙي طرح جو گول انهن ٻنهي ليکن کي ٽپ ڇُهي ٿو.

جائزي واري مشق 29

درست جواب تي نشان لڳايو.

(i) غير پور وڇوٽ _____ جا عمودي اڌ ڪندڙ گول جي مرڪز تي ڪپين ٿا.
(a) رداسي ٽکر (b) زهہ (c) ڇهٽيون ليڪون (d) ڪوبہ نہ

(ii) هڪڙي ٽنبڪي مان _____ گول گذري سگهن ٿا.
(a) هڪ (b) ٻہ (c) ٽي (d) لا محدود

(iii) ٽن غير هم ليکي ٽنبڪن مان _____ گول گذري سگهن ٿا.
(a) هڪ (b) ٻہ (c) ٽي (d) لا محدود

(iv) پور پاسو گهڻ ڪندي جون _____ ڪنڊون ماپ ۾ برابر هونديون آهن.
(a) اندريون (b) ٻاهريون (c) ٻئي a ۽ b (d) ڪوبہ نہ

(v) پور پاسو ڇهہ ڪندي جي هر هڪ اندرين ڪنڊ _____ جي برابر هوندي آهي.
(a) 90° (b) 108° (c) 120° (d) 135°

(vi) هڪ گول جيکو ٽڪندي جي سيني پاسن کي ڇُهي، ان کي _____ چئبو آهي.
(a) گهيرينڊڙ گول (b) گهيريل گول (c) ٻاهريون گول (d) ٽگولو (Tricircle)

(vii) هڪ گول جيکو ٽڪندي جي هڪ پاسي کي ٻاهريان ۽ ٻن وڌيل پاسن کي اندريان ڇُهي ٿو ان کي _____ چئبو آهي.
(a) ٻاهريون گول (b) گهيرينڊڙ گول (c) گهيريل گول (d) ٽگولو

(viii) گهيريل گول جي مرڪز کي _____ چئبو آهي.
(a) ٻاهريون مرڪز (b) اندريون مرڪز (c) مڌياني مرڪز (d) عمودي مرڪز

(ix) ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اڌ ڪندڙ هڪبئي کي _____ تي ڪپين ٿا.
(a) گهيريندڙ مرڪز (b) مڌياڻي مرڪز (c) اندريون مرڪز (d) ٻاهريون مرڪز

(x) ٽڪنڊي جي ڪنڊن جي اندرين اڌ ڪندڙن جي ميلاپ واري ٽپڪي کي _____ چئبو آهي.
(a) عمودي مرڪز (b) مڌياڻي مرڪز (c) اندريون مرڪز (d) ٻاهريون مرڪز

(xi) جيڪڏهن هڪ پور پاسو ڇهه ڪنڊو گول ۾ گهيريل آهي ته پوءِ ڇهه ڪنڊي جي هر هڪ پاسي جي ڊيگهه گول جي رداس کان:
(a) $<$ (b) $>$ (c) $=$ (d) $\leq$

(xii) ميلاپ واري ٽپڪي تي ڇهڻي ليڪ ۽ رداسي ٽڪر جي وچ ۾ _____ ڪنڊ هوندي آهي.
(a) عڪسي (b) سوڙهي (c) ويڪري (d) گوني

(xiii) ميلاپ واري ٽپڪن کي ملائيندڙ گول جي مرڪزي ڪنڊ، ڇهڻي ليڪن جي ڪنڊ جو _____ هوندي آهي.
(a) ڪعب (b) چورس (c) سپليمينٽ (d) ڪامپليمينٽ

(xiv) _____ ڇهڻيون ليڪون، گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي نه ڪپنديون آهن.
(a) عمودي (b) ٻاهريون (c) آڏيون (d) اندريون

(xv) ٻن برابر گولن جون سڌي طرح گڏيل ڇهڻيون ليڪون _____ هونديون آهن.
(a) ڪپيندڙ (b) نهڪندڙ (c) برابر (d) پورو چوٽ

(xvi) ٻن برابر گولن جون _____ گڏيل ڇهڻيون ليڪون گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي وچين ٽپڪي تي ڪپين ٿيون.
(a) سڌي طرح (b) آڏيون (c) ٻاهريون (d) پورو چوٽ

(xvii) جيڪڏهن 5cm ۽ 2cm رداس وارا ٻه گول هڪبئي کي ٻاهريان ڇهن ٿا ته پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ ۾ فاصلو _____ آهي.
(a) 5 cm (b) 10 cm (c) 3 cm (d) 7 cm

(xviii) جيڪڏهن 5cm ۽ 2cm رداس وارا ٻه گول هڪبئي کي اندريان ڇهن ٿا ته پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ ۾ فاصلو _____ آهي.
(a) 5 cm (b) 10 cm (c) 3 cm (d) 7 cm

(xix) ٻه يا وڌيڪ ميلاپ واري ٽپڪي ڏانهن مائل ٽيندڙ ليڪون هميشه هڪبئي کي _____ تي ڪپين ٿيون.
(a) هڪ کان وڌيڪ ٽپڪن (b) هڪڙي ٽپڪي (c) ٻن ٽپڪن (d) هڪ کان وڌيڪ ٽپڪن

(xx) ٽي يا وڌيڪ پاسن واري بند شڪل کي _____ چئبو آهي.
(a) پنج ڪنڊو (b) ڇهه ڪنڊو (c) ست ڪنڊو (d) گهٽ ڪنڊو

خلاصو

- بن غير پوروچوت زهه عمودي اڌ ڪندڙ ڪيڏ سان گول جي مرڪز جو هنڌ معلوم ڪري سگهجي ٿو. اهي اڌ ڪندڙ هڪبئي کي گول جي مرڪز تي ڪپين ٿا.
- ٽن غير هم ليکي ٽپڪن مان رڳو هڪ ئي گول ڪڍي سگهجي ٿو.
- مرڪز معلوم ڪرڻ بنا، هڪ گول کي پورو ڪري سگهجي ٿو جڏهن هڪ قوس مليل هجي ۽ اهو پور پاسو گهڻ ڪندي جي مدد سان ٽيندو.
- گهيريندڙ گول هميشه گهڻ ڪندي جي سيني چوٽين مان گذرندو آهي.
- ڪنهن ٽڪندي جو گهيريل گول هميشه ٽڪندي جي سيني پاسن کي ڇُهي ٿو.
- ٽڪندي جو ٻاهريون گول ٽڪندي جي هڪ پاسي کي ٻاهريان ۽ بن وڌيل پاسن کي اندران ڇُهي ٿو.
- ٽڪندي جا ٽي ٻاهريان گول نهي سگهجن ٿا.
- ڇهڻي ليڪ اها ليڪ آهي جيڪا گول کي رڳو هڪ ئي ٽپڪي تي ڇهي ٿي.
- ڪپيندڙ ليڪ هميشه گول کي بن ٽپڪن تي ڪپيندي آهي.
- ميلاپ واري ٽپڪي تي گول جي ڇهڻي ليڪ هميشه رداسي ٽڪر تي عمود هوندي آهي.
- گول جي گهيري جي هڪ ٽپڪي مان رڳو هڪ ئي ڇهڻي ليڪ ڪڍي سگهجي ٿي.
- گول جي ڪنهن ٻاهرين ٽپڪي کان گول جون رڳو ٻه ڇهڻيون ليڪون ڪڍي سگهجن ٽيون.
- ميلاپ واري ٽپڪن کي ملائيندڙ گول جي مرڪزي ڪنڊ، گول جي ڇهڻي ليڪن جي وچ واري ڪنڊ جو سپليمينٽ هوندي آهي.
- جيڪڏهن ڪا ليڪ هڪ کان وڌيڪ گولن جي ڇهڻي ليڪ آهي تہ پوءِ ان کي مشترڪ ڇهڻي ليڪ چئبو آهي.
- بن مليل گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي گول جون سڀي طرح گڏيل ڇهڻيون ليڪون نہ ڪپنديون آهن.
- مليل گولن جون آڏيون گڏيل ڇهڻيون ليڪون هميشه انهن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪر کي ڪپنديون آهن.
- جيڪڏهن ٻه گول هڪبئي کي ٻاهريان ڇُهن ٿا تہ پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي جوڙ اُپت جي برابر هوندو آهي.
- جيڪڏهن ٻه گول هڪ ٻئي کي اندريان ڇهن ٿا تہ پوءِ انهن جي مرڪزن جي وچ وارو فاصلو انهن جي رداسن جي فرق جي برابر هوندو آهي.
- ميلاپ واري ٽپڪي ڏانهن مائل ٽيندڙ ليڪون هڪبئي جي ويجهو ٽيندڙ رهنديون آهن ۽ آخرڪار هڪ ٽپڪي تي ملن ٽيون.



ٽرگنامیٽري جو تعارف

INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY

شاگردن جي سکيا جا حاصلات

هي يونٽ پڙهڻ کانپوءِ شاگرد ان قابل ٿي ويندا تہ:

- بنياد 60 واري عددي نظام ۾ ڪنڊ جي ماپ ڪري سگھن. (ڊگريون، منٽ ۽ سيڪنڊ).
- ڊگري، منٽ ۽ سيڪنڈ ($D^o\ M'\ S''$) ۾ ڏنل ڪنڊ کي ڏهائي صورت (ڏهائي جي بن درجن تائين) ۾ مٽائي سگھن ۽ ان جو ابتڙ ڪن.
- ريڊيان (Radian) کي بيان ڪن (گولائي واري نظام ۾ ڪنڊ جي ماپ) ۽ ريڊيان ۽ ڊگري ماپن جي وچ ۾ تعلق کي ثابت ڪن.
- l=ro وارو اصول قائم ڪن جڏهن تہ گول جو رداس t ، قوس جي ڊيگهہ l ، ۽ ريڊيانن ۾ ماپيل مرڪزي ڪنڊ θ آهي.
- ثابت ڪريو تہ گول جي سيڪٽر جي ايراضي $\frac{1}{2}r^2\theta$ يا $\frac{1}{2}$ lr آهي.
- بيان ۽ سجاٽپ ڪن.

a. عام ڪنڊون(هم انتهائي ڪنڊون) (conterminal angles)

b. معياري ٻيهڪ ۾ ڪنڊ

- چوڻين ۽ چوڻاني ڪنڊن جي سجاٽپ ڪن
- ٽرگنامیٽري نسبتن ۽ انهن جي اُبتڙن کي ايڪي واري گول جي مدد سان بيان ڪن
- 30^o، 45^o ۽ 60^o جي ٽرگنامیٽري نسبتن جي قيمتن جو دوُر ڪن
- مختلف چوڻن ۾ ٽرگنامیٽري نسبتن جي نشانين جي سجاٽپ ڪن.
- باقي رهيل ٽرگنامیٽري نسبتن جون قيمتون لهن جيڪڏهن ڪا هڪ ٽرگنامیٽري نسبت مليل هجي.
- 0^o، 90^o، 180^o، 270^o ۽ 360^o جي ٽرگنامیٽري نسبتن جون قيمتون لهن.
- ٽرگنامیٽري واريون آئيڊنٽيٽين يا بنيادي فارمولن کي ثابت ڪن ۽ مختلف ٽرگنامیٽري وارا تعلق ظاهر ڪن.
- اُوچائي ۽ هيناهين واريون ڪنڊون لهن
- اُوچائي ۽ هيناهين وارن ڪنڊن تي مشتمل عام زندگي جا مسئلا حل ڪن.

تعارف:

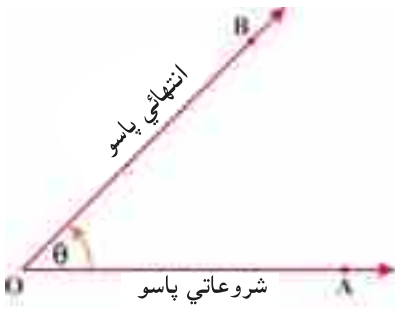
لفظ ترڳنامیٽري يوناني لفظن "tri" (ٽي) "gono" (ڪنڊون) ۽ "Metron" (ماپ) مان نهيل آهي. ترڳنامیٽري جي لغوي معنيٰ آهي: ٽڪنڊي جي ماپ. رياضي جي اها شاخ يونانين 330 ق . م ۾ متعارف ڪرائي ان جو واسطو ٽڪنڊي جي حل سان آهي. ان جو گهڻو استعمال طبيعات، جهاز راني ، فلڪيات، نقشي سازي وغيره ۾ ٿيندو آهي.

30.1 هڪ ڪنڊ جي ماپ (Measurement of an Angle):

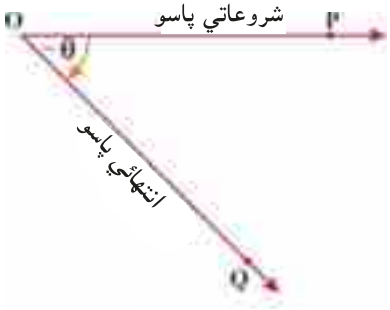
ڪنڊ اهڙن بن شعاعن جو ميلاپ آهي جن جو منڊ (چوٽي) ساڳيو هجي. شعاعن مان هڪ کي شروعاتي پاسو (initial side) چئبو آهي. ۽ بيئي کي "انتهائي پاسو" (terminal side) چئبو آهي.

ڪنڊ جي ماپ شروعاتي پاسي کان انتهائي پاسي ڏانهن ڦيري جي رخ تي منحصر ڪندي آهي. گهڙي جي اُبتي ڦيڙي واري رخ ۾ ماپيل ڪنڊ کي "مثبت ڪنڊ" ڪٽبو آهي جيئن شڪل (a) ۾ ڏيکاريل آهي ۽ گهڙي جي سبتي ڦيڙي واري رخ ۾ ماپيل ڪنڊ کي منفي ڪنڊ ڪٽبو آهي جيئن شڪل (b) ۾ ڏيکاريل آهي.

نوٽ: شعاعن کي ڪنڊ جون بانهون پڻ چئبو آهي ۽ انهن جي مشترڪ منڊ کي ڪنڊ جي چوٽي چئبو آهي



شڪل (a)



شڪل (b)

هڪ ڪنڊ معياري بيهڪ (Standard position) ۾ چورائبي جيڪڏهن ان جو شروعاتي حصو واڌو *x-axis* ۽ ان جي چوٽي اصل ٽپڪي (origin) تي هجي.

30.1 (أ) بنياد 60 واري عدي نظام ۾ ڪنڊ جي ماپ ڪرڻ (ڊگريون، منٽ ۽ سيڪنڊ) :

جيڪڏهن شروعاتي پاسو (بانهن) $\overrightarrow{OA}$ گهڙي جي اُبتي رستي واري رخ ۾ هڪ ڦيرو مڪمل ڪري ٿو ته پوءِ نهيل ڪنڊ 360 ڊگرين يا 360^{o} واري ڪنڊ ڪونبي يعني ته گول جو گهيرو 360 برابر قوسن ۾ ورهائجي ٿو. گول جي مرڪز تي اهڙي قوس سان نهيل ڪنڊ هڪ ڊگري ڪونبي آهي ان کي 1^{o} سان ظاهر ڪبو آهي. هر هڪ ڊگري 60 برابر حصن ۾ ورهائجي ٿي ۽ هر هڪ حصي کي هڪ منٽ چئبو آهي ۽ ان کي $1'$ سان ظاهر ڪبو آهي. ساڳي ريت هڪ منٽ ۾ 60 برابر حصن ۾ ورهائجي ٿو ۽ هر هڪ حصي کي 1 سيڪنڊ چئبو آهي ۽ ان کي $1''$ سان ظاهر ڪبو آهي اهڙي طرح 1 منٽ، هڪ ڊگري جو ستٺ هون (60^{th}) حصو آهي ۽ هڪ سيڪنڊ، هڪ ڊگري جو 3600 هون (3600^{th}) حصو آهي. اهو نظام جنهن ۾ ڪنڊ کي ڊگرين، منٽن ۽ سيڪنڊن ۾ ماپيو وڃي، ان کي بنياد 60 وارو عددي نظام چئبو آهي. اهڙي طرح هڪ ڊگري مڪمل ڦيري جو 360 هون حصو آهي. (يعني $\frac{1}{360}$ هون حصو) ۽ ان کي 1^{o} سان ظاهر ڪبو آهي. ان جي وڌيڪ ورهاست هينئين ريت آهي.

$$1^\circ = 60 \text{ منٽ} = 60'$$

$$1' = 60 \text{ سيڪنڊ} = 60''$$

مثال طور $30^\circ\ 20'\ 10''$ ڊگري، 20 منٽ ۽ 10 سيڪنڊ نشانين ۾ هن ريت لکبا:

30.1 (ii) ڊگري، منٽ ۽ سيڪنڊ ($D^\circ\ M'\ S''$) ۾ ڏنل ڪنڊ کي ڏهائي صورت (ڏهائي جي بن درجن تائين) ۾ مٽائڻ ۽ ان جو ابتڙ ڪرڻ:

ان سيڪشن ۾، اسين منٽن ۽ سيڪنڊن کي ڊگرين ۾ مٽائيندا سين. اهو ڪرڻ لاءِ منٽن کي 60 ۽ سيڪنڊن کي 3600 سان ونڊ ڪبو آهي. سادو ڪرڻ کانپوءِ اسين گهربل ڏهائي صورت حاصل ڪندا سين

مثال 1:

$30^\circ\ 30'\ 10''$ کي ڊگرين ۾ مٽايو ۽ ڏهائي صورت ۾ لکو.

حل:

جيئن ته $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

$\therefore$ تنهنڪري $30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$

۽ $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$

$$10'' = \left(\frac{10}{3600}\right)^\circ = \left(\frac{1}{360}\right)^\circ$$

$$\therefore \quad 30^\circ\ 30'\ 10'' = \left(30 + \frac{1}{2} + \frac{1}{360}\right)^\circ$$

$$= [30 + 0.5 + 0.003]^\circ$$

$$= 30.503^\circ$$

$$= 30.50^\circ \qquad \text{(ڏهائي جي بن درجن تائين)}$$

مثال 2:

12.51° کي $D^\circ\ M'\ S''$ واري صورت ۾ مٽايو

حل:

$$12.51^\circ = 12^\circ + (0.51)^\circ$$

$$= 12^\circ + (0.51 \times 60)' \qquad (\ 1^\circ = 60'\ )$$

$$= 12^\circ + (30.6)'$$

$$= 12^\circ + 30' + (0.6)'$$

$$= 12^\circ 30' + (0.6 \times 60)'' \qquad (\because 1' = 60'')$$

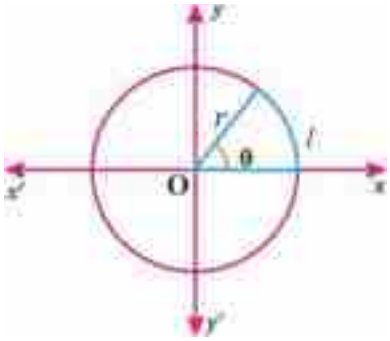
$$= 12^\circ 30' 36''$$

30.1 (iii) ريڊيان (Radian) کي بيان ڪرڻ (گولائي واري نظام ۾ ڪنڊ جي ماپ) ۽ ريڊيان ۽ ڊگري ماپن جي وچ ۾ تعلق کي ثابت ڪرڻ:

ريڊيان ڪنڊ کي ماپڻ جو هڪ بيو ايڪو آهي جيڪو قوس جي ڊيگهه ۽ گول جي رداس جي نسبت جي برابر آهي.

يعني ته $\theta = \frac{l}{r}$ جڏهن ته θ مرڪزي ڪنڊ جي ريڊيان ۾ ماپ، l قوس جي ڊيگهه آهي ۽ r

گول جي رداس آهي. اهو نظام جنهن ۾ ڪنڌ کي ريڊيان ۾ ماپيو وڃي. ان کي گولائي وارو نظام چئبو آهي. اهڙي طرح گولائي نظام ۾ ڪا ڪنڌ 1 ريڊيان جي کونٽي جيڪڏهن اها ڪنڌ رداس جي برابر قوس سان مرڪز تي نهيل ڪنڌ آهي. (جيئن ته شڪل 30.1 ۾ڏيکاريو ويو آهي.)



شڪل 30.1

اسان وٽ $\theta = \frac{l}{r}$,

جڏهن ته $l = r$

ته پوءِ $\theta = \frac{l}{l}$

$\boxed{\theta = 1 \text{ ريڊيان}}$

هڪ مڪمل ڦيري لاءِ، قوس جي ڊيگ گول جي گهيري جي برابر هوندي آهي يعني ته. $l = 2\pi r$

هاڻي،

$$\theta = \frac{l}{r}$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{r}$$

$\boxed{\theta = 2\pi \text{ ريڊيان}}$

انهيءَ کري هڪ مڪمل ڦيري لاءِ، ريڊيان ۾ ماپيل ڪنڌ 2π هوندي آهي.

ڊگري ۽ ريڊيان جي وچ ۾ تعلق:

اسان کي خبر آهي ته، هڪ مڪمل ڦيري لاءِ ڊگرين ۾ ماپيل ڪنڌ 360° هوندي آهي ۽ ريڊيان ۾ ماپيل ڪنڌ 2π هوندي آهي.

انهي کري

$$360^\circ = 2\pi \text{ ريڊيان}$$

$$\Rightarrow \quad 180^\circ = 2\pi \text{ ريڊيان}$$

$$\Rightarrow \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ريڊيان} \approx 0.01745 \text{ ريڊيان}$$

يا،

$$1 \text{ ريڊيان} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ$$

ڊگرين ۽ ريڊيانن ۾ ڪجهه معياري ڪنڊون هيٺين ريت آهن.

ڊگري	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
ريڊيان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

مثال1: هيٺين کي ريڊيان واري ماپ ۾ مٽايو:

(a) 120° (b) $10^\circ\ 30'$ (c) $24^\circ\ 32'\ 30''$

حل (a)

اسان کي خبر آهي ته

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ريڈيان $\because$

$120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180}$ ريڈيان $\therefore$

$\Rightarrow \quad 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ريڈيان

حل (b)

اسان کي خبر آهي تہ

$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ $\because$

$\Rightarrow 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ $\therefore$

$10^\circ 30' = \left(10 + \frac{30}{60}\right)^\circ = \left(10 + \frac{1}{2}\right)^\circ = \left(\frac{21}{2}\right)^\circ$ هاڻي

$= \frac{21}{2} \times \frac{\pi}{180}$ ريڈيان $\left(\because 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ريڈيان}\right)$ $\therefore$

$= \frac{7\pi}{120}$ ريڈيان $\Leftarrow$

حل (c):

$24^\circ 32' 30''$

$= 24^\bullet + \left(\frac{32}{60}\right)^\bullet + \left(\frac{30}{3600}\right)^\circ \qquad 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$ ۽ $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

$= \left(24 + \frac{8}{15} = \frac{1}{120}\right)^\circ$

$= \left(24 + \frac{32}{60} = \frac{30}{3600}\right)^\circ$

$= \left(\frac{24 \times 120 + 64 + 1}{120}\right)^\circ$

$= \left(\frac{2945}{120}\right)^\circ \qquad \left(\because 1^\circ \cong \frac{\pi}{180} \text{ ريڈيان}\right)$

$\left(\frac{2945}{120}\right)^\circ = \frac{2945}{120} \times \frac{\pi}{180}$ ريڈيان هاڻي

$= \frac{589}{4320}\ \pi$ ريڈيان $\therefore$

$24^\circ 32' 30'' = \frac{589}{4320}\ \pi$ ريڈيان انهي کري

مشق 30.1

1. هيٺين کي ڊگرين ۾ مٽايو ۽ ڏهائي واري صورت ۾ لکو.

(i) $32^\circ\ 15'$ (ii) $10^\circ\ 30'$ (iii) $8^\circ\ 15'\ 30''$

(iv) $45^\circ\ 21'\ 36''$ (v) $25^\circ\ 30'$ (vi) $18^\circ\ 6'\ 21''$

2. هيٺين ڪنڊن کي $D^\circ\ M'\ S''$ واري صورت ۾ مٽايو.

(i) 32.25° (ii) 47.36° (iii) 57.325°

(iv) 67.58° (v) 22.5° (vi) 225.60°

3. هيٺين ڪنڊن کي ڊگري ماپن ۾ ظاهر ڪريو.

(i) $\frac{\pi}{4}$ ريڊيان (ii) $\frac{\pi}{3}$ ريڊيان (iii) $-\frac{3\pi}{4}$ ريڊيان

(iv) 3 ريڊيان (v) $\frac{3}{\pi}$ ريڊيان (iv) 4.5 ريڊيان

4. هيٺين ڪنڊن کي ريڊيان ماپن ۾ بدلايو.

(i) 30° (ii) 45° (iii) 60°

(iv) $\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$ (v) -225° (vi) $60^\circ\ 35'\ 48''$

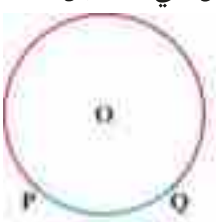
30.2 گول جو سيڪٽر:

وصفون:

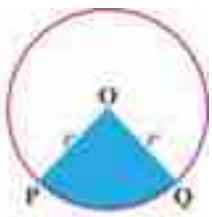
(i) گول جي گهيري جي ڪنهن حصي کي قوس چئبو آهي.

(ii) گول ايراضي جو اهو حصو جيڪو ٻن رداسي ٽڪرن ۽ هڪ قوس سان گهيريل هجي، ان کي گول جو سيڪٽر چئبو آهي.

مٿي بيان ڪيل وصفن کي سمجهڻ لاءِ هيٺيون شڪليون مدد ڪنديون.



شڪل 30.2 (i)



شڪل 30.2 (ii)

شڪل 30.2 (i) ۾ PQ هڪ قوس آهي ۽ شڪل 30.2 (ii) ۾ POQ هڪ سيڪٽر آهي.

30.2 (i) $l = r\theta$، وارو اصول قائم ڪرڻ جڏهن ته گول جو رداس r، قوس جي ڊيگهه l ۽ ريڊيانن ۾ ماپيل مرڪزي ڪنڊ θ آهي:

رداس r واري گول ۾ قوس جي ڊيگهه l سڌو تناسب رکي ٿي ريڊيانن ۾ ماپيل مرڪزي ڪنڊ θ سان.

يعني $l \propto \theta$

$\Rightarrow l = c\theta$ ... (i)

هڪ مڪمل قيري لاءِ،

$$l = 2\pi r$$

۽

$$\theta = 2\pi$$

مساوات (i) جو استعمال ڪندي، اسان وٺ آهي،

$$2\pi r = c(2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad c = r$$

انهي ڪري، مساوات (i) ٿيندي: $l = r\theta$

نوٽ: (i) ۾ l ۽ r ساڳئن ايڪن ۾ ماپيا وڃن ٿا

(ii) θ کي ريڈيان ۾ ماپيو آهي.

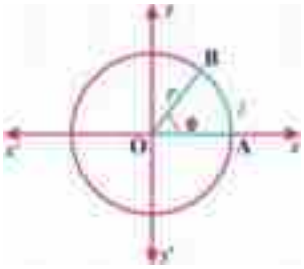


Fig: 30.3

مثال 1: 5cm رداس واري گول جي ان قوس جي ڊيگهه لهو جيڪو مرڪز تي $\frac{2\pi}{5}$ ريڈيان جي ڪنڊ ناهي ٿو.

حل: مليل آهي تہ

$r = 5\text{cm}$ ريڈيان $\theta = \frac{2\pi}{5}$ ۽ $l = ?$

جيئن تہ $l = r\theta$

$\therefore \quad l = 5 \times \frac{2\pi}{5}$

$$\Rightarrow \quad l = 2\pi \cong 2\left(\frac{22}{7}\right) \approx 6.28\text{cm}.$$

مثال 2: هڪ چوڪرو سائيڪل ۾ 10 ڦيرن ۾ ڪيترو پري تائين ويندو جيڪڏهن هن جي سائيڪل جي هر هڪ ڦيٽي جو قطر 56cm جي برابر آهي.

حل:

اسان کي خبر آهي تہ

ريڈيان 2π = هڪ ڦيرو

$\therefore$ ريڈيان 20π = 10 ڦيرا.

يعني تہ ريڈيان. $\theta = 20\pi$

۽ ڦيٽي جو قطر: $d = 56\text{cm}$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{56}{2}\text{cm} = \frac{56}{2\times 100}\text{m} \qquad (\because\ 1\text{m}=100\text{cm})$$

$$\therefore \quad l = r\theta$$

$$\therefore \quad l = \frac{56}{2\times 100} \times 20\pi$$

$$\Rightarrow \quad l \approx \frac{56}{2\times 100} \times 20 \times \frac{22}{7} \qquad \left(\because\ \pi \approx \frac{22}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \quad l \approx 17.6\text{m}.$$

اهڙي طرح چوڪرو 10 ڦيرن ۾ 17.6m جو فاصلو طئي ڪندو.

مثال 3:

r لهو، جيڪڏهن $l = 4\text{cm}$ ۽ $\theta = \frac{1}{4}$ ريڊيان

حل: مليل آهي تہ

$$l = 4\text{cm}$$

$$\theta = \frac{1}{4} \text{ ريڊيان}$$

$$r = ? \text{ ۽}$$

$$\because \quad l = r\theta$$

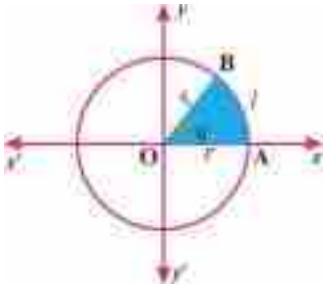
$$\therefore \quad r = \frac{l}{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad r = \left(4 \div \frac{1}{4}\right) = 4 \times \frac{4}{1} = 16\text{cm}.$$

30.2 (ii) ثابت ڪريو تہ گول جي سيڪٽر جي ايراضي $\frac{1}{2}r^2\theta$ يا $\frac{1}{2}lr$ آهي.

ثابتي:

هڪ گول ڪٽو جنهن جو رادس r ۽ مرڪز O آهي، AB هڪ قوس آهي جيڪو مرڪز تي θ ريڊيان جي ڪنڊ ٺاهي ٿو جيئن شڪل 30.4 ۾ ڏيکاريل آهي.



شڪل 30.4

اسانکي خبر آهي تہ

گول جي ايراضي $= \pi r^2$

هڪ ڦيري جي ڪنڊ $= 2\pi$ ريڊيان

سيڪٽر جي ڪنڊ $= \theta$ ريڊيان

بنيادي جاميٽري مان، تناسب جي قانون جو استعمال ڪندي

$$\frac{\text{سيڪٽر AOB جي ايراضي}}{\text{گول جي ايراضي}} = \frac{\text{سيڪٽر جي ڪنڊ}}{\text{گول جي ڪنڊ}}$$

$$\therefore \quad \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\text{سيڪٽر AOB جي ايراضي}}{\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{سيڪٽر AOB جي ايراضي} = \frac{\pi r^2 \times \theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{سيڪٽر AOB جي ايراضي} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$\text{يا} \quad \text{سيڪٽر AOB جي ايراضي} = \frac{1}{2}r\theta \times r$$

$$(\because r\theta = l) \quad \Rightarrow \quad \text{سيڪٽر AOB جي ايراضي} = \frac{1}{2}rl$$

اهڙي طرح ثابت ٿيو.

KARACHIEDU.COM

مثال 1: هک گول جي سيکٹر جي ايراضي لهو جنهن جو رداس 5cm ۽ مرکزي کنڊ 60° آهي.

حل: مليل آهي تہ

$$r = 5\text{cm}$$

$$\theta = 60^{\circ} = 60\ \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ ريڊيان}$$

۽ سيکٹر جي ايراضي =؟

$\because$ سيکٹر جي ايراضي $= \frac{1}{2} r^2 \theta$

$\because$ سيکٹر جي ايراضي $= \frac{1}{2}(5)^2 \times \frac{\pi}{3}$

يا سيکٹر جي ايراضي $\approx \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{22}{7 \times 3}$ $\because \left(\pi \approx \frac{22}{7}\right)$

يا سيکٹر جي ايراضي $= 13.09\text{cm}^2$

مثال2: هک گول جي سيکٹر جي ايراضي لهو جنهن جو رداس 4cm آهي ۽ مرکزي کنڊ 12 ريڊيان جي آهي.

حل: مليل آهي تہ

$$r = 4\text{cm}$$

$\theta = 12$ ريڊيان

۽ سيکٹر جي ايراضي =؟

$\because$ سيکٹر جي ايراضي $= \frac{1}{2} r^2 \theta$

$\therefore$ سيکٹر جي ايراضي $= \frac{1}{2}(4)^2 \times 12$

يا سيکٹر جي ايراضي $= 16 \times 6 = 96\text{cm}^2$

مشق 30.2

1. θ جي قيمت لهو جيکڏهن
   (i) $r = 5\text{cm}$ ۽ $l = 20\text{cm}$
   (ii) $r = 2\text{cm}$ ۽ $l = 30.2\text{cm}$
   (iii) $r = 2.87\text{cm}$ ۽ $l = 6\text{cm}$
   (iv) $r = 2.5\text{cm}$ ۽ $l = 4.5\text{cm}$
2. l جي قيمت لهو جيکڏهن
   (i) $r = 1.01\text{cm}$ ۽ $\theta = 2.1$ ريڊيان
   (ii) $r = 5.1\text{cm}$ ۽ $\theta = 2$ ريڊيان
   (iii) $r = 6\text{cm}$ ۽ $\theta = 30^{\circ}$
   (iv) $r = 15\text{cm}$ ۽ $\theta = 60^{\circ}\ 30'$
3. r جي قيمت لهو جيکڏهن
   (i) $\theta = 60^{\circ}$ ۽ $l = 2\text{m}$
   (ii) $\theta = 3.5$ ريڊيان ۽ $l = \frac{7}{4}\text{m}$
   (iii) $\theta = \frac{1}{4}$ ريڊيان ۽ $l = 4\text{cm}$
   (iv) $\theta = 180^{\circ}$ ۽ $l = 15.4\text{cm}$

4. ايڪي واري گول (unit circle) جي قوس جي ڊيگهه لهو جنهن جي مطابقت رکندڙ مرڪزي ڪنڊ هيٺ ڏنل آهي.
(i) 30° (ii) 45° (iii) 60° (iv) 90°

5. هڪ گول جو قوس مرڪز تي $\frac{\pi}{6}$ جي ڪنڊ ناهي ٿو. گول جو رداس 5cm آهي تہ معلوم ڪريو.
(i) قوس جي ڊيگهه (ii) گول جي سيڪٽر جي ايراضي

6. 10cm ردس واري گول تي هڪ ٽبڪو حرڪت ڪري رهيو آهي جيڪڏهن اهو 3.5 ڦيرا هڻي ٿو تہ ٽبڪي جو طئي ڪيل فاصلو لهو.

7. هڪ سيڪٽر جي ايراضي لهو جڏهن تہ مرڪزي ڪنڊ $\frac{\pi}{4}$ ريڊيان ۽ گول جو رداس 4cm آهي.

8. جيڪڏهن 21cm جي قطر واري اڏام جي ڦيٽي جي ڪناري تي هڪ ٽبڪو 5040 ميٽر فاصلو في منٽ طئي ڪري ٿو هڪ سيڪنڊ ۾ اهو ڦيٽو ڪيترن ريڊيانن تائين ڦرندو؟

9. هڪ گاڏي گولائي واري رستي تي هلي رهي آهي. ان گول جو رداس قوس کان ٻيٽو آهي جيڪو گاڏي ناهي ٿي گولائي واري رستي تي قوس جي نهيل مرڪزي ڪنڊ معلوم ڪريو.

10. 12cm رداس جي هڪ گول ۾ هڪ قوس 84° جي مرڪزي ڪنڊ ناهي ٿو. ان جي قوس جي ڊيگهه ۽ سيڪٽر جي ايراضي لهو

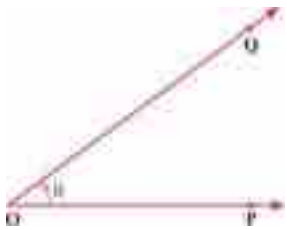
30.3 ٽرگناميٽري نسبتون (Trigonometric ratios)

30.3 (i) بيان ڪرڻ ۽ سڃاڻپ ڪرڻ

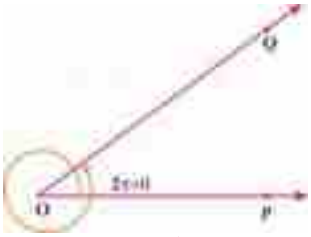
(a) عام ڪنڊون (هم انتهائي ڪنڊون) (Co-terminal Angles)

(b) معياري ٻيهڪ ۾ ڪنڊ

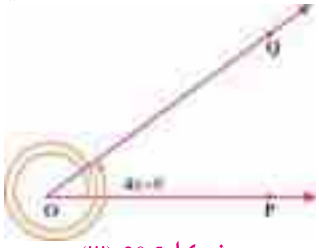
30.3.1 (a) اهي ڪنڊون جن جا شروعاتي ۽ انتهائي پاسا ساڳيا هجن تہ انهن کي هم انتهائي ڪنڊون چئبو آهي ۽ انهن جو فرق 2π ريڊيان جي ضرب اُپت هوندي آهي انهن کي عام ڪنڊون (General angles) پڻ چئبو آهي



شڪل 30.5 (i)



شڪل 30.5 (ii)

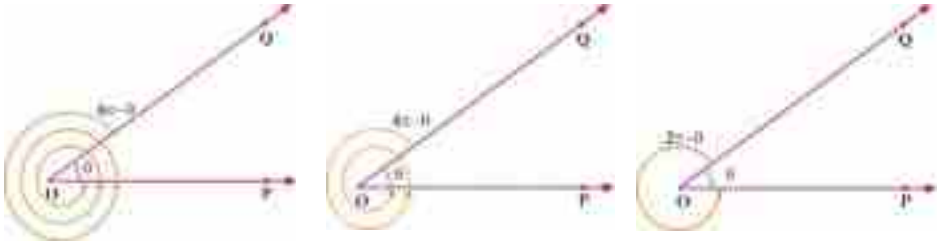


شڪل 30.5 (iii)

ريڊيان $m\angle POQ = \theta$ جڏهن تہ $0 \le \theta < 2\pi$

(i) θ ريڊيان (ٻڙي ڦيرو)
(ii) $(2\pi+\theta)$ ريڊيان (هڪ ڦيري ڪانپوءِ)
(iii) $(4\pi+\theta)$ ريڊيان (ٻن ڦيرن ڪانپوءِ)

انهي ڪري θ، $2\pi+\theta$ ۽ $4\pi+\theta$ هم انتهائي ڪنڊون آهن. (جيئن شڪل 30.5 ۾ ڏيکاريل آهي.
جيڪڏهن ڦيرا گهڙي جي سڌي رستي جي رخ ۾ نهن جيئن هيٺ ڏنل شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.



شڪل 30.5 (i) شڪل 30.5 (ii) شڪل 30.5 (iii)

(i) $2\pi-\theta$ ريڊيان (ڪوبہ ڦيرو نہ آهي)

(ii) $4\pi-\theta$ ريڊيان (ڳهڙي جي سڌي رستي وارو هڪ ڦيري کان پوءِ)

(iii) $6\pi-\theta$ ريڊيان (ڳهڙي جي اُبتي رستي واري بن ڦيرن کانپوءِ)

هتي θ، ڳهڙي جي اُبتي رستي واري ڪنڊ آهي انهي ڪري $2\pi-\theta$ ۽ $4\pi-\theta$ هم انتهائي ڪنڊون آهن.

مثال: هيٺين مان ڪهڙيون ڪنڊون 120° سان هم انتهائي ڪنڊون آهن.

$$-240^\circ،\ 480^\circ،\ \frac{14}{3}\ ۽\ -\frac{14}{3}.$$

حل:

$$120^\circ-(-240^\circ)=120^\circ+240^\circ=360^\circ،$$

ها -240° هم انتهائي ڪنڊ آهي 120° جي

$$480^\circ-120^\circ=360^\circ،$$ ها 480° هم انتهائي ڪنڊ آهي 120°

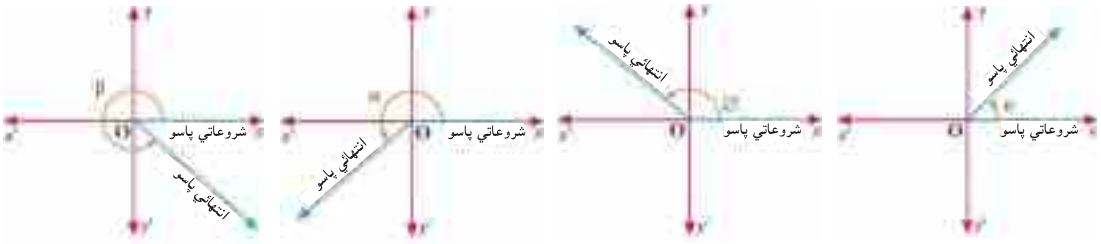
$$\frac{14\pi}{3}-120^\circ=\frac{14\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=\frac{12\pi}{3}=4\pi،$$

ها $\frac{14\pi}{3}$ هم انتهائي ڪنڊ آهي 120° جي

$$120^\circ-\left(\frac{14\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{14\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}،$$ 2π جي ضرب اُپت نہ آهي

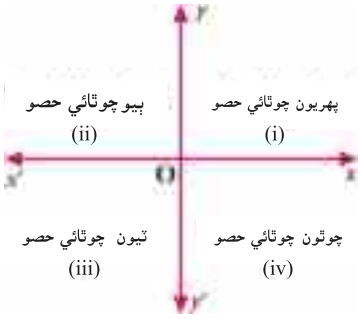
انهي ڪري $-\frac{14\pi}{3}$ هم انتهائي ڪنڊ 120° جي نہ آهي.

30.3 (b) (i) هڪ ڪنڊ ڪي معياري بيهڪ ۾ ڪوٺبو جيڪڏهن ان جي چوٽي اصل ٽپڪي تي ۽ شروعاتي پاسو واڌو x-axis تي هجي



شڪل 30.7 (i) شڪل 30.7 (ii) شڪل 30.7 (iii) شڪل 30.7 (iv)

30.3 (a) (ii) چوٿاين ۽ چوٿائي ڪنڊن کي سجاڻڻ: هڪ مستطيلي ڪوآرڊ ينيٽ نظام ۾ به محور هڪبيئي کي گوني ڪنڊ تي ڪپين ٿا ۽ متاچرو چار برابر حصن ۾ ورهائجي ٿو ۽ هر هڪ حصي کي چوٿون يا چوٿائي حصو چئبو آهي. مشترڪ ٽپڪو (يا ميلاپ وارو ٽپڪو) اصل ٽپڪو (origin) ڪوٺبو آهي ۽ ان کي 0 سان ظاهر ڪبو آهي.



شڪل 30.8

0° ۽ 90° جي وچ واريون ڪنڊون پهريون چوٿائي حصوآهن.

يعني پهرين چوٿائي حصي ۾ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ آهن.

90° ۽ 180° جي وچ واريون ڪنڊون ٻيون چوٿائي حصو آهن.

يعني ٻئي چوٿائي حصي ۾ $90^\circ < \theta < 180^\circ$ آهن.

180° ۽ 270° جي وچ واريون ڪنڊون ٽيون چوٿائي حصو آهن.

يعني ٽيئن چوٿائي حصي ۾ $180^\circ < \theta < 270^\circ$ آهن.

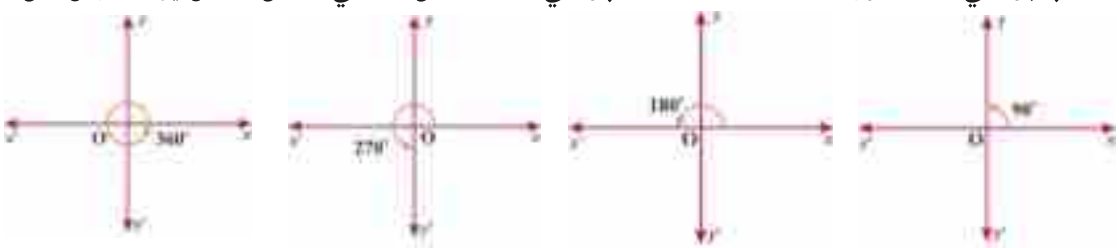
270° ۽ 360° جي وچ واريون ڪنڊون چوٿون، چوٿائي حصو آهن.

يعني ته چوٿين يا چوٿائي حصي ۾ $270^\circ < \theta < 360^\circ$ آهن.

هڪ معياري ٻيهڪ واري ڪنڊ ڪنهن چوٿائي حصي ۾ ٿڏهن هوندي جڏهن ان جو انتهائي پاسو ان چوٿائي حصي ۾ هجي.

30.3 (b) (ii) چوٿائي ڪنڊ (Quadrantal Angle)

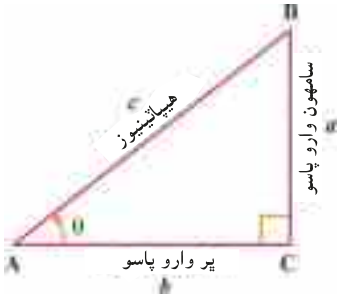
جيڪڏهن ڪنهن معياري ڪنڊ جو انتهائي پاسو x-axis يا y-axis سان نهڪندڙ هجي ته پوءِ ان ڪنڊ کي چوٿائي ڪنڊ چئبو آهي. مثال طور: 90°، 180°، 270° ۽ 360° چوٿائي ڪنڊون آهن جيڪي هيٺين شڪل ۾ ڏيکاريل آهن.



شڪل 30.9 (i) شڪل 30.9 (ii) شڪل 30.9 (iii) شڪل 30.9 (iv)

30.3 (iii) ٽرگناميٽري نسبتن ۽ انهن جي اُبتڙن کي ايڪي واري گول جي مدد سان بيان ڪرڻ:

اسين گذريل ڪلاس ۾، هڪ گوني ڪنڊ ٽڪندڙ ABC ۾ سوڙهي ڪنڊ θ لاءِ ٽرگناميٽري نسبتون اڳيئي سکي چڪا آهيون جيڪي هيٺين ريت آهن.



شڪل 30.10

1. $\sin\theta = \frac{c}{a} = \frac{\text{سامهون واري پاسي جي ماپ}}{\text{هيپاٽينيوز جي ماپ}}$
2. $\cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرواري پاسي جي ماپ}}{\text{هيپاٽينيوز جي ماپ}}$
3. $\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{سامهون واري پاسي جي ماپ}}{\text{پر واري پاسي جي ماپ}}$

۽ انهن جا ترتيبوار اُبتڙ هيٺين ريت آهن

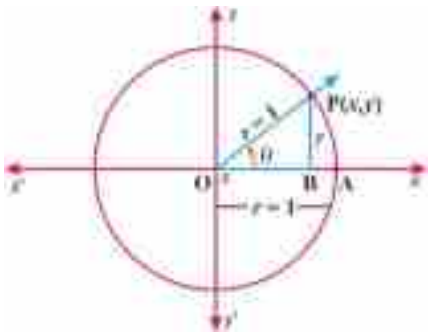
4. $\text{cosec}\theta = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\text{هيپاٽينيوز جي ماپ}}{\text{سامهون واري پاسي جي ماپ}}$

5. $\sec\theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{هيپاٽينيوز جي ماپ}}{\text{پرواري پاسي جي ماپ}}$

6. $\cot\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\text{پرواري پاسي جي ماپ}}{\text{سامهون واري پاسي جي ماپ}}$

گول جي هر هڪ ٽپڪي لاءِ هميشہ هڪ مطابقت رکندڙ ڪنڊ وجود رکندي آهي.

فرض ڪريو تہ $P(x,y)$ ايڪي واري گول جو ڪو هڪ ٽپڪو آهي جيڪو پهرين چوٿائي حصي ۾ آهي ۽ مطابقت رکندڙ ڪنڊ θ آهي جڏهن تہ θ ريڊيان ۾ ماپ ڪيل آهي جيئن شڪل 30.11 ۾ ڏيکاريل آهي



شڪل: 30.11

اسين ٽرگناميٽري نسبتن کي هيٺين ريت بيان ڪريون ٿا

$\sin\theta = \frac{y}{1} = \frac{|\overline{BP}|}{|\overline{OP}|} = y$، $\cos\theta = \frac{x}{1} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OP}|} = x$ ۽

هاڻي، $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{|\overline{BP}|}{|\overline{OB}|}$، (بشرطيڪ $x \neq 0$)

ساڳي ريت

$\cot\theta = \frac{x}{y}$ (بشرطيڪ $y \neq 0$)

$\sec\theta = \frac{1}{x}$ (بشرطيڪ $\pi \neq 0$)

$\text{cosec}\theta = \frac{1}{y}$ (بشرطيڪ $y \neq 0$)

اُبتڙ نسبتون هيٺيون آهن

$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta}$ يا $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ يا $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ يا $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

نوٽ:

- x ۽ y جي صورت ۾ انهن سيني ٽرگناميٽري نسبتن کي ٽرگناميٽري عمل (Trigonometric functions) چئبو آهي.
- $\sin\theta$ ۽ $\cos\theta$ کي گولائي وارا عمل (Circular functions) پڻ چئبو آهي.

مثال: ڪنڊ θ تي، ٽرگنامیٽري نسبتن جون قيمتون معلوم ڪريو جيڪڏهن θ جي انتهائي پاسي تي ٽپڪو P (6,8) آهي.

حل:

هتي $P(x, y) = (6,8)$

$\Rightarrow \quad y = 8$ ۽ $x = 6$

فيثاغورث سڌيان جو استعمال ڪندي

$\because \quad r^2 = x^2 + y^2$

$\because \quad r^2 = (6)^2 + (8)^2$

$\Rightarrow r^2 = 36 + 64 = 100$

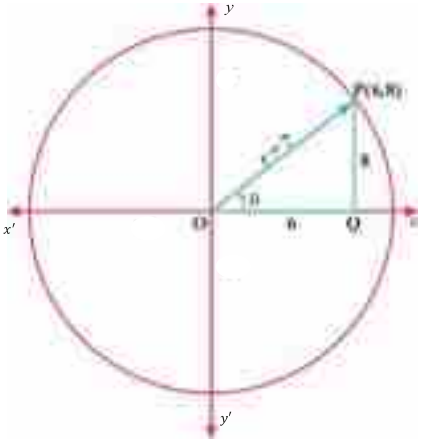
$\Rightarrow$ جڏهن تہ $r = \sqrt{100} = 10,$ $= |\overline{OP}|$

سيني ٽرگنامیٽري نسبتن جون قيمتون آهن:

$$\frac{5}{4} = \text{cosec}\theta \quad ، \quad \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\frac{5}{3} = \sec\theta \quad ، \quad \frac{3}{5} \quad \frac{6}{10} \quad \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\frac{3}{4} = \cot\theta \quad \text{۽} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{8}{6} \quad \frac{y}{x} = \tan\theta$$



شڪل: 30.12

30.3 (iv). 30°، 45° ۽ 60° جي ٽرگنامیٽري نسبتن جي قيمتن جو دؤر ڪرڻ

اسان اڳيئي سکي چڪا آهيون تہ 30°، 45° ۽ 60° جي ٽرگنامیٽري نسبتن جون قيمتون هيٺين ريت آهن.

60°	45°	30°	θ
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	sin
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	cos
$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	tan

هاڻي اسين مٿين جدول جو استعمال ڪندي ٽرگنامیٽري جي نسبتن جي اُبتڙن جي قيمت لهنداسين

$$\text{cosec}30° = \frac{1}{\sin 30°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ ۽

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

30.3 (v) مختلف چوڻن ۾ ٽرگنامیٽري نسبتن جي نشانين جي سڃاڻپ ڪرڻ.

جيڪڏهن θ هڪ چوٿائي ڪنڊ نہ آهي تہ پوءِ ٽرگنامیٽري نسبتن جون نشانيون انتهائي پاسي جي ٽپڪي $P(x,y)$ جي مطابق معلوم ڪري سگهجن ٿيون.

1. جيڪڏهن θ، پهرين چوٿائي حصي ۾ آهي تہ پوءِ ان جي انتهائي پاسي جي ٽپڪي (x,y) ۾ x ۽ y واڌوهوندا. يعني تہ $x>0$ ۽ $y>0$.
پهرين چوٿائي حصي ۾ سڀ ٽرگنامیٽري عمل/ نسبتون واڌو هوندیون آهن.
2. ٻيئي چوٿائي حصي ۾ $x<0$ ۽ $y>0$. تنهنڪري ٻيئي چوٿائي حصي ۾ $\sin\theta$ ۽ $\operatorname{cosec}\theta$ واڌو هوندا آهن ۽ باقي رهيل ڪاٽو هوندا آهن.
3. ٽيئن چوٿائي حصي ۾ $x<0$ ۽ $y<0$. تنهنڪري ٽيئن چوٿائي حصي ۾ $\tan\theta$ ۽ $\cot\theta$ واڌو هوندا آهن ۽ باقي رهيل ڪاٽو هوندا آهن.
4. چوٿين چوٿائي حصي ۾ $x>0$ ۽ $y<0$. تنهنڪري چوٿين چوٿائي حصي ۾ $\cos\theta$ ۽ $\sec\theta$ واڌو هوندا آهن ۽ باقي رهيل ڪاٽو هوندا آهن.

مثال1: هيٺين ٽرگنامیٽري عملن / نسبتن جون نشانيون معلوم ڪريو.

(i) $\cos 120^\circ$ (ii) $\sin 1030^\circ$ (iii) $\tan 229^\circ$ (iv) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (v) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

حل:

(i) $\cos 120^\circ$

$\because$ 120° ٻيئي چوٿائي حصي ۾ موجود آهي

$\therefore$ $\cos 120^\circ$ ڪاٽو آهي.

(ii) $\sin(720^0 + 310^0) = \sin 1030^\circ$

$\because$ جيئن تہ 310° چوٿائي حصي iv ۾ موجود آهي ۽ چوٿائي حصي iv ۾ $\sin\theta$ ڪاٽو هوندو آهي

$\therefore$ تنهنڪري $\sin 1030^o$ ڪاٽو آهي.

(iii) $\tan 229°$

∵ جيئن تہ $229°$ چوٿائي حصي III ۾ موجود آهي ۽ چوٿائي حصي III ۾ $\tan\theta$ واڌو هوندو آهي

∴ تنهنڪري $\tan 229^o$ واڌو آهي.

(iv) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

جيئن تہ $\frac{-\pi}{4}$ چوٿائي حصي ۾ موجود آهي ۽ چوٿائي حصي iv ۾ $\tan\theta$ ڪاٽو هوندو آهي

ان ڪري $\tan\frac{-\pi}{4}$ ڪاٽو آهي.

(v) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

∵ جيئن تہ $\frac{-\pi}{3}$ چوٿائي حصي ۾ موجود آهي ۽ چوٿائي حصي iv ۾ $\operatorname{cosec}\theta$ ڪاٽو هوندو آهي

∴ ان ڪري $\operatorname{cosec}\frac{-\pi}{3}$ ڪاٽو آهي

30.3 (vi) باقي رهيل ٽرگناميٽري نسبتن جون قيمتون لهڻ جيڪڏهن ڪا هڪ ٽرگناميٽري نسبت ملهه هجي.

ان جو طريقو هيٺين مثالن سان واضح ڪجي ٿو.

مثال 1: جيڪڏهن $\sin\theta = \frac{3}{5}$ تہ پوءِ باقي رهيل ٽرگناميٽري عمل/نسبتن جون قيمتون لهو.

حل: ملهه آهي تہ

جيئن تہ $\sin\theta = \frac{y}{r}$

پر واري شڪل 30.13 استعمال ڪندي

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{r}$$

$\Rightarrow \quad r = 5 \quad ۽ \quad y = 3$

جيئن تہ $x^2 + y^2 = r^2$

$x^2 + (3)^2 = (5)^2$

$x^2 + 9 = 25$

$x^2 = 25 - 9$

$\Rightarrow \quad x^2 = 16$

$\Rightarrow \quad x = 4$

هاڻي

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

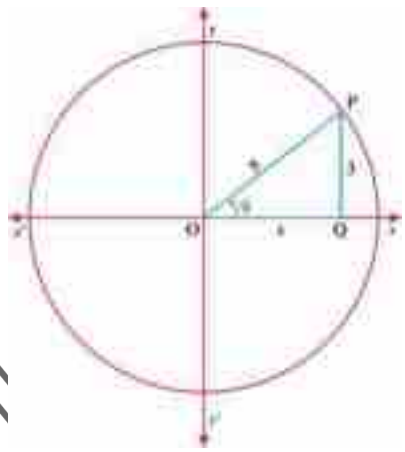
$\cos\theta = \frac{4}{5}$

$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{4}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$

$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

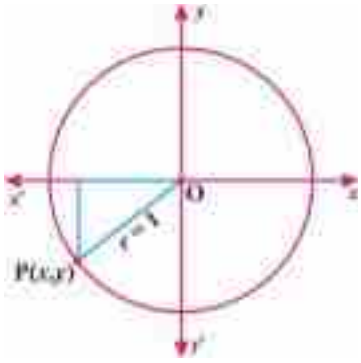


شڪل 30.13

مثال 2: جيڪڏهن $\tan\theta = 1$ ۽ θ ٽيئن چوٿائي حصي ۾ آهي. باقي رهيل ٽرگناميٽري عملن جون قيمتون لهو.

حل : مليل آهي ته

شڪل 30.14 استعمال ڪندي



شڪل 30.14

$\because \quad \tan\theta = 1$

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} = 1$،

$\Rightarrow \quad y = x$

$\because \quad x^2 + y^2 = 1$

$\therefore \quad x^2 + x^2 = 1 \quad \because \quad y = x$

$\Rightarrow \quad 2x^2 = 1$

$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

هتي اسين ڪاٽو قيمت ڪڍنداسين جو جو θ ٽيئن چوٿائي حصي ۾ آهي

$x = \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۽ $y = \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

انهيءَ ڪري باقي رهيل ٽرگناميٽري عمل آهن:

$\cot\theta = 1$،

$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$،

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = -\sqrt{2}$،

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

۽ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\sqrt{2}$

مثال 3: باقي رهيل ٽرگناميٽري عمل/ نسبتون لهو جيڪڏهن

(i) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ۽ θ پهرين چوٿائي حصي ۾ آهي

(ii) $\sin\theta = 0.6$ ۽ $\tan\theta$ ڪاٽو آهي.

حل 1: مليل آهي ته

$\cos\theta = x = \frac{2}{3}$، $\therefore \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{3}{2}$،

جيئن ته θ پهرين چوٿائي حصي ۾ آهي $\therefore$ يعني ته $(x, y) \in Q_1$

KARACHIEDU.COM



۽ $x^2 + y^2 = 1$ (مليل)

هتي $x = \cos\theta$ ۽ $y = \sin\theta$

$$\therefore \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

هتي اسين +ve قيمت ڪٽندا سين چاڪاڻ جو θ پهرين چوٿائي حصي ۾ موجود آهي.

$$\therefore \quad y = \frac{\sqrt{5}}{3} = \sin\theta \; ; \qquad \therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{3}{\sqrt{5}} \; ,$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}; \qquad \therefore \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad ۽$$

انهي ڪري گهربل باقي رهيل ٽرگناميٽري نسبتون آهن

1. $\sec\theta = \frac{3}{2}$ 2. $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 3. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$

4. $\tan \quad = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ۽ $\quad = \frac{2}{\sqrt{5}}$

حل 2 : مليل آهي ته

$$\sin y = 0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad \therefore \quad \operatorname{cosec}\,\theta = \frac{5}{3} = 1.6,$$

مليل آهي ته $\sin\theta > 0$ ۽ $\tan\theta < 0$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore \quad x^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \pm\frac{4}{5}$$

هتي اسين ڪاٽو ملهه ڪٽندا سين چاڪاڻ جو θ ٻيئي چوٿائي حصي ۾ آهي.

$$\therefore \quad x = \cos\theta = -\frac{4}{5} = -0.8 \quad ۽ \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{5}{4} = -1.25$$

هاڻي،

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4} = -0.75 \quad ۽ \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -\frac{4}{3} = 1.3$$

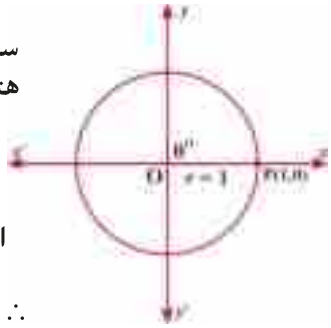
انهي ڪري گھربل باقي رهيل ٽرگنامیٽري نسبتون آهن.

1. $\text{cosec}\theta = 1.6$ 2. $\cos\theta = -0.8$ 3. $\sec\theta = -1.25$

4. $\tan\theta = -0.75$ 5. $\cot\theta = -1.3$

30.3 (vii) 0°، 90°، 180°، 270° ۽ 360° جي ٽرگنامیٽري نسبتن جون قيمتون لھڻ

سيڪشن 30.3.(ii)(b) ۾ اسان اڳيئي چوٽائي ڪندن تي بحث ڪري چڪا آهيون هتي اسين چوٽائي ڪندن جون ٽرگنامیٽري نسبتون لھنداسين



جڏهن $\theta = 0°$

ايڪي واري گول ۾ ڪند $\theta°$ جي انتهائي پاسي تي ٽپڪو $P(1,0)$ موجود آهي

∴ هتي $x = 1, y = 0$ ۽ $r = 1$ جڏهن ته ايڪي واري گول جو رداس r آهي

∴ $\sin 0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$;

∴ $\cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$;

∴ $\tan 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$;

∴ $\text{cosec}0° = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل)

∴ $\sec 0° = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$

∴ $\cot 0° = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل)

شڪل: 30.15

جڏهن $\theta = 90°$

ايڪي واري گول ۾ $90°$ ڪند جي انتهائي پاسي تي ٽپڪو $P(0,1)$ ۽ انتهائي پاسو y-axis (+ve) سان ٺهڪندڙ آهي.

∴ هتي $x = 0, y = 1$ ۽ $r = 1$

∴ $\sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1;$

$\text{cosec}90° = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$

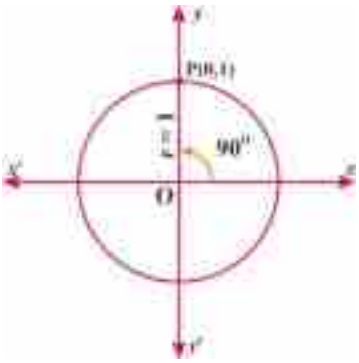
$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0;$

$\sec 90° = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل)

$\tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل)

$\cot 90° = \frac{x}{y} = 0$ ۽

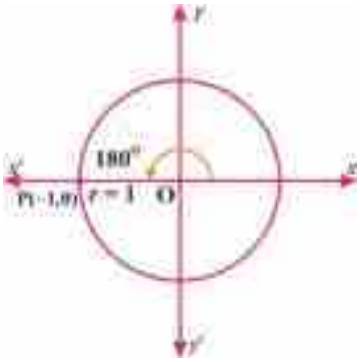
جڏهن $\theta = 180°$



شڪل: 30.16

ايڪي واري گول ۾، ڪنڊ 180^{o} جي انتهائي پاسي تي ٽپڪو $P(-1,0)$ موجود آهي ۽ انتهائي پاسو $-ve\,x$-axis سان نهڪندڙ آهي. ان صورت ۾

$r=1$ ۽ $P(-1,0)\Rightarrow x=-1,\ y=0$



شڪل 30.17

$$\sin 180^\circ=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0;$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}180^\circ=\frac{r}{y}=\frac{1}{0}$$ (اڻ بيان ڪيل)

$$\cos 180^\circ=\frac{x}{r}=\frac{-1}{1}=-1;$$

$$\sec 180^\circ=\frac{r}{x}=\frac{1}{-1}=-1$$

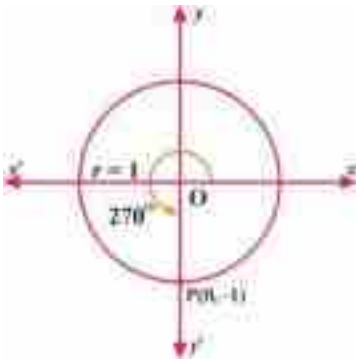
$$\tan 180^\circ=\frac{y}{x}=\frac{0}{-1}=0;$$

$$\cot 180^\circ=\frac{x}{y}=\frac{1}{0}$$ (اڻ بيان ڪيل)

جڏهن $\theta=270^\circ$

ايڪي واري گول ۾، ڪنڊ 270° جي انتهائي پاسي تي ٽپڪو $P(0,-1)$ موجود اهي ۽ انتهائي پاسو $-ve\ y$-axis سان نهڪندڙ آهي. ان صورت ۾

$r=1$ ۽ $P(0,-1)\Rightarrow x=0, y=-1$ $\quad\therefore$



شڪل 30.18

$$\sin 270^\circ=\frac{y}{r}=\frac{-1}{1}=-1; \quad \therefore$$

$$\operatorname{cosec}270^\circ=\frac{r}{y}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$\cos 270^\circ=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0;$$

$$\sec 270^\circ=\frac{r}{x}=\frac{1}{0}$$ (اڻ بيان ڪيل)

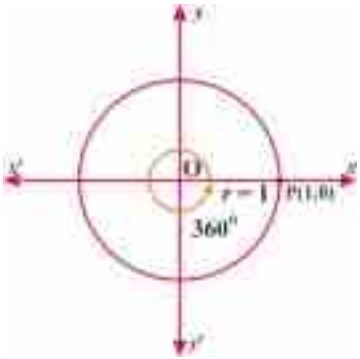
$$\tan 270^\bullet=\frac{y}{x}=\frac{-1}{0}$$ (اڻ بيان ڪيل)

۽ $\cot 270^\circ=\frac{0}{-1}=0$

جڏهن $\theta=360^\circ$

يونٽ واري گول ۾، ڪنڊ 360^{o} جي انتهائي پاسي تي ٽپڪو $P(1,0)$ موجود آهي ۽ انتهائي پاسو $+ve\ x$-axis سان نهڪندڙ آهي. ان صورت ۾

$r=1$ ۽ $P(1,0)\Rightarrow x=1,\ y=0$.



شڪل 30.19

$\therefore \sin 360° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$;

$\text{cosec}360° = \frac{1}{\sin 360°} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل)

$\cos 360° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$;

$\sec 360° = \frac{1}{\cos 360°} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 360° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$;

$\cot 360° = \frac{1}{\tan 360°} = \frac{1}{0}$ (اڻ بيان ڪيل)

سيني نتيجن جو خلاصو ڪندي، اسان وٽ هڪ جدول آهي.

360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°	θ
0	−1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	sin
1	0	−1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	cos
0	$-\infty$	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	tan
∞	−1	∞	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	cosec
1	∞	−1	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	sec
∞	0	∞	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	cot

مشق 30.3

1. هيٺين ڪنڊن جون هم انتهائي پاسي واريون ڪنڊون معلوم ڪريو

$55°$ (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $-45°$ (iii) $\frac{-3\pi}{4}$ (iv)

2. هيٺين ڪنڊن جي چوٿائي حصن جي شناخت ڪريو.

$\frac{8\pi}{5}$ (i) $75°$ (ii) $-818°$ (iii) $1090°$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$ (v) $-\frac{5\pi}{4}$ (vi)

3. هيٺين جون نشانيون معلوم ڪريو .

(i) $\cos 120^\circ$ (ii) $\sin 340^\circ$ (iii) $\sec 200^\circ$

(iv) $\operatorname{cosec} 198^\circ$ (v) $\tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ (vi) $\cot\left(\frac{-2}{3}\pi\right)$

4. θ، ڪهڙي چوٿائي حصي ۾ آهي جيڪڏهن

(i) $\sin\theta > 0$ ۽ $\cos\theta < 0$ (ii) $\cos\theta < 0$ ۽ $\tan\theta > 0$

(iii) $\sec\theta < 0$ ۽ $\sin\theta < 0$ (iv) $\sec\theta < 0$ ۽ $\cot\theta > 0$

(v) $\tan\theta < 0$ ۽ $\cos\theta < 0$ (vi) $0 < \cot\theta < 1$

5. جيڪڏهن $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ۽ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, تہ پوءِ هيٺين باقي رهيل ٽرگناميٽري نسبتن جون قيمتون لهو.

6. باقي رهيل ٽرگناميٽري عمل/ نسبتون لهو جيڪڏهن :

(i) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ۽ θ ٻيئي چوٿائي حصي آهي

(ii) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ۽ θ چوٿين چوٿائي حصي ۾ آهي

(iii) $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ ۽ θ ٻيئي چوٿائي حصي ۾ آهي

(iv) $\sec\theta = \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$ ۽ θ پهرين چوٿائي حصي ۾ آهي

(v) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ۽ $\tan\theta$ واڌو آهي.

7. هيٺين جا ملهه لهو.

(i) $\tan 30^\circ \tan 60^\circ + \tan 45^\circ \cot 45^\circ$

(ii) $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$

(iii) $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ + \cot 45^\circ}$

(iv) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

(v) $\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$

(vi) $\frac{\tan 45^\circ + \cot 45^\circ}{\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ}$

30.4 ٽرگناميٽري جا بنيادي فارمولا (آئيڊ نتيجيون). (Trigonometric Identities):

آئيڊ نتيجي هڪ مساوات هوندي آهي جيڪا بدلجندڙ جي سڀني قيمتن تي دُرست هوندي آهي (سواءِ ان تي جتي قيمت اڻ بيان ڪيل اچي).

30.4.1 ٽرگناميٽري وارين آئيڊ نتيجين يا بنيادي فارمولن کي ثابت ڪرڻ ۽ مختلف ٽرگناميٽري وارا تعلق ظاهر ڪرڻ لاءِ انهن جو استعمال ڪرڻ:

ايڪي واري گول جي گوني تڪندي سان واسطو رکندڙ ڪنهن بہ حقيقي عدد θ لاءِ، اسان وٽ هيٺيان بنيادي فارمولا آهن:

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (iii) $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

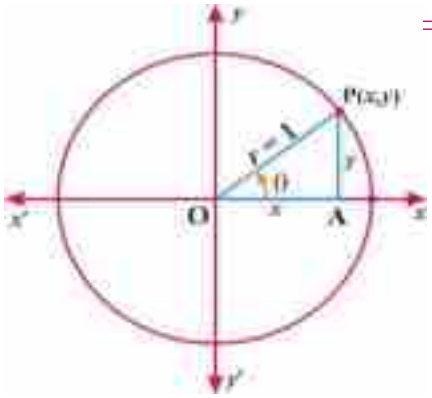
(i) ثابتي:

ايڪي واري گول ۾، هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ΔOAP، تي غور ڪريو جنهن ۾ ريڊيان $m\angle AOP = \theta$ جيڪا معياري بيهڪ ۾ آهي. فرض ڪريو ته ڪنڊ جي انتهائي پاسي تي ٽپڪو $P(x, y)$ آهي.

فيثاغورث سڌيان جي مطابق اسان وٽ آهي. $x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ [$\because x = \cos\theta$ ۽ $y = \sin\theta$]

اهڙي طرح ثابت ٿيو.



شڪل: 30.20

(ii) ثابتي: فيثاغورث سڌيان جي مطابق.

$1 = x^2 + y^2$

بنهي پاسن کي x^2 سان ونڊ ڪندي، اسان کي ملي ٿو،

$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2}$ يا $\frac{1}{x^2} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta,$

$\Rightarrow \quad \boxed{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta}$ (بشرطيڪ $x = \cos\theta \neq 0$)

اهڙي طرح ثابت ٿيو

(iii) ثابتي: فيثاغورث سڌيان جي مطابق.

$1 = x^2 + y^2$

بنهي پاسن کي y^2 سان ونڊ ڪندي اسان کي ملي ٿو

$\frac{1}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + 1,$ يا $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$

$\Leftarrow \quad \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 = (\cot\theta)^2 + 1,$ (بشرطيڪ $\sin\theta \neq 0$)

$\Leftarrow \quad \boxed{\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta}$ $\left(\because \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta\right)$

اهڙي طرح ثابت ٿيو.

مثال 1: ثابت ڪريو ته: $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

ثابتي:

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= (\sin\theta + \cos\theta)^2 \\ &= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 1 + 2\sin\theta\cos\theta \qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1] \\ &= \text{R.H.S} \end{aligned}$$

KARACHIEDU.COM

$$= \frac{\sin\theta + \tan\theta}{\sin\theta - \tan\theta}$$

$$= \text{R.H.S}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S} \quad \because$$

$$\frac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta} = \frac{\sin\theta + \tan\theta}{\sin\theta - \tan\theta} \quad \therefore$$

انهي كري ثابت ټيو

مثال 4: ثابت كړيو ته $\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

ثابتي:

$$\text{L.H.S} = \sin\theta,$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta, \quad (\cos\theta \neq 0 \text{ بشرطيکه})$$

$$= \tan\theta \cdot \cos\theta,$$

$$= \text{R.H.S}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta \quad \therefore$$

انهي كري ثابت ټيو

مشق 30.4

1- هيڅنين کي ثابت کړيو

(i) $\sin^2\theta = \left(\sec^2\theta - 1\right)\cos^2\theta$

(ii) $\left(\cos\theta \neq 0\right)$ $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta + \sec\theta$

(iii) $\left(\cos\theta \neq 0\right)$ $\tan\theta = \sin\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}$

(iv) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(v) $\sin^3\theta = \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta$

(vi) $\left(\cos\theta \neq 1\right)$ $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

(vii) $\left(\tan\theta \neq 0\right)$ $\sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}} = \dfrac{\sec\theta+1}{\tan\theta}$

(viii) $\left(\tan\theta \neq 0\right)$ $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\because \left(\sin\theta+\cos\theta\right)^2 = 1+2\sin\theta\cos\theta$

اهڙي طرح ثابت ٿيو

مثال 2: ثابت ڪريو تہ $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

ثابتي:

$$\text{L.H.S} = \sin\theta$$
$$= \sqrt{(\sin\theta)^2}$$
$$= \sqrt{\sin^2\theta},$$
$$= \sqrt{1-\cos^2\theta}, \quad \left[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta = 1\right]$$
$$\text{R.H.S} =$$

$\because$ R.H.S = L.H.S

$\because \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

انهي ڪري ثابت ٿيو

مثال 3:

ثابت ڪريو تہ $\dfrac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta} = \dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{\sin\theta-\tan\theta}$ ، (بشرطيڪ $\cos\theta \neq 0$)

ثابتي:

$$\text{L.H.S} = \frac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta},$$
$$= \frac{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}{1-\dfrac{1}{\cos\theta}},$$
$$\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta-1}$$
$$= \frac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{\sin\theta(\cos\theta-1)} \quad (\text{بشرطيڪ } \sin\theta \neq 0)$$
$$= \frac{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta-\sin\theta}$$
$$= \frac{\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

(انس ۽ ڇيد کي $\cos\theta$ سان ونڊيندي)

KARACHIEDU.COM

(ix) $\sec\theta-\cos\theta=(\cot\theta+\cos\theta)(\tan\theta-\sin\theta)$ ، $(\sin\theta\neq0$ يا $\cos\theta\neq0)$

(x) $\dfrac{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta}{\sin\theta+\tan\theta}=\operatorname{cosec}\theta\cot\theta$ ، $(\sin\theta\neq0)$

(xi) $\sin^2\theta=\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$, $(\cos\theta\neq0)$

(xii) $\cos^2\theta=\dfrac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}$, $(\sin\theta\neq0)$

(xiii) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta+\sin\theta\cos\theta\cot\theta=1$ ، $(\sin\theta\neq0$ يا $\cos\theta\neq0)$

2. پھرين اظهار کي ٻيئي ۾ متايو

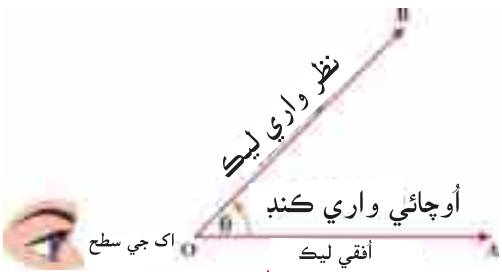
(i) $(\sec\theta+1)(\sec\theta-1)$ کي $\tan^2\theta$ ۾

(ii) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta}$ کي $\tan\theta$ ۾

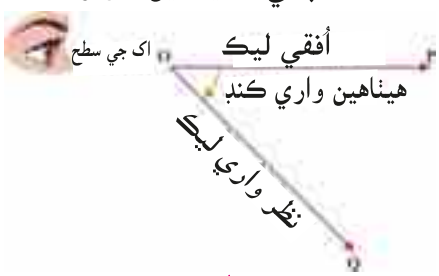
(iii) $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$ کي $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ ۾

30.5 اُوچائي ۽ هيناهين واريون ڪنڊون (Angles of Elevation and Depression)

30.5 (i) اُوچائي ۽ هيناهين واريون ڪنڊون لهڻ



شڪل:30.21 (i)



شڪل:30.21 (ii)

جيڪڏهن ڪا شي مشاهد جي اک جي سطح کان مٿي آهي تہ پوءِ ان جي ڪنڊ کي اُوچائي واري ڪنڊ چئبو آهي. جيڪڏهن ڪا شي اک جي سطح کان هيٺ آهي تہ پوءِ اُفقي ليڪ کان ان شي جي ڪنڊ کي هيناهين، واري ڪنڊ چئبو آهي.

عام زندگي ۾، اهي ان شي جو فاصلو يا ڪنڊ يا انهن جي تعلق کي معلوم ڪرڻ لاءِ استعمال ٿيندڙ آهن جيڪي شيون مشاهد جي هنڌ کان مٿي يا هيٺ هجن ۽ ان کان ڏِگهي فاصلي تي هجن.

30.5 (ii) اُوچائي ۽ هيناهين وارن ڪنڊن تي مشتمل عام زندگي جا مسئلا حل ڪرڻ

مثال 1: بجلي جي ٽنيي جي چوٽي جي زمين تي هڪ ٽبڪي کان اُوچائي واري ڪنڊ 30° آهي جڏهن تہ اهو ٽبڪو ٽنيي جي پايي کان 18 ميٽر جي فاصلي تي آهي. بجلي جي ٽنيي جي اُوچائي لهو.

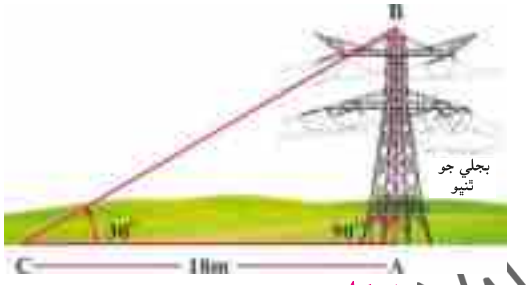
حل: ٽنيي جي حصي جي ٽبڪي P کان اُوچائي واري ڪنڊ 30° آهي ۽ فرض ڪريو تہ ٽنيي جي اُوچائي h آهي. جڏهن تہ اهو ٽبڪي P کان 18 ميٽر پري آهي. ΔPAB ۾ اسان وٽ $\theta=30^\circ$ ۽ $|\overline{PA}|=18$ ميٽر آهي

$$\therefore \quad \tan 30° = \frac{h}{|PA|} = \frac{h}{18}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{18}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{18}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \text{ میٹر}$$



شڪل: 30.22

اهڙي طرح بجلي جي ٽنيي جي اُوچائي $6\sqrt{3}$ ميٽر آهي.

مثال 2: هڪ شي جي اُوچائي لهو جيڪڏهن سج جي اُوچائي واري ڪنڊ $19°$ ۽ ان شي جي پاڇي جي ڊيگهه 1.7 ميٽر آهي.

حل: مليل آهي ته شي جي اُوچائي واري ڪنڊ $19°$ آهي يعني $\theta = 19°$ ۽ پاڇي جي ڊيگهه $a = 1.7\text{m}$ آهي جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي.

ان ڪانپوءِ

$$\tan 19° = \frac{h}{a} = \frac{h}{1.7}$$

$$\Rightarrow \quad h = (1.7)\cdot \tan 19°$$

$$\Rightarrow \quad h = (1.7)\cdot (0.3443) = 0.585\text{m}$$

انهي ڪري گهربل اُوچائي تقريبا 0.585 ميٽر آهي.



شڪل: 30.23

مثال 3: هڪ تاور جي چوٽي کان، ويجهي واري بندر گاهه جي هڪ جهاز جي هيناهين واري ڪنڊ $40°$ آهي ان جي آبي ليڪ سان جيڪڏهن تاور جي اُوچائي 35 ميٽر آهي ته جهاز ۽ تاور جي پايي جي وچ وارو فاصلو لهو.

حل: فرض ڪريو ته 'x' فاصلو آهي جهاز (ٽپڪي B تي) ۽ تاور جي پايي (ٽپڪي A تي) جي وچ ۾ جيئن شڪل ۾ ڏيکاريل آهي ۽ تاور جي اُوچائي "h" آهي.

هتي

$h =$ 35 ميٽر (جهاز جي اوچائي)

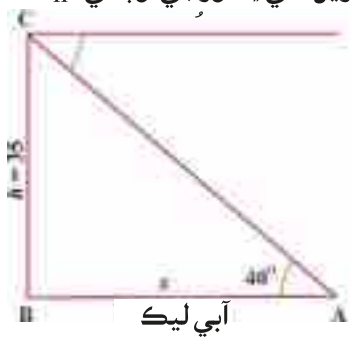
$\theta = 40°$ (هيناهين واري ڪنڊ)

$x = ?$ ۽

ΔABC ۾

$$\tan 40° = \frac{h}{x} = \frac{35}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{35}{\tan 40°} = \frac{35}{0.8391} = 41.71\text{m} \text{ (اندازاً)}$$



شڪل: 30.24

اهڙي طرح جهاز ۽ تاور جي پايي جي وچ وارو فاصلو 41.71 ميٽر (اندازاً) آهي.

مشق 30.5

1. 102 ميٽر اُوچائي واري روشـــــني جي مينار جي چوٽي کان، هڪ جهاز جي هيٺاهين واري ڪنڊ $30'18^0$ آهي. جهاز روشني جي مينار کان ڪيترو پري آهي.
2. هڪ ڏاڪڻ، زمين ســـــان 60^0 جي ڪنڊ ٺاهي ٿي ۽ پت تي 6m جي اُوچائي تائين پهچي ٿي. ڏاڪڻ جي ڊيگهه لهو.
3. اُوچائي واري ڪنڊ لهو جيڪڏهن 6m اُوچائي وارو بانس $2\sqrt{3}$m جي ڊيگهه وارو پاڇو ٺاهي ٿو.
4. اُيي ٽڪر جي چوٽي جي اُوچائي واري ڪنڊ 30^0 آهي. هڪ ٽيڪي کان اُيي ٽڪر ڏانهن 210 ميٽر جو پنڌ ڪندي، اُوچائي واري ڪنڊ 45^0 آهي: اُيي ٽڪر جي اُوچائي لهو.
5. هڪ مشاهدو ڪندڙ ڦوڪٽو زمين کان 4280m متي ۽ فارم گهر کان 9613m پري آهي. ڦوڪٽي کان فارم گهر جي هيٺاهين واري ڪنڊ لهو.

جائزي واري مشق 30

1. درست جواب تي نشان ✓ لڳايو

i. اهو ماپ جو نظام جنهن ۾ ڪنڊ ڪي ريڊيان ۾ ماپجي، ان کي _____ چئبو آهي.
(a) CGS نظام (b) بنيادُ 60 وارو نظام
(c) MKS نظام (d) گولائي وارو نظام

ii. بن غير هم ليڪي شعاعن جو مشترڪ چوٽي تي، ميلاپ _____ ڪونبو آهي.
(a) هڪ ڪنڊ (b) هڪ/ڊگري
(c) هڪ منٽ (d) ريڊيان

iii. 10^0 = _____.
(a) $600''$ (b) $3600''$ (c) $600'$ (d) 600

iv. $5\frac{\pi}{4}$ ريڊيان = _____.
(a) 115° (b) 225° (c) 135° (d) 45°

v. $\frac{1}{2}\sec 45^\circ$ = _____.
(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

vi. $\operatorname{cosec}\theta \cdot \sin\theta$ = _____.
(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 0.5

vii. $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ = _____.
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\cos^2\theta$

viii. هڪ ايڪي واري گول ۾ ٽنبڪي (x,y) لاءِ $\sin\theta =$ _____ .

x (a) $-x$ (b) y (c) $-y$ (d)

ix. جيڪڏهن $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۽ θ ٽيئن چوٽائي ۾ موجود آهي ته $\tan\theta =$ _____ .

-1 (a) 1 (b) ± 1 (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d)

x. جيڪڏهن ڪا شيءِ مشاهد جي سطح کان مٿي آهي ته پوءِ اُفقي شعاع ۽ نظر جي اُفقي ليڪ جي وچ واري ڪنڊ کي _____ چئبو آهي.

(a) هيٺاهين واري ڪنڊ (b) اُوچائي واري ڪنڊ

(c) هڪ ويڪري ڪنڊ (d) ڪوبہ نہ

2. ڪنڊ ۽ معياري بيهڪ واري ڪنڊ کي بيان ڪريو

3. $70^\circ\ 30'\ 90''$ کي ريڊيانن ۾ بدلايو

4. $(7200)'$ ۾ ڪيترين دڳرين موجود آهن

5. $\frac{2\pi}{3}$ ريڊيان واري ماپ کي دڳري ۾ بدلايو

6. $\frac{3}{\pi}$ ريڊيان کي $D^\circ M' S''$ جي صورت ۾ لکو:

7. θ جي قيمت لهو. جڏهن ته $l = 7\text{cm}$ ۽ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ريڊيان

8. θ جي قيمت لهو جيڪڏهن هڪ قوس جي ديگهہ ۽ گول جو رداس پاڻ ۾ برابر هجن.

9. ثابت ڪريو تہ $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) = 1$

10. گول جي سيڪٽر جي ايراضي لهو جڏهن تہ $r = 2\text{cm}$ ۽ ريڊيان $\theta = 3$

خلاصو

- جيڪڏهن ڪنهن گول جي گهيري کي 360 برابر حصن ۾ ورهائجي تہ پوءِ ان هر هڪ حصي جي مرڪز تي ٺهيل ڪنڊ 1 دڳري ڪوٽبي آهي ۽ ان کي 1° سان ظاهر ڪبو آهي.
- گول جي مرڪز تي ٺهيل ڪنڊ اهڙي طرح جو گول جو رداس ۽ قوس جي ديگهہ برابر هجن تہ پوءِ اها ڪنڊ هڪ ريڊيان جي آهي.
- ريڊيان/ دڳري جي ذيلي ورچ

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ ريڊيان} \approx 0.01745 \text{ ريڊيان}$$

$$1 \text{ ريڊيان} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \approx 57.3^\circ$$

- گول جي قوس جي ديگهہ لهڻ جو فارمولو $l = r\theta$
- گول جي سيڪٽر جي ايراضي لهڻ جو فارمولو $= \frac{1}{2} lr$ يا $\frac{1}{2} r^2\theta$.

- اُهي ڪنڊون جن جا شروعاتي ۽ انتهائي پاسا ساڳيا هجن. انهن کي هم انتهائي ڪنڊون چئبو آهي ۽ اهي 2π ريڊيانن جي ضرب اُپٽ جو فرق رکن ٿيون انهن کي عام ڪنڊون به چئبو آهي.
- هڪ ڪنڊ کي معياري بيهڪ واري ڪنڊ چئبو جيڪڏهن ان جي چوٽي اصل ٽپڪي (Origin) تي هجي ۽ ان جو شروعاتي پاسو واڏو x-axis تي هجي.
- هڪ مستطيلي ڪوآرڊينيٽ نظام ۾ هڪ محور مٿاچري کي چار برابر حصن ۾ ورهائن ٿا ۽ هر هڪ حصي کي چوٽون يا چوٽائي حصو چئبو آهي انهي کري چار چوٽائي حصا ٺهن ٿا.
  - $0°$ ۽ $90°$ جي وچ واريون ڪنڊون پهرين چوٽائي حصي ۾ آهن
  - $90°$ ۽ $180°$ جي وچ واريون ڪنڊون ٻيئي چوٽائي حصي ۾ آهن
  - $180°$ ۽ $270°$ جي وچ واريون ڪنڊون ٽئين چوٽائي حصي ۾ آهن
  - $270°$ ۽ $360°$ جي وچ واريون ڪنڊون چوٽين چوٽائي حصي ۾ آهن
- جيڪڏهن ڪنهن معياري ڪنڊ جو انتهائي پاسو x-axis يا y-axis سان ٺهڪندڙ هجي تہ پوءِ ان کي چوٽائي ڪنڊ چئبو آهي.
- ڪنڊ θ لاءِ چھ بنيادي ٽرگناميٽري نسبتون آهن. انهي آهن $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$ ، $\operatorname{cosec}\theta$ ، $\sec\theta$ ۽ $\cot\theta$
- ابتڙ ٽرگناميٽري نسبتون هيٺ ڏنل آهن.

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \quad \text{يا} \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \quad \text{يا} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \quad \text{يا} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- آئيڊنٽيٽي (Identity) هڪ مساوات هوندي آهي جيڪا بدلجندڙ جي سڀني قيمتن تي دُرست هوندي آهي سواءِ ان تي جتي قيمت اڻ بيان ڪيل اچي.
- ٽرگناميٽري جون بنيادي آئيڊنٽيٽيز (Identities) ٽي آهن

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

(iii) $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

- جيڪڏهن ڪا شئي مشاهدي جي اک جي سطح کان مٿي آهي تہ پوءِ اُفقي ليڪ کان نظر واري ليڪ ڏانهن گهڙي جي اُبتي رستي واري ڪنڊ کي اُوچائي واري ڪنڊ چئبو آهي.
- جيڪڏهن ڪا شئي مشاهد جي اک جي سطح کان هيٺ آهي تہ پوءِ اُفقي ليڪ کان نظر واري ليڪ ڏانهن گهڙي جي سڌي رستي واري ڪنڊ کي هيٺاهين واري ڪنڊ چئبو آهي.

جواب



مشق 17.1

1. (i) $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ (ii) $B=\{4,6,8,9,10\}$

(iii) $C=\{7,11,13\}$ (iv) $D=\{9,11,13,15\}$

(v) $E=\{-11,11\}$ (vi) $F=\{\ \}$ يا $\varnothing$

2. (i) $A=\{x\mid x\in\mathbb{Q}\wedge 5<x<6\}$ (ii) $B=\{x\mid x$ واڈو ونديندڙ آهي 12 جو $\}$

(iii) $C=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\wedge -40\le x\le 40\}$ (iv) $D=\{x\mid x\in\mathbb{E}\wedge -4\le x\le 4\}$

(v) $E=\{x\mid x$ چورس آهي پهرين پنجن قدرتي انگن جو $\}$

(vi) $F=\{x\mid x$ هڪ کاٽو اڪي سجو عدد آهي $\}$

3. (i) $A=\{x\mid x\in\mathbb{W}\wedge x<0\}$ (ii) $A=$ چوڪرين جي ڪاليج ۾ چوڪرن جو سيٽ

(iii) $A=\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge 2x+1=2\}$ (iv) $A=\{x\mid x\in\mathbb{R}\wedge x^2=-1\}$

(v) $A=$ پاڪستان جي عورت صدرن جو سيٽ

4. i. محدود ii. محدود iii. لامحدود iv. محدود v. لامحدود

5. (i) $\{i,o\}$ ۽ $\{a,i\},\{e,u\}$: ٿي واجب ما تحت سيٽ آهن

Improper subset is $\{-2,-1,0,1,2\}$: غير واجب ما تحت سيٽ آهي

(ii) $\{0,+2\}$ ۽ $\{-1,0\},\{+1,+2\}$: ٿي واجب ما تحت سيٽ آهن

$\{-2,-1,0,1,2\}$ غير واجب ما تحت سيٽ آهي

6. $\{x\mid x\in\mathbb{Z}\wedge -1<x<1\}$ ۽ $\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge x^2=16\}$

7. (i) $P(A)=\{\varnothing,\{5\},\{10\},\{15\},\{5,10\},\{5,15\},\{10,15\},\{5,10,15\}\}$

(ii) $P(B)=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{0,1,2\},$
$\{0,2,3\},\{0,1,3\},\{1,2,3\},\{0,1,2,3\}\}$

8. i. ممڪن نہ آهي ii. واحد سيٽ iii. خالي سيٽ

مشق 17.2

1. i. منفرد سيٽ ii. لاڳاپيل سيٽ iii. جزا
iv. مڪمل سيٽ v. جزا

2. i. $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,10\}$ ii. $A\cap B=\{2,4,6\}$ iii. $A-B=\{1,3,5\}$

iv. $B-A=\{8,10\}$ v. $A\Delta B=\{1,3,5,8,10\}$

KARACHIEDU.COM

3.

i. $A' = \{6,7,8,9,10\}$ ii. $B' = \{2,4,6,8,10\}$

iii. $A' \cup B' = \{2,4,6,7,8,9,10\}$ iv. $A' \cap B' = \{6,8,10\}$

v. $(A \cup B)' = \{6,8,10\}$ vi. $(A \cap B)' = \{2,4,6,7,8,9,10\}$

vii. $A' \Delta B' = \{2,4,7,9\}$ viii. $(A \Delta B)' = \{1,3,5,6,8,10\}$

ix. $A - B' = \{1,3,5\}$ x. $A' - B = \{6,8,10\}$

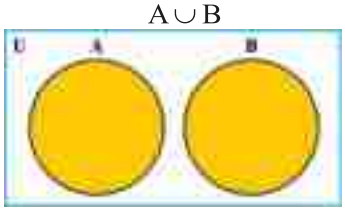
5.

i. $A \cap B = \{6n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ii. $A \cup C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ iii. $B \cap C = \{12n \mid n \in \mathbb{N}\}$

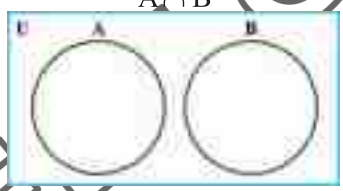
17.4 مشق

(i)

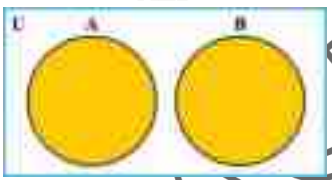
$A \cup B$



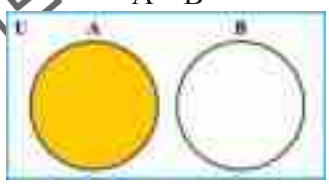
$A \cap B$



$A \Delta B$

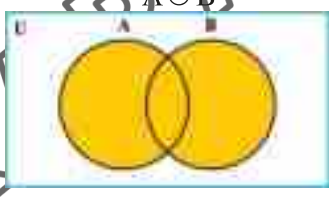


$A - B$

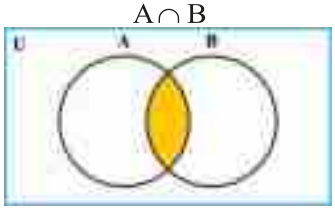


(ii)

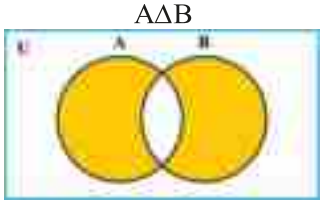
$A \cup B$



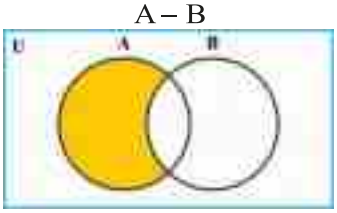
$A \cap B$



$A \Delta B$



$A - B$

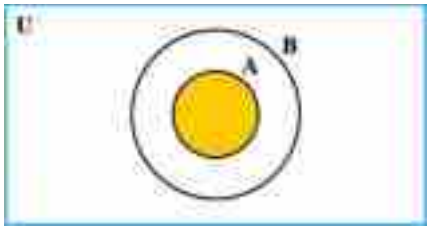


KPACHIEL.COM

(iii) $A \cup B$



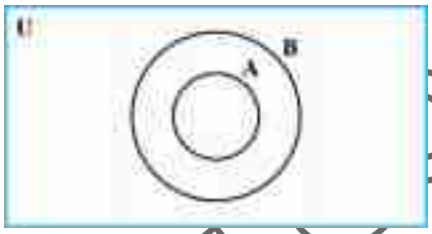
$A \cap B$



$A \Delta B$



$A - B$



17.5 مشق

1. i. $y = 17$ ؛ $x = 16$ ii. $y = 2$ ؛ $x = 1$ iii. $y = 1$ ؛ $x = 3$

2. $n(P \times Q) = 150,\ n(Q \times P) = 150,\ n(P \times P) = 100$

3.

(i) $A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$

(ii) $B \times C = \{(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5)\}$

(iii) $A \times (B \cup C) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5)(2,1),(2,2),(2,3),(2,5)\}$

(iv) $B \times (A \cup C) = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,5)(3,1),(3,2),(3,3),(3,5)\}$

(v) $(A \cap B) \times (B \cap C) = \{(2,3)\}$

4.

(i) $R_1 = \{(5,2),(5,3)\}, R_2 = \{(5,1),(3,3)\}, R_3 = \{(6,2)\}$

(ii) $R_1 = \{(2,5)\}, R_2 = \{(3,5)\}, R_3 = \{(2,5),(8,5)\}, R_4 = \{(3,5),(1,5),(3,6)\}$

(iii) $R_1 = \varnothing, R_2 = \{(1,1),(1,2)\}, R_3 = \{(2,1),(2,3)\}, R_4 = \{(1,2),(2,2),(3,3)\},$
$R_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

(iv) $R_1 = \varnothing, R_2 = \{(5,5)\}, R_3 = \{(5,6)\}, R_4 = \{(6,5)\}, R_5 = \{(6,6)\},$
$R_6 = \{(5,5),(5,6)\}, R_7 = \{(5,5),(6,5)\}, R_8 = \{(5,5),(6,6)\},$
$R_9 = \{(5,6),(6,5)\}, R_{10} = \{(5,6),(6,6)\}, R_{11} = \{(6,5),(6,6)\},$
$R_{12} = \{(5,5),(5,6),(6,5)\}, R_{13} = \{(5,5),(6,5),(6,6)\},$
$R_{14} = \{(5,5),(5,6),(6,6)\}, R_{15} = \{(5,6),(6,5),(6,6)\},$
$R_{16} = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\},$

KARACHIEDU.COM

5. 2^{12} جوڙي واري تعلقن جو تعداد آهي:

6. (i) $R_1 = \{(0,2),(0,4),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$

(ii) $R_2 = \{(1,8),(3,6)\}$

(iii) $R_3 = \{(3,2)\}$

7. i. رينج $= \{1,3,5,7,9\}$ ii. ڊومين $= \{3,4,5,6\}$

8. i. ڊومين $= \{0,1,2,3\}$
رينج $= \{2,5,8,11\}$

ii. ڊومين $= \{6,7,8,9,...\}$
رينج $= \{0,1,2,3,4,...\}$

9. ڊومين $f = \{1,2,3,4\}$
رينج $f = \{5,6,7,8\}$
قدرتي عددن جو سيٽ ڪوڊومين آهي
$f(2) = 6, f(4) = 8$

10. i. عمل نہ آهي ii. عمل نہ آهي
iii. اِنٽو عمل iv. اِنٽر عمل
v. بئي ون ـ ون ۽ آنٽو

11. i. ون ـ ون عمل ii. ون ـ ون مطابقت
iii. نہ ون ـ ون عمل ۽ نہ ئي ون ـ ون مطابقت

12. i. $f_1 = \{(a,x),(b,y),(c,y)\}$ ii. $f_2 = \{(p,a),(q,b),(r,c),(s,a)\}$
iii. $f_3 = \{(a,q),(b,r),(c,s)\}$ iv. $f_3 = \{(x,a),(y,c),(z,b)\}$

جائزي واري مشق 17

1. (MCQs) گھڻ چونڊائتا سوال

i.	d	ii.	b	iii.	c	iv.	c	v.	b
vi.	c	vii.	b	viii.	c	ix.	a	x.	b
xi.	a	xii.	a	xiii.	d	xiv.	c	xv.	c
xvi.	b	xvii.	c	xviii.	d	xix.	c	xx.	b

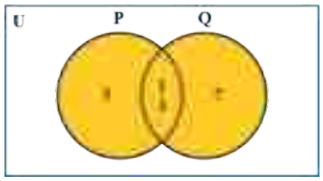
2. (a) $A \cup B = \{1,2,4,5,6\}$ (b) $A \cap B = \{2\}$ (c) $A \Delta B = \{1,4,5,6\}$

(d) $A - B = \{1,5\}$ (e) $A' = \{3,4,6\}$ (f) $B' = \{1,3,5\}$

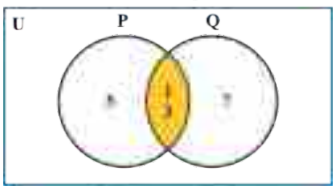
KARACHIEDU.COM

5.

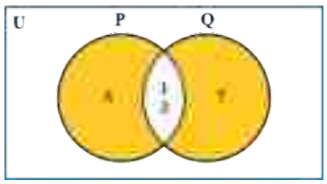
$P \cup Q$



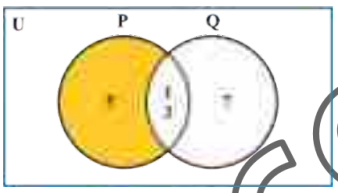
$P \cap Q$



$P \Delta Q$



$P - Q$



6. (a) $f_1 = \{(1,6),(2,8),(5,6)\}$ (b) $f_2 = \{(1,6),(2,6),(5,6)\}$

7. (a) $R_1 = \{(a,a),(a,c)\}, R_2 = \{(c,a),(c,c)\}$

(b) $R_1 = \{(b,b),(b,d)\}, R_2 = \{(d,b),(d,d)\}$

(c) $R_1 = \{(a,b)\}, R_2 = \{(a,d),(c,b)\}, R_3 = \{(c,b),(c,d)\}$

(d) $R_1 = \{(a,c),(b,d)\}, R_2 = \{(c,c),(d,c)\}$

مشق 18.1

1. i. 5:2 ii. 3:5 iii. 2:9 iv. 1:10 v. 3:8 vi. 35:52

2. i. 5:3 ii. 3:5 iii. 3:8 iv. 5:8

3. 6:17 **4.** $a = 8$ **5.** گھربل عدد 6 آھي.

6. $\frac{47}{81}$

7. i. $x = 45$ ii. $x = \frac{21}{26}$ iii. $x = 38$ iv. $x = a^2 - b^2$ v. $x = 4$

مشق 18.2

1. (i) $y = \frac{10}{3}x$ (ii) $y = 20$ (iii) $x = \frac{9}{2}$

2. (i) $V = \frac{5}{8}T$ (ii) $V = \frac{75}{4}$ (iii) $T = 16$ **3.** $V = 216$ جڈھن $U = 6$
$U = 5$ جڈھن $V = 125$

KARACHIEDU.COM

4. $F = 375$ **5.** $x = 10$ جڈھن $y = 3$ **6.** $V = 4$ جڈھن $P = 81$

7. i. $r = 5$ جڈھن $F = \frac{32}{25}$ ii. $F = 24$ جڈھن $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$

8. $x = \frac{1}{8}$ **9.** $d = \frac{1}{2}$ **10.** $y = \frac{18}{5}$

مشق 18.3

1. (i) 18 (ii) $(a-b)^2$ (iii) $\frac{(x+y)^2}{x^2-xy+y^2}$ (iv) $a+b$

2. (i) 1 (ii) $(a-b)$ (iii) $2a^2$ (iv) a^2+ab+b^2

3. (i) 12 (ii) $10a^2b^2$ (iii) a^2-b^2 (iv) $a-b$

4. (i) 15 (ii) 12 (iii) 8 (iv) 31

مشق 18.4

3. (i) $\{3,9\} =$ حل سيٹ (ii) $x = \frac{5}{4}$ (iii) $\frac{101}{4}$ (iv) 3

مشق 18.5

1. $y = \frac{x^2z}{24}$, $y = 32$ **2.** $y = \frac{6xr^2}{5vt}$, $y = \frac{64}{5}$ **3.** $w = 360$

4. 3.21 سيكنڈ **5.** 177.8 كعبي يونٹ

مشق 18.7

1. 3.068 ايمپيئر **2.** 0.01125 فوٹ كينڈلز **3.** 900 پاؤنڈ **4.** 360000 رُپيا
5. 5600 رُپيا

18 جائزي واري مشق

1. (MCQs) گھٹ چونڈائتا سوال

i.	d	ii.	b	iii.	a	iv.	b	v.	b
vi.	c	vii.	c	viii.	b	ix.	a	x.	c
xi.	a	xii.	c	xiii.	a	xiv.	a	xv.	c

2. (i) $20m : 1m$ (ii) $500g : 3g$

3. (i) $x = 4$ (ii) $x = 14$ **4.** $y = 48$ **5.** $y = \frac{25}{2}$

7. $x = \frac{7 \pm i\sqrt{15}}{2}$ **8.** $x = 10$ **9.** 3.33 ايمپيئر

KARACHIEDU.COM

مشق 19.1

1. (i) چورس قالب (ii) کالمي قالب
(iii) قطاري قالب (iv) غير طرفي قالب
(v) اريبي قالب

2. i. 3×3 ii. 3×2 iii. 2×3 iv. 3×1 v. 1×1

3. (i) هم شکلي قالب (ii) اُبتو هم شکلي قالب
(iii) هم شکلي قالب (iv) هم شکلي قالب

4. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) ممکن نہ آهي (iii) ممکن نہ آهي (iv) $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (vii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 2 & 11 & 2 \\ 15 & 10 & -1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 6 & 8 & 7 \\ 5 & 12 & 9 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 9 & 8 & 1 \\ 13 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 51 & -36 \end{bmatrix}$ **9.** $d=1$ ۽ $c=-1, b=1, a=-2$

10. $z=2$ ۽ $y=3, x=3, d=2, c=3, b=2, a=-1$

11. $AB=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}, BC=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 11 & 11 & 2 \\ 8 & 13 & 6 \end{bmatrix}$

مشق 19.2

1. i. 29 ii. 9 iii. 7 iv. 8 v. -59 vi. -105
vii. -84 viii. 184 ix. -42 x. 0 xi. $2x$

2. i. 1 ii. 3 iii. 3 iv. -1 v. 3 vi. -3

KARACHIEDU.COM

3. (i) $x = 3$ **4.** (i) نادر قالب (ii) غيرنادر قالب

5. (i) $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -8 & 18 & -4 \\ -5 & 12 & -1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ -18 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

7. (i) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) وجود نٹو رکي (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1.2 & 1.4 & 0.8 \\ -0.4 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$

8. (i) $y = 8$ ۽ $x = 5$ (ii) $y = \frac{9}{4}$ ۽ $x = -\frac{3}{2}$

جائزي واري مشق 19

1. گھڻ چونڊائتا سوال (MCQs)

i.	c	ii.	c	iii.	d	iv.	b	v.	d
vi.	a	vii.	c	viii.	b	ix.	a	x.	b

3. (i) 1×3 (ii) 2×3 (iii) 3×2

4. (i) $\begin{bmatrix} 3 & 13 & 17 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 11 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -9 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 73 & 47 & 76 \\ 5 & 13 & 20 \\ 46 & 9 & 16 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -4 & 29 & 74 \\ -1 & 15 & 37 \\ 3 & 62 & 91 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 5 & 40 & 45 \\ 10 & 5 & 0 \\ -10 & 5 & 35 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & 35 & 56 \\ 7 & 21 & 28 \\ 49 & 14 & 28 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} -10 & 19 & 0 \\ 7 & -19 & -36 \\ -79 & -10 & 20 \end{bmatrix}$

5. 175

7. $\begin{bmatrix} \frac{-9}{47} & \frac{8}{47} & \frac{18}{47} \\ \frac{21}{94} & \frac{-3}{94} & \frac{5}{94} \\ \frac{7}{47} & \frac{-1}{47} & \frac{-14}{47} \end{bmatrix}$

8. $x = 41, y = 5$

KARACHIEDU.COM

مشق 20.1

1.
(i) اصل، حقیقي، ناطق ءِ غیر مساوي آهي
(ii) اصل، حقیقي، ناطق ءِ غیر مساوي آهي
(iii) اصل، منجهیل/ خیالي آهن
(iv) اصل، حقیقي ءِ برابر آهن
(v) اصل، منجهیل/ خیالي آهن
(vi) اصل، منجهیل/ خیالي آهن
(vii) اصل، منجهیل/ خیالي آهن
(viii) اصل، منجهیل/ خیالي آهن

2.
(i) (b) $k < \frac{9}{4}$ ءِ (a) $k = \frac{9}{4}$
(ii) (b) $k < 4$ ءِ (a) $k = 4$
(iii) (a) $k = \pm 2\sqrt{2}$ (b) $k < -2\sqrt{2}$ ءِ $k \geq 2\sqrt{2}$
(iv) (b) $k < 3$ ءِ (a) $k = 3$
(v) (a) $k = \pm 4$ (b) $k < -4$ ءِ $k > 4$
(vi) (a) $k = \pm 24$ (b) $k < -24$ ءِ $k > 24$
(vii) (a) $k = 0$ (b) $k < 0$ ءِ $k > 0$
(viii) (a) $k = \pm 2$ (b) $k < -2$ ءِ $k > 2$

3. (i) $m = 3, -2$ (ii) $m = \pm 24$

6. $q = \frac{-5}{3}$ ءِ $p = -2$

مشق 20.2

1. (i) $4\omega^2$ ءِ $4\omega, 4$ (ii) $-5\omega^2$ ءِ $-5\omega, -5$ (iii) $6\omega^2$ ءِ $6\omega, 6$

2. (i) ω (ii) 4 (iii) 729 (iv) -16

مشق 20.3

1.
(i) اصلن جي جوڙ اُپت $= 1$ ءِ اصلن جي ضرب اُپت $= -1$
(ii) اصلن جي جوڙ اُپت $= \frac{3}{2}$ ءِ اصلن جي ضرب اُپت $= -2$
(iii) اصلن جي جوڙ اُپت $= a$ ءِ اصلن جي ضرب اُپت $= \frac{-3a^2}{4}$
(iv) اصلن جي جوڙ اُپت $= \frac{5k}{7}$ ءِ اصلن جي ضرب اُپت $= k$

2. (i) $m = \frac{2}{3}$ (ii) $m = \frac{1}{8}$

3. (i) $p = \pm 5$ (ii) $p = 0, 1$

4. (i) $m = 3$ (ii) $m = 13$

KARACHIEDU.COM

5. (i) $k=-4$ (ii) $k=-\frac{10}{7}$

6. (i) $p=\frac{3}{2}$ (ii) $p=\frac{7}{12}$

مشق 20.4

1. (i) $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ (ii) $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(iii) $\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$ (iv) $\alpha\beta\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]$

(v) $\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}$ (vi) $\frac{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$

2. (i) $\frac{9}{49}$ (ii) $-\frac{99}{98}$ (iii) $\frac{3a+4}{7a^2+3a+2}$ **3.** $-\sqrt{\frac{q}{p}}$

4. $\alpha+\beta$ هڪ ليڪ کي ظاهر ڪري ٿو ۽ $\alpha\beta$ هڪ هائيپربولا کي ظاهر ڪري ٿو.

مشق 20.5

1. (i) $x^2+5x+6=0$ (ii) $x^2+x+1=0$

(iii) $x^2-4x+5=0$ (iv) $x^2+8=0$

2. (i) $3x^2-9x+8=0$ (ii) $36x^2-33x+1=0$

(iii) $x^2-3x+6=0$ (iv) $2x^2-x+1=0$

(v) $2x^2-7x+3=0$

3. $rx^2-qx+p=0$ **4.** $x^2-2px+4q=0$ **5.** $px^2-(4p-q)x+(4p-2q+r)=0$

6. (i) $3b^2=16ac$ (ii) $b^3+ac(a+c)=3abc$

(iii) $b=0$ (iv) $a=c$

مشق 20.6

1. (i) باقي رهيل ۾ اصل -1 ۽ $\frac{1}{2}$ آهن. (ii) باقي رهيل ۾ اصل -1 ۽ 2 آهن.

(iii) باقي رهيل ۾ اصل 6 ۽ -4 آهن.

2. (i) باقي رهيل ۾ اصل $\frac{1}{3}$ ۽ $\frac{1}{2}$ آهن. (ii) باقي رهيل ۾ اصل $\sqrt{5}i$ ۽ $-\sqrt{5}i$ آهن.

(iii) باقي رهيل ۾ اصل -1 ۽ 2 آهن.

KARACHIEDU.COM

3. $m=\frac{7}{3}$ ۽ باقي رهيل به اصل $\frac{3}{2}$ ۽ 1- آهن.

4. $a=2$ ۽ باقي رهيل به اصل 6 ۽ 1- آهن.

5. $a=49$ ۽ $b=36$ ۽ باقي رهيل به اصل 7 ۽ 3- آهن.

مشق 20.7

1. $\left\{(1,-1),\left(\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$

2. $\left\{(2,0),\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)\right\}$

3. $\left\{(4,3),\left(\frac{25}{8},-\frac{25}{6}\right)\right\}$

4. $\{(-3,0),(1,2)\}$

5. $\{(\pm3,\pm4),(0,5),(-5,0)\}$

6. $\left\{(\pm2\sqrt{2},\pm2\sqrt{2}),\left(\frac{\pm4\sqrt{5}}{5},\frac{\pm8\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$

7. $\{(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)\}$

8. $\left\{\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\right\}$

9. $\left\{\left(\frac{4}{5},20\right),\left(\frac{1}{5},5\right)\right\}$

10. 7 ۽ 5 يا 5 ۽ 7

11. ڊيگهه = 9 ميٽر ۽ ويڪر = 4 ميٽر

12. 8 ۽ 6

13. جڏهن هيپاٽينيوز 15cm آهي. 12cm ۽ 9cm

14. 10cm ۽ 13cm ،13cm

15. 25 ۽ 30

جائزي واري مشق 20

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i.	d	ii.	c	iii.	b	iv.	c	v.	c
vi.	b	vii.	a	viii.	b	ix.	c	x.	c

2. (i) اصل ناطق (ii) حقيقي ۽ برابر (iii) اصل خيالي
(iv) حقيقي ۽ غيرمساوي

3. $9, 9\omega, 9\omega^2$

4. (i) S.O.R $= -7$ and P.O.R $= 29$ (ii) S.O.R $= p$ and P.O.R $= q$
(iii) S.O.R $= \frac{7}{5}$ and P.O.R $= \frac{8}{5}$ (iv) S.O.R $= \frac{11}{9}$ and P.O.R $= -\frac{28}{9}$

6. $x^2-2x-1=0$

7. $16x^2-10x+1=0$

8. (i) $x=2, y=3$ (ii) $x=1$ and $y=6$

مشق 21.1

1. $\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x+3}$

2. $\frac{5}{x+1}-\frac{1}{x-3}$

3. $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-2}-\frac{4}{x-1}$

4. $\frac{7}{x+4}-\frac{3}{x+1}-\frac{2}{2x-1}$

5. $1+\frac{2}{x+3}+\frac{6}{x-2}$

6. $1-\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+1}$

7. $3x-2+\frac{1}{x-2}-\frac{5}{x+2}$

KARACHIEDU.COM

مشق 21.2

1. $\frac{4}{x+1}-\frac{7}{(x+1)^2}$
2. $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x+3}$
3. $\frac{5}{x-2}-\frac{10}{(x-2)^2}+\frac{4}{(x-2)^3}$
4. $\frac{2}{x-5}-\frac{3}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^2}$
5. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}$

مشق 21.3

1. $\frac{2x+3}{x^2+7}-\frac{1}{x-2}$
2. $\frac{x+5}{x^2+10}-\frac{1}{x+1}$
3. $\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2-5x}{x^2+5}$
4. $\frac{1}{x+1}+\frac{2x-2}{x^2-x+3}$
5. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+3}$

مشق 21.4

1. $\frac{1}{4(1-x)}-\frac{(x+1)}{4(x^2+1)}+\frac{(x-1)}{2(x^2+1)^2}$
2. $\frac{1}{9x}+\frac{2}{9x^2}-\frac{(x+2)}{9(x^2+3)}-\frac{(x-1)}{3(x^2+3)^2}$
3. $\frac{1}{4(1+x)}+\frac{(1-x)}{4(x^2+1)}+\frac{x-1}{2(x^2+1)^2}$
4. $\frac{7}{9x+1}+\frac{7(1-x)}{9(x^2+2)}+\frac{7(1-x)}{(x^2+2)^2}$
5. $\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{3+x^2}-7\frac{(x+2)}{8(3+x^2)^2}$

جائزي واري مشق 21

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i. d ii. b iii. d iv. b v. a

3. (i) $\frac{13}{3(x-1)}+\frac{2}{3(x+2)}$ (ii) $\frac{-7}{10x}+\frac{33}{14(x+2)}+\frac{257}{35(x-5)}$

(iii) $\frac{11}{5(x-2)}-\frac{6x+2}{x^2+1}$ (iv) $1+\frac{16}{x+1}-\frac{10x+8}{x^2+x+1}$

مشق 22.3

1. (a). A.M. = 11.889, H.M. = 11.194, مڊياني سراسري = 12, ڪثرتي سراسري = 12.
(b). A.M. = 0, G.M. = 0, مڊياني سراسري = 0, غيرڪثرتي
(c). A.M. = 13.044, G.M. = 12.837, H.M. = 11.727, مڊياني سراسري = 12.3.
(d). A.M. = 56.5, G.M. = 56.339, H.M. = 56.180, مڊياني سراسري = 56, ڪثرتي سراسري = 52.
(e). ڪثرتي سراسري = AB^+. (f). غيرڪثرتي
(g). A.M. = B+, مڊياني سراسري = B+, ڪثرتي سراسري = B+.
2. A.M.=172.1, G.M.= 169.551, H.M.= 166.615, مڊياني سراسري=184.5, ڪثرتي سراسري=190.
3. A.M. = ٽا = مڊياني سراسري, ڪتا پسند ڪن ٽا,
ڪتن سان پيار ڪن ٽا = ڪثرتي سراسري 4. COVID.

KARACHIEDU.COM

5. A.M.=7.149, G.M.=7.106, H.M.=7.061, مڈياني سراسري =7, Q_1= 6.5, Q_3 = 7.5, ڪٽرتي سراسري = 7.

6. A.M.=32.5, G.M.=32.303, H.M.=32.102, مڈياني سراسري =32, Q_1=30, Q_3 = 34, ڪٽرتي سراسري = 32. 7. A.M. = رُپيا 9640.

8. A.M. = 36.464, G.M. = 36.087, H.M. = 35.700, مڈياني سراسري = 36.643, ڪٽرتي سراسري = 36.929.

9. A.M.=11.9179, G.M.=11.9039, H.M.=11.8897, مڈياني سراسري =11.9708, ڪٽرتي سراسري = 12.117.

مشق 22.4

1. (c). –6, (d). 458.125. 2. X غير همشڪلي آهي، Y همشڪلي آهي.

3. $(A.M.)_W$ = 330, $(G.M.)_W$ = 310.902, $(H.M.)_W$ = 295.806.

4. $(A.M.)_W$ = ڪلوگرام 23.852, $(G.M.)_W$ = ڪلوگرام 23.850, $(H.M.)_W$ = ڪلوگرام 23.848

مشق 22.5

1. وسعت = 7, Var. = 4.490, S.D. = 2.119, M.D. = 1.673.

2. A-رانديگر: نسبتي = 185, M.D. = 45.111, Var. = 3699.222, S.D. = 60.821.
B-رانديگر: نسبتي = 72, M.D. = 21.111, Var. = 601.555, S.D. = 24.527
A-رانديگر جي پيٽ ۾ رانديگر B جي اسڪور ۾ وڌيڪ تسلسل آهي.

3. نسبتي S.D. (آمدني) = 0.488, نسبتي S.D. (خرچ) = 0.4945.
آمدني ۾ تغير خرچ کان گهٽ آهي.

4. A-ٽيم: نسبتي S.D. = 1.012, نسبتي M.D. = 0.528 (تقريباً).
B-ٽيم: نسبتي S.D. = 0.866, نسبتي M.D. = 0.5 (تقريباً).
A-ٽيم جي پيٽ ۾ B-ٽيم جي ڪارڪردگي ۾ وڌيڪ تسلسل آهي.

5. نسبتي = 2.1, Var. = 0.196, S.D. = 0.443, M.D. = 0.343 (تقريباً).

22 جائزي واري مشق

1. گهڻ چونڊائتا سوال (MCQs)

i. (c), ii. (c), iii. (b), iv. (a), v. (a), vi. (a), vii. (b), viii. (c), ix. (c), x. (d).

مشق 23.1

2. (i) $x = 25$ (ii) $x = 12$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 15$ 3. $\sqrt{34}$

4. 12 5. 10 6. 6 7. $a = 2\sqrt{5}, b = 2\sqrt{21}, h = \sqrt{35}$ 8. 58.31

9. $4\sqrt{3}$ 10. 12 11. 30 12. ڏيگهه = 12 ۽ ويڪر = 5

23 جائزي واري مشق

1. گهڻ چونڊائتا سوال (MCQs)

i. (a) ii. (b) iii. (b) iv. (b) v. (a) vi. (d) vii. (c)

2. 24 3. $2\sqrt{119}m$ 4. (i) $\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{51}$ (iii) $\sqrt{63}$

مشق 24.1

1. $m\overline{CE} = 10cm$ 2. $x = 1$

مشق 24.2

1. $x = 1$; ٽپور پاسو ٽڪندو 2. $y = 4$ ۽ $x = 2$ 3. $A_2 = 7cm^2$ 4. $x = 11cm$

KARACHIEDU.COM

جائزي واري مشق 24

1. گهڻ چونڊائتا سوال (MCQs)

i.	d	ii.	d	iii.	c	iv.	b	v.	a	vi.	b
vii.	c	viii.	c	ix.	d	x.	b	xi.	a	xii.	b

مشق 25.1

1. نہ، چاڪاڻ جوهر ليڪي ٽبڪن جي سيني چوڙن جا عمودي اڏكندڙ ڪڏهن به ساڳيئي ٽبڪي تي ڪپندا آهن.
2. ها اهو رڳو تڏهن ممڪن آهي جڏهن چئني ٽبڪن کي ملائڻ سان نهندڙ چوڪنڊو، مدار چوڪنڊو هجي. يعني ته چوڪنڊي جي سامهون وارن ڪنڊن جي جوڙ اُپت 180° آهي. پر عام طرح سان، ڪن به چار غير هم ليڪي ٽبڪن لاءِ، انهن مان گذرندڙ گول ڪيڏ ممڪن نہ آهي.
3. اشارو: مثال 2−1 ڏسو.
4. اشارو: مثال 2−1 ڏسو.
5. گهربل مسجد جي بيهڪ گونٿ A ، B ۽ C کي ملائيندڙ گول جي مرڪز تي آهي جئين شڪل ۾ ڏيکاريل آهي. گونٿن کي مسجد تائين پهچڻ لاءِ برابر فاصلو 5 ڪلوميٽر آهي.



مشق 25.2

1. اشارو: مرڪز مان گذرندڙ زهر، قطر هوندا آهن. 25.2-25.3 سڌيان ڏسو.
2. سڌيان 25.2 ۽ 25.3 کي ڏسو.
3. $C = 10\pi\ cm$ and $A = 25\pi\ cm$.
4. (a). $6cm$. (b). $6\sqrt{3}cm$. شڪل ۽ تفصيل لاءِ مثال 2-1 ڏسو
5. $r = \sqrt{34}cm$. شڪل ۽ تفصيل لاءِ مثال 2-1 ڏسو

مشق 25.3

1. سڌيان 25.4 ۽ 25.5 کي ڏسو.
2. سڌيان 25.4 ۽ 25.5 کي ڏسو.
3. (a). $\sqrt{95}cm$ (b). $\sqrt{39}cm$ (c). $2\sqrt{15}cm$ (d). $2\sqrt{77}cm$
4. (a). 7cm (b). 27.594 cm
5. (a). $2\sqrt{5}$ (b). 6 (c). 5 (d). 10.8 (e). $2\sqrt{51}$ (f). 6

جائزي واري مشق 25

1. گهڻ چونڊائتا سوال (MCQs)

i. (b) ii. (c) iii. (c) iv. (b) v. (b) vi. (a) vii. (a) viii. (b) ix. (a)

مشق 26.1

1. مثال 1 ۾ ثابتي کي ڏسو.
2. مثال 1 ۾ ثابتي کي ڏسو.
3. $5\sqrt{3}cm$ ۽ $\frac{5\sqrt{3}}{2}\ cm$. d = 6cm, A = 28.2743cm^2 ۽ C = 18.8495cm (تقريباً).
4. 24cm.
5. $\sqrt{109}cm$.

KARACHI.COM

مشق 26.2

1. اشارو: سڌيان 26.3 ۾ شامل نتيجن کي ڏسو.
2. اشارو: ثابت ڪندڙ بيان سڌيان جو عڪس آهي ۽ مثال 1 جي ثابتي.
3. سڌيان 26.3 کي ڏسو.
4. (a). 6, (b). $2\sqrt{66}$, (c). 7, (d). 11, (e). $\frac{55}{7}$, (f). 14.22 (تقريباً), (g). 4.3, (h). 18.8714 (تقريباً).
5. (a). 6, (b). 4, (c). 6, (d). 1.1547 (تقريباً),(e). 5, (f). 13.

مشق 26.3

1. اشارو: ثابت ڪندڙ بيان سڌيان 26.4 صورت (A) جو عڪس آهي.
2. اشارو: ثابت ڪندڙ بيان سڌيان جو عڪس آهي مثال 1 ۾
3. 6cm ۽ 37.7cm (تقريباً).
4. (a). 70^0 (b). 50^0 5. اشارو: ثابت ڪندڙ بيان سڌيان 26.4 صورت (A) کي ڏسو.
6. 4cm 7. 8.5cm

جائزي واري مشق 26

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i. (b) ii. (c) iii. (b) iv. (c) v. (b) vi. (b) vii. (a) viii. (d) ix. (a) x. (b) xi. (d)

مشق 27.1

3. $x = 20$ and $y = 10$ **4.** 114° and 92° **5.** 30° and 65° **6.** 120°

جائزي واري مشق 27

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i. b ii. c iii. c iv. b v. b vi. c vii. a viii. d ix. a

مشق 28.1

1. 18° **2.** $x < 46°$ **3.** $x > 13°$

مشق 28.2

1. 60° **2.** 70° **3.** 120°

جائزي واري مشق 28

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i. (a) ii. (b) iii. (d) iv. (d) v. (b)
vi. (a) vii. (b) viii. (c) ix. (b) x. (c)

جائزي واري مشق 29

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i. (b) ii. (d) iii. (a) iv. (c) v. (c) vi. (b) vii. (a)
viii. (b) ix. (d) x. (d) xi. (c) xii. (a) xiii. (b) xiv. (c)
xv. (d) xvi. (b) xvii. (d) xviii. (c) xix. (a) xx. (d)

مشق 30.1

1. (i) 32.25° (ii) 10.5° (iii) 8.25°
(iv) 45.36° (v) 25.5° (vi) 18.11°

2. (i) $32°15'$ (ii) $47°21'36''$ (iii) $57°19'38''$
(iv) $-(67°34'48'')$ (v) $22°30'$ (vi) $225°36'$

KARACHIEDU.COM

3. (i) $45°$ (ii) $60°$ (iii) $-135°$
(iv) $171.82°$ (v) $54.67°$ (vi) $257.73°$

4. (i) $\frac{\pi}{6}$ ريڊيان (ii) $\frac{\pi}{4}$ ريڊيان (iii) $\frac{\pi}{3}$ ريڊيان
(iv) $\frac{\pi}{8}$ ريڊيان (v) $\frac{-5\pi}{4}$ ريڊيان (vi) 1.06 ريڊيان

مشق 30.2

1. (i) 4 ريڊيان (ii) 15.1 ريڊيان (iii) 2.09 ريڊيان (iv) 1.8 ريڊيان

2. (i) $l = 2.12$ cm (ii) $l = 10.2$ cm (iii) $l = 3.14$ cm (iv) $l = 15.84$ cm

3. (i) $r = 1.91$ m (ii) $r = 0.5$ m (iii) $r = 16$ cm (iv) $r = 4.9$ cm

4. (i) $l = 0.52$ يونٽ (ii) $l = 0.79$ يونٽ (iii) $l = 1.05$ يونٽ (iv) $l = 1.57$ يونٽ

5. (i) $l = 2.62$ cm (ii) گول جي سيڪٽر جي ايراضي $= 6.55\ cm^2$

6. ٽپڪي جي طئي ڪيل فاصلو: $l = 2.2$ m

7. گول جي سيڪٽر جي ايراضي $= 6.28\ cm^2$

8. $\theta = 800$ ريڊيان **9.** $\theta = 0.5$ ريڊيان

10. $105.6\ cm^2 =$ سيڪٽر جي ايراضي ۽ $l = 17.6$ cm

مشق 30.3

1. (i) $-305°$ ۽ $415°$ (ii) $-\frac{11\pi}{6}$ ۽ $\frac{13\pi}{6}$
(iii) $-405°$ ۽ $315°$ (iv) $\frac{5\pi}{4}$ ۽ $-\frac{11\pi}{4}$

2. (i) Q_4 (ii) Q_1 (iii) Q_3
(iv) Q_1 (v) Q_3 (vi) Q_2

3. ڪاٽو نشاني وارا آهن. (i), (ii), (iii), (iv), (v) (vi) واڌو نشاني وارا

4. (i) Q_2 ۾ موجود آهي. (ii) Q_3 ۾ موجود آهي. (iii) Q_3 ۾ موجود آهي.
(iv) Q_3 ۾ موجود آهي. (v) Q_2 ۾ موجود آهي. (vi) Q_1 ۾ موجود آهي.

5. (i) $\cot\theta = -\frac{3}{4}$ ۽ $\tan\theta = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\sec\theta = -\frac{5}{3}$

KARACHIEDU.COM

6. (i) $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۽ $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\sec\theta = -2, \cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) $\cot\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ ۽ $\tan\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{3}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \frac{-\sqrt{5}}{3}$, $\sec\theta = \frac{3}{2}$

(iii) $\cot\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ ۽ $\tan\theta = \frac{-\sqrt{5}}{2}, \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}, \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cot\theta = 2$

(iv) $\tan\theta = \cot\theta = 1$ ۽ $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(v) $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۽ $\tan\theta = \sqrt{3}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sec\theta = 2$

7. (i) 2 (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{2}-1$

(iv) $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ (v) $2-\sqrt{3}$ (vi) 4

30.5 مشق

1. $x = 304.5m$ **2.** $L = 4\sqrt{3} \approx 6.93m$ **3.** $\theta = 60°$

4. $x = 288.75\ m$ **5.** $\theta = 24°$

30 جائزي واري مشق

1. (MCQs) گهڻ چونڊائتا سوال

i.	b	ii.	a	iii.	c	iv.	b	v.	b
vi.	b	vii.	b	viii.	c	ix.	b	x.	b

3. $\frac{2821\pi}{7200}$ **4.** 120 درجو **5.** 120 درجو

6. 1 منٽ **7.** $\frac{28}{\pi}cm$ **8.** 1 ريڊيان

10. $6\ cm^2$

KARACHIEDU.COM